A remark on Borcherds construction of Jacobi forms

青木 宏樹 (東京理科大学)

2010 年 8 月 24 日

1 はじめに

次の等式は、オイラーの五角数定理と呼ばれ、18 世紀、オイラーによって発見、証明されたものです。

$$\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{\frac{n(3n-1)}{2}}$$

両辺ともに無限の計算があらわれていますが、たとえば、左辺の無限積は、真面目に $m=1$ から順にかけ算していけば、 $m=m_0$ まで計算したところで m_0 次の係数が確定します。この意味で両辺ともに任意の次数の係数を求めることができ、左辺と右辺でそれらが一致するというのが定理の主張です。

とはいえ左辺は無限積なので、直観的には、真面目に $m=1$ から順にかけ算（いわゆる「たすきがけ」）をしていけば、どんどん項が増殖して手におえなくなりそうに思えます。ところがどっこい、実際に計算してみると、あれやこれやと項が打ち消しあって右辺のようなきれいな形になるというのがこの定理の主張です。私がこの等式を知ったのは大学院生のときでした。こんなにきれいな等式があることがすぐには信じられず、まず最初の数項の係数が一致することを手計算で確かめ、次に最初の数十項が一致することをコンピュータに計算させて確認し、その後、証明を読んでようやく事実を受け入れ、「それにしても不思議だなぁ」と思ったことを今でも覚えています。もっとも、今では初等的かつ非常に簡潔な証明[1]が知られているので、この等式を事実として受け入れるだけなら高校レベルの知識で十分です。しかし、数学者である我々[2]は、経験的に、非自明な等式はその背後に豊かな数学的構造を隠し持っていることを知っています。じゃあ、それを研究して五角数定理を極めれば、、、と目論むのは簡単ですが、オイラーの五角数定理に対する「背後にある豊かな数学的構造」は、保型形式に関わるすべての分野というとてつもなく広いものであるような気がします。ということで、当時、なんとか修論・博論を仕上げなければならなかった私は、このような壮大な目論見をあっさりと捨ててしまいました。もっとも、私の指導教官であった齋藤恭司先生がエータ商について興味を持っておられたため、五角数定理と類似の「無限積＝無限和」の形をした非自明な等式がいろいろと存在することは私も知っており、その不思議さだけが心に残っている状態が続きました。

話はかわって、1990 年代半ば、ボーチャーズによって無限積表示を持つ多変数の保型形式が構成され、ムーンシャイン予想が解決されました。無限積表示を持つ多変数保型形式を構成するアイデアは、その後「保型形式環の決定」「モジュライ空間の具体的記述」など数学の

[1] たとえば http://en.wikipedia.org/wiki/Pentagonal_number_theorem にのっています。
[2] ここは突っ込まないでください。

諸問題に応用されているだけでなく、素粒子の振る舞いの記述など数理物理の分野でも使われ始めています。ただ、現在のところ、無限積表示を持つ保型形式の構成は、必要なものを必要なときに構成する各個撃破的なものが多く、「ボーチャーズの方法でどのような（どのくらいの）保型形式が作れるのか？」という素朴な疑問に対する研究は、まだ始まったばかりだと思います。

ということで、私は最近ボーチャーズ無限積の周辺をいろいろと探っていました。保型形式を無限和で構成する方法はいくつか知られているので、そこに「無限積＝無限和」の形をした非自明な等式が存在し、何か数学的に興味深い現象が起きているのではないかと思ったからです。ボーチャーズ無限積は、その構成において解析接続の可能性をちゃんと調べる必要があり、一般には複雑な議論が必要です。が、まずは簡単な場合からということで、解析接続のいらない場合について調べたときのメモが本稿です。あまりに簡単な場合なので、もはやボーチャーズ無限積とはとても言えるものではありません。それでも、五角数定理と類似の「無限積＝無限和」の形をした非自明な等式たち（の一部？）は、無秩序にあらわれているわけではなく、「ベクトル系」というボスに支配されている様子が少しは見えるようになったかなぁと思っています。

2　歴史的な公式

2.1　オイラーの五角数定理

ある種の規則性を持つ多項式の無限積が興味深い等式を導くことに最初に気づいたのは、おそらく、18 世紀最大の数学者オイラーであったと思われる。彼は、オイラーの五角数定理と呼ばれる「無限積＝無限和」の形をした非自明な等式を発見した。

定理 1. （オイラーの五角数定理）次の等式が成立する。

$$\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{\frac{n(3n-1)}{2}}$$

直接的には、この定理は、形式的べき級数環 $\mathbb{Z}[[q]]$ における等式、つまり両辺を q の形式的べき級数とみなしての等式である。しかし、両辺とも $|q|<1$ で収束するので、単位円盤上で定義されたの正則関数の等式とみなすこともできる。現在では、オイラーの五角数定理の証明は何通りも知られている。

現在の数学の立場からすれば、この定理はデデキントの η 関数がある θ 関数と一致していることを示しており、1 変数保型形式の等式とみなせる。すなわち、複素上半平面 $\mathbb{H}$ 上で定義されたデデキントの η 関数

$$\eta(\tau):=q^{\frac{1}{24}}\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)\qquad\left(q^m:=\exp\left(2\pi\sqrt{-1}m\tau\right)\right)$$

を用いれば、オイラーの五角数定理は

$$\eta(\tau)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{\frac{1}{24}(6n-1)^2}\tag{1}$$

とあらわせる。なお、現在では次のような類似の公式が知られている[3]。

$$\frac{\eta(2\tau)^2}{\eta(\tau)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{\frac{1}{8}(4n+1)^2} \qquad \text{(ガウスの公式)} \tag{2}$$

$$\frac{\eta(2\tau)\eta(3\tau)^2}{\eta(\tau)\eta(6\tau)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{\frac{1}{24}(6n+1)^2} \tag{3}$$

$$\frac{\eta(2\tau)^2\eta(3\tau)\eta(12\tau)}{\eta(\tau)\eta(4\tau)\eta(6\tau)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{\frac{1}{3}(3n+1)^2} \tag{4}$$

2.2 ヤコビの三重積公式

19 世紀に入り、楕円関数論の研究で有名な数学者ヤコビは、ヤコビの三重積公式と呼ばれる「無限積＝無限和」の形をした非自明な等式を発見した。

定理 2. （ヤコビの三重積公式）次の等式が成立する。

$$\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-q^m\right)\left(1+q^{m-\frac{1}{2}}\zeta\right)\left(1+q^{m-\frac{1}{2}}\zeta^{-1}\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{\frac{1}{2}n^2}\zeta^n$$

この公式は q の他に、もうひとつの文字 ζ を含んでおり、特に ζ を特殊化することで、オイラーの五角数定理や、その他多くの非自明な「無限積＝無限和」の形の等式を得ることができる。たとえば、ヤコビの三重積公式において、q を q^3 に、ζ を $-q^{-\frac{1}{2}}$ におきかえればオイラーの五角数定理 (1) が得られる。また、ヤコビの三重積公式において、 q はそのままにし、ζ を $q^{\frac{1}{2}}$ におきかえればガウスの公式 (2) が得られる。直接的には、この定理は、形式的べき級数環 $\mathbb{Z}[\zeta,\zeta^{-1}][[q^{\frac{1}{2}}]]$ における等式である。しかし、 $q^m := \exp(2\pi\sqrt{-1}m\tau)$, $\zeta^l := \exp(2\pi\sqrt{-1}lz)$ と考えれば、両辺とも $\tau\in\mathbb{H}$, $z\in\mathbb{C}$ で収束するので、そこで定義された正則関数の等式とみなすこともできる。現在では、ヤコビの三重積公式の証明は何通りも知られている[4]。

現在の数学の立場からすれば、ヤコビの三重積公式はヤコビ形式の等式とみなせる。実際、

$$q^{\frac{1}{8}}\zeta^{-\frac{1}{2}}(1-\zeta)\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)(1-q^m\zeta)\left(1-q^m\zeta^{-1}\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^{n+1}q^{\frac{1}{2}(n+\frac{1}{2})^2}\zeta^{n+\frac{1}{2}}$$

の両辺は、重み $\dfrac{1}{2}$ 指数 $\dfrac{1}{2}$ のヤコビ形式である。また、ヤコビの三重積公式は、アフィンリー環の分母公式とみなすこともできる。

2.3 ワトソンの五重積公式

ヤコビの三重積公式に似た等式が、20 世紀に入っていくつか発見された。たとえば、ワトソンの五重積公式がそうである。

---

[3]エータ商については、齋藤恭司先生による問題提起「エータ商においてフーリエ展開の係数がすべて非負となるのはどのようなときか」があり、齋藤先生自身による解説 [3] のなかで、金子昌信先生から教えていただいた例として式 (3)(4) があげられている。

[4]簡単な証明をあげておく。(右辺)/(左辺) を ζ についての関数と思えば、原点を除いて正則で、変換 $\zeta\mapsto q\zeta$ で不変。よってリュービルの定理よりこれは定数であり、オイラーの五角数定理より 1 であることがわかる。

定理 3. （ワトソンの五重積公式）次の等式が成立する。

$$\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-q^m\right)\left(1-q^m\zeta\right)\left(1-q^{m-1}\zeta^{-1}\right)\left(1-q^{2m-1}\zeta^2\right)\left(1-q^{2m-1}\zeta^{-2}\right)$$
$$=\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{\frac{n(3n+1)}{2}}\left(\zeta^{3n}-\zeta^{-3n-1}\right)$$

この公式も ζ を特殊化することで、多くの非自明な「無限積＝無限和」の形をした等式を得ることができる。たとえば、ワトソンの五重積公式において、 ζ に -1 を代入すればガウスの公式 (2) が得られる。また、 ζ に 1 の原始 3 乗根を代入すれば式 (3) が得られる。

現在の数学の立場からすれば、ワトソンの五重積公式はヤコビ形式の等式とみなせる。実際、

$$q^{\frac{1}{24}}\zeta^{-\frac{1}{2}}\frac{(1-\zeta^2)}{(1-\zeta)}\prod_{m=1}^{\infty}\frac{(1-q^m)\left(1-q^m\zeta^2\right)\left(1-q^m\zeta^{-2}\right)}{(1-q^m\zeta)\left(1-q^m\zeta^{-1}\right)}$$
$$=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{\frac{3}{2}(n+\frac{1}{6})^2}\left(\zeta^{3(n+\frac{1}{6})}+\zeta^{-3(n+\frac{1}{6})}\right)$$

の両辺は、重み $\dfrac{1}{2}$ 指数 $\dfrac{3}{2}$ のヤコビ形式である。

3 無限積を用いたヤコビ形式の構成

3.1 ボーチャーズのベクトル系

1990 年代半ば、ボーチャーズは、無限積を用いて多変数の保型形式を構成する方法を開発した[5]。現在「ボーチャーズ無限積」と呼ばれているものは、IV 型領域上で無限積を用いて保型形式を構成する方法（または結果）であるが、彼は論文 [1] のなかで「ベクトル系」と呼ばれるより一般的な条件下で無限積を用いてヤコビ形式を構成する方法を与えている。（ヤコビ形式についての一般論は、たとえば [2] を参考のこと。）

定義 4. 写像 $a:\mathbb{R}^N\to\mathbb{Z}$ がベクトル系であるとは、a が次の 4 条件をみたすことをいう。

(V1) $R:=\{l\in\mathbb{R}^N \mid a(l)\neq 0\}$ は有限集合。

(V2) $L:=\mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(R)$ は $\mathbb{R}^N$ の格子で、 $\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}\, L=N$。

(V3) 任意の $l\in R$ に対して $a(l)=a(-l)$ が成り立つ。

(V4) $\mu:=\dfrac{\sum_{l\in R}a(l)\langle v,l\rangle^2}{2\langle v,v\rangle}$ の値は $v\in\mathbb{R}^N$ の選びかたによらず一定。

ただし、記号 $\langle v,l\rangle$ は、 ${}^t vl$ を意味するものとする。（これは $\mathbb{R}^N$ における通常の内積であるが、この記号を用いるときには、 $\mathbb{C}^N$ で考えているときでも複素共役をとらないものとする。）

[5] 彼はそれを用いてムーンシャイン予想を解決し、フィールズ賞を受賞した。

a をベクトル系とする。条件 **(V3)** より、ベクトル系 a から定まる集合 R は原点 O を中心に対称である。そこで、 R の部分集合 R^+ を、条件

$$R^+ \cap (-R^+) = \emptyset, \qquad R \setminus \{O\} = R^+ \cup (-R^+)$$

をみたすように選ぶ。 R^+ の選び方は一意的ではないが、これは今後の議論には影響しない。また、

$$\rho := \sum_{l \in R^+} a(l) l, \qquad d := \sum_{l \in R} a(l)$$

とおく。定義より

$$\mu = \frac{1}{2N} \sum_{l \in R} a(l) \langle l, l \rangle, \qquad L \subset \mu L^*$$

であることがわかる。

さて、ベクトル系 a に対し、無限積

$$\varphi_a(\tau, z) := q^{\frac{d}{24}} \zeta^{-\frac{\rho}{2}} \prod_{(m,l)>0} \left(1 - q^m \zeta^l\right)^{a(l)}$$

を考える。ただし $(m,l) > 0$ は $m \in \mathbb{N}, l \in R$ または $m = 0, l \in R^+$ を意味するものとし、また $q^m := \exp\left(2\pi\sqrt{-1} m \tau\right)$, $\zeta^l = \exp\left(2\pi\sqrt{-1}\langle l, z \rangle\right)$ とする。厳密には φ_a は R^+ の選び方に依存するが、 R^+ の選び方を変えても φ_a は符号が変わるだけであることを注意しておく。

このとき、やや複雑だがそう難しくない計算により、ベクトル系 a に対して定まる無限積 φ_a はヤコビ形式の変換規則をみたすことがわかる。

命題 5. （Borcherds）ベクトル系 a に対して定まる無限積 φ_a は $\mathbb{H} \times \mathbb{C}^N$ 上の有理型関数であり、その零点と極は無限積の形から自明に判るものだけである。すなわち、 $l \in R^+$ の各々に対し、集合 $\{(\tau, z) \mid \langle l, z \rangle \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau\}$ が位数 $a(l)$ の零点（ $a(l)$ が負の場合は極 ）となる。さらに、 φ_a は重み $\frac{a(0)}{2}$ 指数 $\frac{\mu}{2}$ の（有理型で指標つきの）ヤコビ形式である。すなわち、以下の変換規則をみたす。

- $\varphi_a(\tau, z) = (-1)^{\langle x, \rho \rangle} q^{\frac{\mu}{2}\langle x, x \rangle} \zeta^{\mu x} \varphi_a(\tau, z + x\tau) \qquad (x \in L^*)$
- $\varphi_a(\tau, z) = (-1)^{\langle y, \rho \rangle} \varphi_a(\tau, z + y) \qquad (y \in L^*)$
- $\varphi_a(\tau, z) = (-1)^{\frac{d - a(0)}{2}} \varphi_a(\tau, -z)$
- $\varphi_a(\tau, z) = \mathbf{e}\left(\frac{d}{8}\right) \tau^{-\frac{a(0)}{2}} \mathbf{e}\left(-\frac{\mu\langle z, z \rangle}{2\tau}\right) \varphi_a(-\frac{1}{\tau}, \frac{z}{\tau})$
- $\varphi_a(\tau, z) = \mathbf{e}\left(-\frac{d}{24}\right) \varphi_a(\tau + 1, z)$

3.2 テータ分解

ベクトル系より構成されたヤコビ形式 φ_a がカスプも込めて正則であれば、 φ_a は、重み $\frac{a(0)-N}{2}$ の楕円モジュラー形式 f_v たちを用いて

$$\varphi_a(\tau,z)=\sum_{v\in(L-\frac{\rho}{2})/\mu L^*} f_v(\tau)\theta_v(\tau,z),$$

と分解できる。ただし、 θ_v は次のように定義されたテータ関数（重み $\frac{N}{2}$ 指数 $\frac{\mu}{2}$ のヤコビ形式）である。

$$\theta_v(\tau,z)=\sum_{x\in L^*}(-1)^{\langle x,\rho\rangle}q^{\frac{1}{2\mu}\langle v+\mu x,v+\mu x\rangle}\zeta^{v+\mu x}$$

とくに、ベクトル系 a が条件 $a(0)=N$ をみたしておれば、重み 0 の楕円モジュラー形式は定数しかないので、 φ_a はテータ関数の和で書け、次のような「無限積＝無限和」の形をした等式が生ずる。

$$\varphi_a(\tau,z)=\sum_{v\in(L-\frac{\rho}{2})/\mu L^*} c_v\theta_v(\tau,z)\qquad(c_v\in\mathbb{Z})\tag{5}$$

この方針で、非自明な「無限積＝無限和」の形をした等式を量産しようというのが、本稿の目論見である。

問題 6. 条件 $a(0)=N$ をみたし、φ_a がカスプも込めて正則となるようなベクトル系 a をすべて求めよ。

この問題を解くために、式 (5) の両辺をよくみてみよう。まず、右辺はテータ関数であるので、 $q^n\zeta^\lambda$ の項は $2n\mu=\langle\lambda,\lambda\rangle$ のところだけに現れる。一方、左辺は、無限積を展開すると

$$\varphi_a(\tau,z):=q^{\frac{d}{24}}\zeta^{-\frac{\rho}{2}}\prod_{(m,l)>0}\left(1-q^m\zeta^l\right)^{a(l)}=\left(\zeta^{-\frac{\rho}{2}}\prod_{l\in R^+}\left(1-\zeta^l\right)^{a(l)}\right)q^{\frac{d}{24}}+\cdots\cdots$$

という形になるので、

$$\zeta^{-\frac{\rho}{2}}\prod_{l\in R^+}\left(1-\zeta^l\right)^{a(l)}=\sum_\lambda c_\lambda\zeta^\lambda\quad(c_\lambda\neq0)$$

と書くことにすれば、左辺にあらわれる λ は、条件 $d\mu=12\langle\lambda,\lambda\rangle$ を満たさねばならないことがわかる。

さて、 $l\in R$ が「割れないベクトル」であるとは、実数 x が $xl\in R$ を満たすならば $|x|\geq1$ であることと定義しよう。「割れないベクトル」全体の集合を R_0 と書くことにし、$R_0^+:=R_0\cap R^+$ と定める。このとき、次の命題が成り立つことがわかる。

命題 7. ベクトル系 a は**問題 6.** の条件をみたすとする。このとき、 $l\in R_0^+$ であれば、ベクトル系 a の集合 $\{xl\mid x\in\mathbb{R}\}\cap R$ 上での値は次のいずれかである。

- $a(\pm l)=1$。このとき、展開式には $\left(1-\zeta^l\right)$ があらわれる。
- $a(\pm l)=-1,\ a(\pm2l)=1$。このとき、展開式には $\left(1+\zeta^l\right)$ があらわれる。

証明は N についての帰納法を用いる。この命題は R_0^+ の選び方によらないことに注意しておく。まず、 $N=1$ のときは容易。一般の N については、 $l \in R_0^+$ に直交するベクトル v をとり、あらためて R_0^+ を、その任意の元と v との内積が非負になるように選びなおす。このとき、原点を通り v と直交する $N-1$ 次元空間に対して帰納法の仮定を使えばよい。したがって、**問題 6.** は、次の問題の一部であるとみなすことができる。

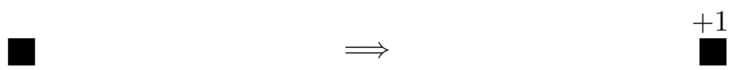
問題 8. 以下の式において（左辺の $\pm$ は項ごとにどちらを選んでもよいことにして） Λ がある球面の部分集合となる場合をすべて求めよ。

$$\prod_{l \in R_0^+} \left(1 \pm \zeta^l\right) = \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda \zeta^\lambda \quad (c_\lambda \neq 0)$$

3.3　１次元の場合

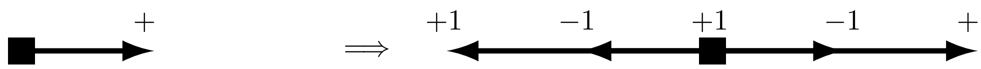
$N=1$ のときには、**問題 8.** を解決することは極めて容易である。すぐに、以下の３通りだけが**問題 8.** の条件を満たすことが示せる。なお、それぞれの場合ごとに付記されている図は、左側が**問題 8.** における R_0^+ と符号の様子、右側がそれに対応するベクトル系の様子である。

- 自明な場合： $a(0)=1$ ：オイラーの五角数定理に対応



- 被約な場合： $a(0)=1,\ a(\pm1)=1$ ：ヤコビの三重積公式に対応

- 被約でない場合： $a(0)=1,\ a(\pm1)=-1,\ a(\pm2)=1$ ：ワトソンの五重積公式に対応

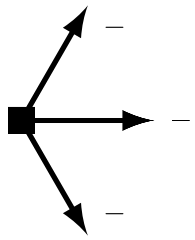


3.4　２次元の場合

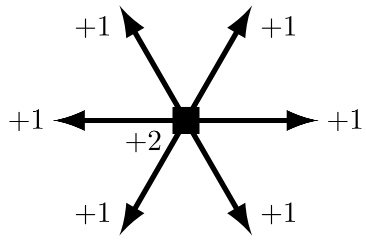
$N=2$ のときには、**問題 8.** を解決することは少々難しい[6]。場合分けの考察を細かく書くと結構複雑になるので、ここでは概要を少し述べるだけにしておく。まず、 $N=2$ の場合に限らず、**問題 8.** の条件が成り立つ場合には、式の左辺を展開して現れる項は、キャンセルする場合も含めて、球面の外側に出ることはないことがわかる。 $N=2$ のとき、１次元のときに得られたベクトル系の２個の直和が**問題 8.** の条件を満たすことはすぐわかるので、それ以外の場合を考えることにする。R_0^+ を、すべての元が平面 $\mathbb{R}^2$ の片側半分にまとまるように（任意の２つのベクトルの内積が正になるように）選択し、端から順に $e_1, e_2, e_3, e_4 \ldots$ と名づける。特に e_1 と e_2 について考えることにより、 $\langle e_1, e_2 \rangle \geq \frac{1}{2}\langle e_1, e_1 \rangle$ が得られる。 次に、 R_0^+ を e_1, e_2 と $-e_3, -e_4 \ldots$ に取り直して同様に考えることにより、$\langle e_1, e_2 \rangle \geq \frac{1}{2}\langle e_2, e_2 \rangle$ が得られる。いま、特に e_1 が R_0^+ のなかで最短のベクトルとなっている場合を考え、 e_1 と直交する成分が最小のベクトル f がどのように分布できるかを考えると、「１次元のベクトル系２個の直和」以外では、以下の４通りだけが**問題 8.** の条件を満たすことが示せる。

[6]筆者（青木）が何かに気づいてないだけで、本当は易しい問題ではないかという気がします。

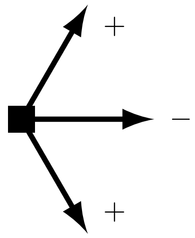
- A_2 型のベクトル系：



$\Longrightarrow$

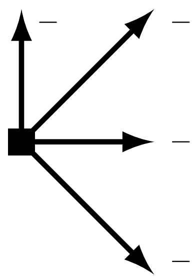


なお、次のパターンも、**問題 8.** の条件をみたすが、これはベクトル系の定義の **(V4)** をみたさず、**問題 6.** の解答にはならない。

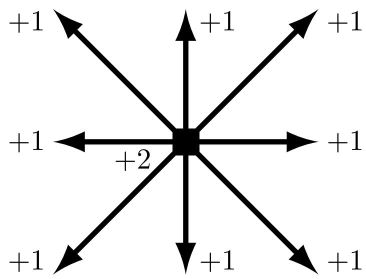


$\Longrightarrow$ 対応するベクトル系は存在しない !!

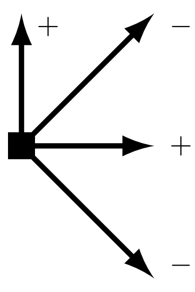
- B_2 型のベクトル系：



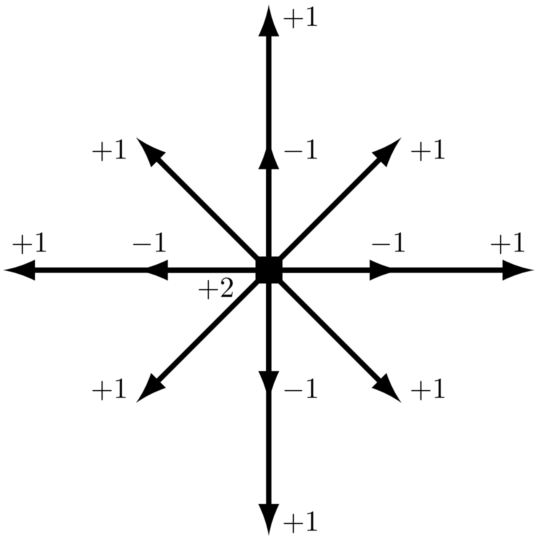
$\Longrightarrow$



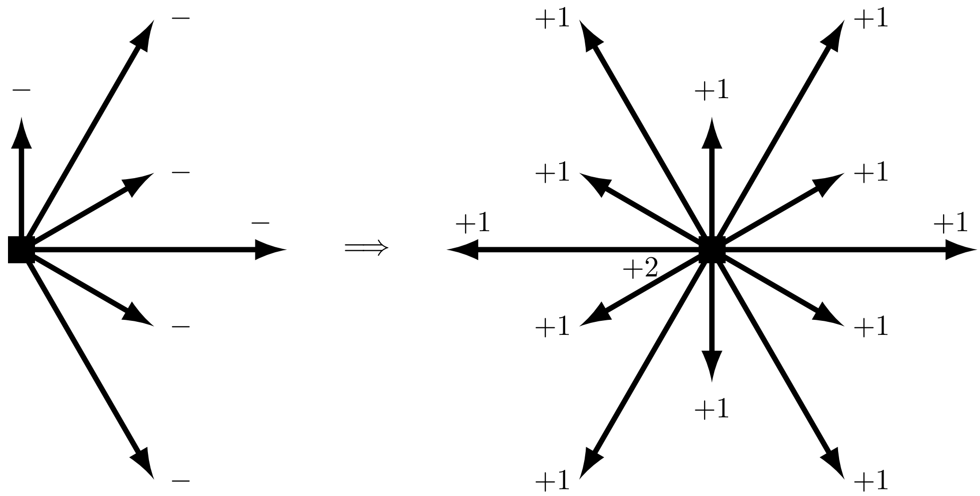
- BC_2 型のベクトル系：



$\Longrightarrow$



- G_2 型のベクトル系：



3.5　高次元の場合

以上より、 $N=1,2$ の場合には、**問題 6.** の条件を満たすベクトル系は、すべてアフィンルート系の分母公式に対応していることがわかった。実際、次元によらず、アフィンルート系の分母公式が、**問題 6.** の条件を満たすベクトル系を導くことは、その形から明らかである。$N \geq 3$ のとき、アフィンルート系の分母公式に対応していないものが存在するかどうかは、まだ調べていない。

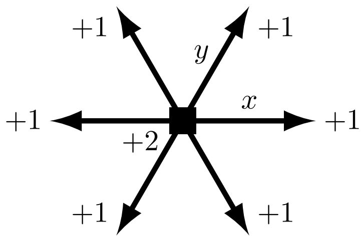
3.6　例

例として、 A_2 型のベクトル系から得られる「無限積＝無限和」の形をした等式を書き下すと、次のようになる。

$$q^{\frac{1}{3}} X^{-1}(1-X)(1-Y)\left(1-XY^{-1}\right)\prod_{m=1}^{\infty}\Big\{(1-q^m)^2(1-q^mX)(1-q^mY)$$
$$\left(1-q^mXY^{-1}\right)\left(1-q^mX^{-1}\right)\left(1-q^mY^{-1}\right)\left(1-q^mX^{-1}Y\right)\Big\}$$

$$=\sum_{m,n\in\mathbb{Z}}\left(\frac{n-m}{3}\right)q^{\frac{1}{3}(m^2+n^2+mn)}X^mY^n$$

ここで、 X,Y は、右図のようにベクトル x,y を定め、 $X=\zeta^x, Y=\zeta^y$ とおいたものである。
また、$\left(\frac{n-m}{3}\right)$ はルジャンドル記号である。



$$\left(\frac{n-m}{3}\right)=\begin{cases}1 & (n-m\equiv 1 \pmod 3)\\ 0 & (n-m\equiv 0 \pmod 3)\\ -1 & (n-m\equiv 2 \pmod 3)\end{cases}$$

さて、この式で X を $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ に、Y を $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ に置き換えると、次のようなエータ商[7]の等式が得られる。

$$\frac{\eta(3\tau)^3}{\eta(\tau)} = \frac{1}{3}\sum_{m-n\equiv 1\ (3)} q^{\frac{1}{3}(m^2+n^2+mn)}$$

ただ、ζ をどのように置き換えるとエータ商の形になるかなど、得られた多変数の等式の1変数への特殊化については、次の節で述べる場合以外は、著者はまだ詳細を調べていない。

4 エータ商とメルスマンの定理

4.1 三重積・五重積の公式から得られるエータ商

この節では、$N=1$ の場合に限って、ヤコビ形式の「無限積＝無限和」の形をした等式から得られるエータ商の等式について調べる。この場合、元となるヤコビ形式の等式は、ヤコビの三重積公式と、ワトソンの五重積公式であった。

まず、ヤコビの三重積公式において、ζ を aq^b に置き換える場合を考える。置換後の無限積部分がエータ商となるための a,b についての条件を求めることはさほど難しくない。結果、次の表にあげるエータ商が得られる。

$a\setminus b$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$
1	$**$	$\frac{\eta(\tau)^2}{\eta(2\tau)}$	$\eta(\tau)$	$\frac{\eta(\tau)\eta(4\tau)}{\eta(2\tau)}$	$\frac{\eta(\tau)\eta(6\tau)^2}{\eta(2\tau)\eta(3\tau)}$
-1	$\frac{\eta(2\tau)^2}{\eta(\tau)}$	$\frac{\eta(2\tau)^5}{\eta(\tau)^2\eta(4\tau)^2}$	$\frac{\eta(2\tau)\eta(3\tau)^2}{\eta(\tau)\eta(6\tau)}$	$\frac{\eta(2\tau)^2}{\eta(\tau)}$	$\frac{\eta(2\tau)^2\eta(3\tau)\eta(12\tau)}{\eta(\tau)\eta(4\tau)\eta(6\tau)}$
$\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$	$\eta(\tau)$	$\frac{\eta(2\tau)^2\eta(3\tau)}{\eta(\tau)\eta(6\tau)}$	$*$	$\times$	$*$
$\sqrt{-1}$	$\frac{\eta(\tau)\eta(4\tau)}{\eta(2\tau)}$	$\frac{\eta(\tau)^2}{\eta(2\tau)}$	$\times$	$*$	$\times$
$\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$	$\frac{\eta(\tau)^2\eta(6\tau)}{\eta(2\tau)\eta(3\tau)}$	$\frac{\eta(\tau)\eta(4\tau)\eta(6\tau)^2}{\eta(2\tau)\eta(3\tau)\eta(12\tau)}$	$*$	$\times$	$*$

続いて、ワトソンの五重積公式において、ζ を aq^b に置き換える場合を考える。この場合も、置換後の無限積部分がエータ商となるための a,b についての条件を求めることはさほど難しくない。結果、次の表にあげるエータ商が得られる。

$a\setminus b$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$
1	$\eta(\tau)$	$**$	$\eta(\tau)$	$\frac{\eta(2\tau)^3}{\eta(\tau)\eta(4\tau)}$	$\frac{\eta(2\tau)^2\eta(3\tau)}{\eta(\tau)\eta(6\tau)}$
-1	$**$	$**$	$\frac{\eta(\tau)^2\eta(6\tau)}{\eta(2\tau)\eta(3\tau)}$	$\eta(\tau)$	$\frac{\eta(\tau)\eta(4\tau)\eta(6\tau)^2}{\eta(2\tau)\eta(3\tau)\eta(12\tau)}$
$\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$	$\eta(\tau)$	$\frac{\eta(\tau)\eta(6\tau)^2}{\eta(2\tau)\eta(3\tau)}$	$\eta(\tau)$	$\times$	$*$
$\sqrt{-1}$	$\frac{\eta(2\tau)^3}{\eta(\tau)\eta(4\tau)}$	$\eta(\tau)$	$\times$	$*$	$\times$
$\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$	$\frac{\eta(2\tau)\eta(3\tau)^2}{\eta(\tau)\eta(6\tau)}$	$\frac{\eta(2\tau)^2\eta(3\tau)\eta(12\tau)}{\eta(\tau)\eta(4\tau)\eta(6\tau)}$	$*$	$\times$	$*$

[7] エータ商とは、$\eta(m\tau)$ または $\eta(m\tau)^{-1}$ の有限個の積のことをいう。

以上より、両者から合計 12 種類のエータ商が得られることがわかった。もちろん、元となった式は重み $\frac{1}{2}$ の正則なヤコビ形式であるから、これらのエータ商はすべて重み $\frac{1}{2}$ の保型形式でカスプも込めて正則である。

もし、重み $\frac{1}{2}$ のエータ商でカスプも込めて正則なものがこの 12 個だけだったら、それはそれでなかなかきれいな結果だと思うのだが、残念ながら事実はそうではない[8]。

4.2 メルスマンの定理

次の定理が、ザギエによって予想され、メルスマンによって証明されている。([4])

定理 9. 次のことが成り立つ[9]。

- 重みを固定するごとに、カスプも込めて正則なエータ商は、本質的に有限個しかない。
- 重み $\dfrac{1}{2}$ のカスプも込めて正則なエータ商は、本質的に１４個である。

なお、ここでの「本質的な」とは、たとえば $\eta(\tau)$ と $\eta(2\tau)$ は同一視するという意味である。

具体的には、重み 1/2 の、カスプも込めて正則なエータ商は、次の１４個である。

（１）三重積・五重積の公式から ζ の特殊化で得られる１２個

$$\begin{array}{cccc}
\eta(\tau) & \dfrac{\eta(\tau)\eta(4\tau)}{\eta(2\tau)} & \dfrac{\eta(2\tau)^3}{\eta(\tau)\eta(4\tau)} & \dfrac{\eta(2\tau)^5}{\eta(\tau)^2\eta(4\tau)^2} \\
\dfrac{\eta(\tau)^2}{\eta(2\tau)} & \dfrac{\eta(2\tau)^2}{\eta(\tau)} & \dfrac{\eta(\tau)^2\eta(6\tau)}{\eta(2\tau)\eta(3\tau)} & \dfrac{\eta(\tau)\eta(6\tau)^2}{\eta(2\tau)\eta(3\tau)} \\
\dfrac{\eta(2\tau)^2\eta(3\tau)}{\eta(\tau)\eta(6\tau)} & \dfrac{\eta(2\tau)\eta(3\tau)^2}{\eta(\tau)\eta(6\tau)} & \dfrac{\eta(\tau)\eta(4\tau)\eta(6\tau)^2}{\eta(2\tau)\eta(3\tau)\eta(12\tau)} & \dfrac{\eta(2\tau)^2\eta(3\tau)\eta(12\tau)}{\eta(\tau)\eta(4\tau)\eta(6\tau)}
\end{array}$$

（２）三重積・五重積の公式から ζ の特殊化だけでは得られない２個

$$\frac{\eta(2\tau)^5\eta(3\tau)\eta(12\tau)}{\eta(\tau)^2\eta(4\tau)^2\eta(6\tau)^2} \quad \frac{\eta(\tau)\eta(4\tau)\eta(6\tau)^5}{\eta(2\tau)^2\eta(3\tau)^2\eta(12\tau)^2}$$

三重積・五重積の公式から ζ の特殊化だけでは得られない２個のエータ商の存在が気になるが、実は、これらは三重積・五重積の公式から q も適切に置換することで得られる[10]。具体的には、 q を $-q$ に（すなわち、 τ を $\tau+\dfrac{1}{2}$ に) 置き換えればよい。計算が煩雑なので簡単な例だけあげておくと、たとえば、

[8]筆者（青木）は、九州大学での講演の少し前まで、12 個しかないと信じていて、それを証明しようとして苦悶していた。しかし証明できないので、講演では予想として軽く触れるだけにしようと思っていたのだが、講演の数日前、たまたま書棚の本をめくっていると、14 個という衝撃の結果が書かれていることに気づいて驚愕した。

[9]ザギエ先生の本 [4] などによると、この定理は、彼の学生であったメルスマン氏が、修士のときに証明したようである。ただ、彼はその後民間企業に就職したため、この定理は一般に入手可能な論文としては出版されておらず、ザギエ先生の本に結果だけが述べられている。

[10]講演では、このことに気づかず「気になりますねぇ」で終わらせてしまいました。考察不足で申し訳ありません。

$$
\begin{aligned}
\eta\left(\tau+\frac{1}{2}\right) &= \prod_{m=1}^{\infty}(1-(-q)^m) = \prod_{m=1}^{\infty}\left(1-q^{2m}\right)\prod_{m=1}^{\infty}\left(1+q^{2m-1}\right) \\
&= \prod_{m=1}^{\infty}\left(1-q^{2m}\right)\prod_{m=1}^{\infty}\frac{\left(1-q^{4m-2}\right)}{\left(1-q^{2m-1}\right)} \\
&= \prod_{m=1}^{\infty}\left(1-q^{2m}\right)\prod_{m=1}^{\infty}\frac{\left(1-q^{2m}\right)}{\left(1-q^{4m}\right)}\prod_{m=1}^{\infty}\frac{\left(1-q^{2m}\right)}{\left(1-q^{m}\right)} = \frac{\eta(2\tau)^3}{\eta(\tau)\eta(4\tau)}
\end{aligned}
$$

という形で、 $\eta(\tau)$ と $\dfrac{\eta(2\tau)^3}{\eta(\tau)\eta(4\tau)}$ とが対応している。

同様に、以下の置き換えで最後の 2 個が得られることがわかる。

$$
\frac{\eta(\tau)^2\eta(6\tau)}{\eta(2\tau)\eta(3\tau)} \xrightarrow{\tau\mapsto\tau+\frac{1}{2}} \frac{\eta(2\tau)^5\eta(3\tau)\eta(12\tau)}{\eta(\tau)^2\eta(4\tau)^2\eta(6\tau)^2}
$$

$$
\frac{\eta(\tau)\eta(6\tau)^2}{\eta(2\tau)\eta(3\tau)} \xrightarrow{\tau\mapsto\tau+\frac{1}{2}} \frac{\eta(\tau)\eta(4\tau)\eta(6\tau)^5}{\eta(2\tau)^2\eta(3\tau)^2\eta(12\tau)^2}
$$

以上より、次の定理が得られた。

定理 10. 重み $\dfrac{1}{2}$ の、カスプも込めて正則なエータ商は、すべて、ヤコビの三重積公式かワトソンの五重積公式から変数を置き換えることで得られる。

5 さいごに

本稿を書いている時点では、筆者（青木）はまだメルスマン氏の論文を入手できておらず[11]、メルスマン氏が**定理 9.** をどのように証明したか、また、**定理 10.** に言及していたかどうかは確かめられていません。また、本稿は 1 変数の保型形式をテーマにしているため、彼の論文以外にも、過去の文献に何らかの類似の記述がある可能性も多いにあり得ると考えています。本稿の内容については、筆者の能力不足により、過去の文献の調査が不十分な報告であることをお詫びいたします。

最後の最後になりましたが、拙い内容であるにもかかわらず講演の機会を与えてくださいました、金子昌信先生をはじめとする研究集会の世話人の皆様方に感謝いたします。

[11] 九州大学での講演後、渡独したさいに、Skoruppa 先生とその周辺の人たちに聞いてまわりました。今でも Mersmann さんとコンタクトのある方が何名かおられたので、いずれ論文は入手できそうです。なお、本稿と類似の話題が、 Skoruppa 先生の周辺で、theta block という名称で研究されているようです。

参考文献

[1] R. E. Borcherds, Automorphic forms on $O_{s+2,2}(R)$ and infinite products, *Invent. Math.* **120**(1) (1995), 161–213.

[2] M. Eichler, D. Zagier, *The theory of Jacobi forms* (Birkhäuser, 1985).

[3] K. Saito, *Non-negativity of Fourier Coefficients of Eta-products*, Proceedings of the second spring conference on automorphic forms (Hamanako, 2003), 95–144, (2004).

[4] D. Zagier, *Elliptic Modular Forms and Their Applications*, The 1-2-3 of Modular forms, 1103, (Universitext, Springer, Berlin, 2008).