Borcherds product

青木 宏樹 (東京理科大学)

2011 年 9 月 7 日

1　はじめに

本稿は、サマースクールにおいて同一のタイトルで行った講演の内容を元に、若干の加筆修正を行ったものです。講演と同様、ボーチャーズによって発見された無限積を用いて保型形式を構成する方法について、煩雑な部分を避けてなるべく簡単に、しかしアイデアが伝わる形で概説することが、本稿の目標です。

と、最初から偉そうに書きましたが、本稿以外にもボーチャーズ無限積について解説が行われている日本語の文献は、少なくありません。総合的な解説としては [3, 6, 25] などがあり、また、とりあえずボーチャーズ無限積がどんなものか知りたいときには [22, 26] などが読み易いと思います。これらの文献と共に、本稿が、読者のみなさま、特に若い学生の人たちがボーチャーズ無限積を知る助けになればと思います。

2　保型形式

まず最初に、今後使う記号の準備を兼ねて、保型形式についての基本事項をまとめておく。

2.1　楕円モジュラー形式

複素上半平面を

$$\mathbb{H} := \{\tau \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}\tau > 0\}$$

２次の実特殊線形群を

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) := \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(2,\mathbb{R}) \;\middle|\; ad - bc = 1 \right\}$$

と書くことにする。群 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ の $\mathbb{H}$ への（左からの）作用

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathbb{H} \ni (M,\tau) \longmapsto M\langle\tau\rangle \in \mathbb{H}$$

を

$$M\langle\tau\rangle := \frac{a\tau+b}{c\tau+d} \qquad \left(M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \right)$$

で定める。すなわち、この写像（１次分数変換）は、２条件

- $\forall\tau\in\mathbb{H},\ E_2\langle\tau\rangle = \tau$
- $\forall M, M' \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}),\ \forall\tau\in\mathbb{H},\ M\langle M'\langle\tau\rangle\rangle = (MM')\langle\tau\rangle$

をみたす。ここで、 E_2 は２次の単位行列である。この作用は忠実ではない、すなわち $(-E_2)\langle\tau\rangle = \tau$ であることを注意しておく。

複素上半平面で定義された正則関数全体のなす集合を $\mathrm{Hol}(\mathbb{H})$ と書くことにする。整数 $k\in\mathbb{Z}$ に応じて定まる、群 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ の $\mathrm{Hol}(\mathbb{H})$ への（右からの）作用

$$\mathrm{Hol}(\mathbb{H}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \ni (f,M) \longmapsto f|_k M \in \mathrm{Hol}(\mathbb{H})$$

を

$$(f|_k M)(\tau) := (c\tau+d)^{-k} f(M\langle\tau\rangle) \qquad \left(M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \right)$$

で定める。すなわち、この写像は、２条件

- $\forall f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{H}),\ f|_k E_2 = f$
- $\forall M, M' \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}),\ \forall f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{H}),\ (f|_k M)|_k M' = f|_k (MM')$

をみたす。この作用は k が奇数のときに限って忠実である。

本稿では、楕円モジュラー形式として、$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ の離散部分群が $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) := \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})\cap\mathrm{M}(2,\mathbb{Z})$ のときだけを扱う。複素上半平面上の正則関数 $f\in\mathrm{Hol}(\mathbb{H})$ が重み k の保型性を持つとは条件

$$\forall M \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}),\ f|_k M = f$$

が成り立つことである。このとき、 f は τ について周期 1 を持つので、フーリエ展開により

$$f(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_f(n) q^n$$

という形に書ける。ただし、ここでは $q := \mathbf{e}(\tau) := \exp(2\pi\sqrt{-1}\tau)$ とおいた。関数 $f\in\mathrm{Hol}(\mathbb{H})$ が重み k の楕円モジュラー形式であるとは、 f が次の２条件を満たすことである。

- f は重み k の保型性を持つ
- $n < 0$ なら $a_f(n) = 0$ （ f はカスプ付近で有界）

最後の条件のかわりに、より強い条件

- $n \leq 0$ なら $a_f(n) = 0$ （ f はカスプで消える）

を満たすとき、 f はカスプ形式であるという。また、最後の条件のかわりに、少し弱い条件

- ある定数 N が存在して $n < N$ であれば $a_f(n) = 0$

を満たすとき、 f はカスプを除いて正則な楕円モジュラー形式であるという。重み k の楕円モジュラー形式全体のなす $\mathbb{C}$-ベクトル空間を M_k、そのなかでカスプ形式全体のなす $\mathbb{C}$-ベクトル空間を $\mathrm{M}_k^{\mathrm{cusp}}$ と書くことにする。$-E_2 \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ を考えることにより、 k が奇数であれば $\mathrm{M}_k = \mathrm{M}_k^{\mathrm{cusp}} = \{0\}$ であることがすぐにわかる。

ここで、楕円モジュラー形式の例をいくつかあげておく。アイゼンシュタイン級数

$$e_k(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{(c,d)=1} \frac{1}{(c\tau + d)^k}$$

は、 k が 2 より大きい偶数のとき、収束して重み k の楕円モジュラー形式になる。（ k が奇数でも収束するが、 (c, d) と $(-c, -d)$ が相殺して 0 になるのでつまらない。）そのフーリエ展開は

$$e_k(\tau) = 1 + C_k \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n \in \mathrm{M}_k$$

で与えられる。ここで、 $\sigma_{k-1}(n)$ は n の約数の $k-1$ 乗和、すなわち

$$\sigma_{k-1}(n) := \sum_{0<d|n} d^{k-1}$$

であり、また、 C_k はベルヌーイ数 B_k をもちいて

$$C_k := -\frac{2k}{B_k}$$

とあらわされる定数である。具体的な数値は、たとえば

$$C_4 = 240, \quad C_6 = -504, \quad C_8 = 480, \quad C_{10} = -264, \quad C_{12} = \frac{65520}{691}, \quad \ldots$$

である。

また、別の例として、ラマヌジャンのデルタ関数

$$\Delta(\tau) := q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24} \in \mathrm{M}_{12}^{\mathrm{cusp}}$$

がある。この保型形式は、（カスプでは消えているが）上半平面 $\mathbb{H}$ 上に零点を持たない。実際、この $\Delta(\tau)$ が重み 12 の保型性を持つことの証明は、たとえば [5] などを参考にされたい。

ここで、後に利用するため、楕円モジュラー形式に関する次の命題を証明しておく。

命題 1. f を、重み 2 のカスプを除いて正則な楕円モジュラー形式とする。このとき、 f のフーリエ展開

$$f(\tau) = \sum_{n=N}^{\infty} a_f(n) q^n$$

の定数項 $a_f(0)$ は 0 である。

Proof. $\rho := \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $i := \sqrt{-1}$ とすると、f のフーリエ展開の定数項は

$$a_f(0) = \int_{\rho}^{1+\rho} f(\tau) d\tau$$

と書ける。ただし、積分路は、原点を中心とする単位円周上 ρ から始まり i を経由して $1+\rho$ で終わるものとする。この積分路を i を境に 2 つにわけると、 f は重み 2 であったので、変数変換 $\tau \mapsto -\frac{1}{\tau}$ によって前半と後半は打ち消しあい、$a_f(0) = 0$ が得られる。 □

なお、この証明は離散部分群が $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ （フルモジュラー）であることを用いている。そのため、離散部分群がフルモジュラーでない場合に本稿と同じことを試みた場合、この命題は、障害となりうる部分のひとつである。

さて、楕円モジュラー形式がどの程度あるかについては、次の結果がよく知られている。

定理 2. 重み k が負あるいは奇数の楕円モジュラー形式は 0 しかない。また、重み 0 の楕円モジュラー形式は定数である。重み k が非負の偶数のとき、任意の楕円モジュラー形式 $f \in \mathrm{M}_k$ は、2 つの代数的に独立な楕円モジュラー形式 e_4, e_6 をもちいて

$$f(\tau) = \sum_{4a+6b=k} c_{a,b}\, e_4(\tau)^a e_6(\tau)^b \qquad (c_{a,b} \in \mathbb{C})$$

と一意的に書き表すことができる。すなわち、楕円モジュラー形式のなす次数付き環 $\mathrm{M}_{\mathbb{Z}}$ の構造は次のとおりである。

$$\mathrm{M}_{\mathbb{Z}} := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathrm{M}_k = \mathbb{C}[e_4, e_6]$$

実際、

$$\Delta(\tau) = \frac{e_4(\tau)^3 - e_6(\tau)^2}{1728}$$

が成り立つ。また、

$$\mathrm{M}_k \ni f \overset{\sim}{\longmapsto} \Delta \cdot f \in \mathrm{M}_{k+12}^{\mathrm{cusp}}$$

はベクトル空間の同型写像である。

楕円モジュラー形式は、保型形式のなかで最も基本的なものであり、また、数論と密接に関係している。ここで述べたことの詳細や、より進んだ内容については、保型形式の教科書、たとえば [13, 31] などを参考にされたい。

2.2 ジーゲル保型形式

自然数 g に対して定義される集合

$$\mathbb{H}_g := \{Z \in \mathrm{M}(g, \mathbb{C}) \mid Z = {}^tZ,\ \mathrm{Im}\, Z > 0\}$$

を g 次のジーゲル上半空間という。ここで、 $\mathrm{Im}\, Z > 0$ は、行列 Z の虚部が正定値であるという意味である。

$$\mathrm{Sp}(g, \mathbb{R}) := \left\{ M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(2g, \mathbb{R}) \;\middle|\; {}^tMJ_gM = J_g := \begin{pmatrix} O_g & -E_g \\ E_g & O_g \end{pmatrix} \right\}$$

を g 次のシンプレクティック群という。ただし、 O_g は g 次の零行列、 E_g は g 次の単位行列をあらわすものとする。群 $\mathrm{Sp}(g, \mathbb{R})$ の $\mathbb{H}_g$ への（左からの）作用

$$\mathrm{Sp}(g, \mathbb{R}) \times \mathbb{H}_g \ni (M, Z) \longmapsto M\langle Z \rangle \in \mathbb{H}_g$$

を

$$M\langle Z \rangle := (AZ + B)(CZ + D)^{-1} \qquad \left(M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(g, \mathbb{R}) \right)$$

で定める。この作用は忠実ではない、すなわち $(-E_{2g})\langle Z \rangle = Z$ であることを注意しておく。

ジーゲル上半空間 $\mathbb{H}_g$ で定義された正則関数全体のなす集合を $\mathrm{Hol}(\mathbb{H}_g)$ と書くことにする。整数 $k \in \mathbb{Z}$ に応じて定まる、群 $\mathrm{Sp}(g, \mathbb{R})$ の $\mathrm{Hol}(\mathbb{H}_g)$ への（右からの）作用

$$\mathrm{Hol}(\mathbb{H}_g) \times \mathrm{Sp}(g, \mathbb{R}) \ni (F, M) \longmapsto F|_kM \in \mathrm{Hol}(\mathbb{H}_g)$$

を

$$(F|_kM)(Z) := \det(CZ + D)^{-k} F(M\langle Z \rangle) \qquad \left(M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(g, \mathbb{R}) \right)$$

で定める。この作用は kg が奇数のときに限って忠実である。なお、 $g=1$ のとき、 $\mathbb{H}_1=\mathbb{H}$ かつ $\mathrm{Sp}(1,\mathbb{R})=\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ であるので、この節の内容は、前節の内容をより一般化したものである。

本稿では、ジーゲル保型形式として、$\mathrm{Sp}(g,\mathbb{R})$ の離散部分群が $\mathrm{Sp}(g,\mathbb{Z}):=\mathrm{Sp}(g,\mathbb{R})\cap\mathrm{M}(2g,\mathbb{Z})$ のときだけ（さらに、 $g=2$ の場合だけ）を扱う。正則関数 $F\in\mathrm{Hol}(\mathbb{H}_g)$ が（g 次の）重み k のジーゲル保型形式であるとは、

$$\forall M\in\mathrm{Sp}(g,\mathbb{Z}),\ F|_kM=F$$

が成り立つことである。ただし、 $g=1$ のときには、この条件に加え、前節で述べたフーリエ展開についての条件も成り立つこととする。いずれにせよ、F がジーゲル保型形式であれば、 F は Z の各成分について周期 1 を持つので、フーリエ展開により

$$F(Z)=\sum_{T={}^tT}a_F(T)\mathbf{e}(\mathrm{tr}(TZ))$$

という形に書ける。ここで、 T は g 次の対称行列で、各成分が半整数、さらに対角成分は整数のもの全体をわたる。楕円モジュラー形式のときとは違って、 $g\geq 2$ では、カスプ付近で有界であるという条件は、保型性から導かれる。すなわち、次の定理が成り立つ。

定理 3. （ケヒャーの主張） g を 2 以上の自然数とし、 F を重み k のジーゲル保型形式であるとする。このとき、 F はカスプ付近で有界である。すなわち、 F のフーリエ展開

$$F(Z)=\sum_{T={}^tT}a_F(T)\mathbf{e}(\mathrm{tr}(TZ))$$

において、 $T\geq 0$ でなければ $a_F(T)=0$ である。ただし、 $T\geq 0$ は T が半正値であるという意味である。

ケヒャーの主張よりより強く、

- $T>0$ でなければ $a_F(T)=0$ （ F はカスプで消える）

を満たすとき、 F はカスプ形式であるという。$-E_{2g}\in\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z})$ を考えることにより、 kg が奇数のときには、ジーゲル保型形式は 0 しかないことがすぐにわかる。

本稿で扱う Borcherds 無限積は、 $g=2$ での話題である。そこで、これ以降、本稿では $g=2$ に限定して話を進めることにする。そこで、 $g=2$ のとき、重み k のジーゲル保型形式全体のなす $\mathbb{C}$-ベクトル空間を $\mathbb{M}_k$、そのなか

でカスプ形式全体のなす $\mathbb{C}$-ベクトル空間を $\mathbb{M}_k^{\mathrm{cusp}}$ と書くことにする。また、定義においては $\mathbb{H}_2$ の元 Z は２次の行列であるが、便宜上、

$$Z = \begin{pmatrix} \tau & z \\ z & \omega \end{pmatrix}$$

とおき、必要に応じて $F(Z)$ のかわりに $F(\tau, z, \omega)$ と書くことにする。この表記では、ケヒャーの主張は次のように書ける。

定理 4. （ケヒャーの主張） $F \in \mathbb{M}_k$ とする。このとき、 F はカスプ付近で有界である。すなわち、 F のフーリエ展開

$$F(Z) = \sum_{n,l,m \in \mathbb{Z}} c(n,l,m)\, \mathbf{e}(n\tau + lz + m\omega)$$

において、「 $4nm - l^2 \geq 0$ かつ $n \geq 0$ 」でなければ $c(n,l,m) = 0$ である。

２次のジーゲル保型形式がどの程度あるかという問題は、1960 年代に解決されている。([24])

定理 5. （井草の定理）重み k が負のジーゲル保型形式は 0 しかない。また、重み 0 のジーゲル保型形式は定数である。重み k が非負の偶数のとき、任意のジーゲル保型形式 $F \in \mathbb{M}_k$ は、４つの代数的に独立なジーゲル保型形式 $E_4, E_6, \Delta_{10}, \Delta_{12}$ （それぞれの重みは順に $4, 6, 10, 12$ ）をもちいて

$$F(Z) = \sum_{4a+6b+10c+12d=k} c_{a,b,c,d} E_4(Z)^a E_6(Z)^b \Delta_{10}(Z)^c \Delta_{12}(Z)^d \qquad (c_{a,b,c,d} \in \mathbb{C})$$

と一意的に書き表すことができる。また、重み 35 の 0 ではないジーゲル保型形式 Δ_{35} が存在し、重み k が奇数のジーゲル保型形式は、重み $k-35$ のジーゲル保型形式と Δ_{35} との積になっている。すなわち、ジーゲル保型形式のなす次数付き環 $\mathbb{M}_{\mathbb{Z}}$ の構造は次のとおりである。

$$\mathbb{M}_{2\mathbb{Z}} := \bigoplus_{k \in 2\mathbb{Z}} \mathbb{M}_k = \mathbb{C}[E_4, E_6, \Delta_{10}, \Delta_{12}]$$

$$\mathbb{M}_{\mathbb{Z}} := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{M}_k = \mathbb{M}_{2\mathbb{Z}} \oplus \Delta_{35}\mathbb{M}_{2\mathbb{Z}}$$

ここで述べたことの詳細や、より進んだ内容については、たとえば [13, 16, 27] などを参考にされたい。

2.3　ヤコビ形式

大雑把にいえば、ヤコビ形式というのは、ジーゲル保型形式（やその他の多変数の保型形式）をある特定の変数でフーリエ展開したとき、その係数にあらわれる残りの変数についての関数、あるいは、それと同等の変換規則をみたす関数で、後述するような保型性と周期性を持っているものである。最も基本的な例は、 2 次のジーゲル保型形式をフーリエ・ヤコビ展開したときにあらわれるものである。すなわち、 $F \in \mathbb{M}_k$ を

$$F(Z) = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m(\tau, z)\mathbf{e}(m\omega)$$

と展開すると、各 φ_m は指数 m のヤコビ形式になっている。本稿では、この最も基本的なタイプのヤコビ形式、すなわち、 2 変数のヤコビ形式に限って話を進めることにする。

整数 $m \in \mathbb{Z}$ に対し、写像 $i_m : \mathrm{Hol}(\mathbb{H} \times \mathbb{C}) \to \mathrm{Hol}(\mathbb{H}_2)$ を $(i_m\varphi)(Z) := \varphi(\tau, z)\mathbf{e}(m\omega)$ で定め、

$$\mathrm{Sp}(2, \mathbb{R})^J := \{M \in \mathrm{Sp}(2, \mathbb{R}) \mid \forall\varphi,\ \exists\psi \text{ s.t. } (i_1\varphi)|_0 M = i_1\psi\}$$

とおく。この $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{R})^J$ を $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{R})$ のヤコビ部分群という。このとき、 $M \in \mathrm{Sp}(2, \mathbb{R})^J$ は、性質

$$\forall m \in \mathbb{Z},\ \forall k \in \mathbb{Z},\ \forall\varphi,\ \exists\psi \text{ s.t. } (i_m\varphi)|_k M = i_m\psi$$

をみたす。この ψ を $\varphi|_{k,m}M$ と書くことにする。この対応は、整数 $k, m \in \mathbb{Z}$ を固定するごとに、群 $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{R})^J$ の $\mathrm{Hol}(\mathbb{H} \times \mathbb{C})$ への（右からの）作用を定めている。

ヤコビ形式を定義する前に、ヤコビ部分群 $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{R})^J$ について少々述べておく。まず最初に、ヤコビ部分群の元をいくつかあげておく。

$$T(u) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & u \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (\ u \in \mathbb{R}\ )$$

$$C(a, b, c, d) := \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (\ a, b, c, d \in \mathbb{R},\ ad - bc = 1\ )$$

$$U(x, y) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & y \\ x & 1 & y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (\ x, y \in \mathbb{R}\ )$$

これら３種類の元の $\mathrm{Hol}(\mathbb{H}\times\mathbb{C})$ への作用は以下のとおりである。

$$
\begin{aligned}
\left(\varphi|_{k,m}T(u)\right)(\tau,z) =& \mathbf{e}(mu)\varphi(\tau,z)\\
\left(\varphi|_{k,m}C(a,b,c,d)\right)(\tau,z) =& (c\tau+d)^{-k}\mathbf{e}\left(\frac{-mcz^2}{c\tau+d}\right)\varphi\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{z}{c\tau+d}\right)\\
\left(\varphi|_{k,m}U(x,y)\right)(\tau,z) =& \mathbf{e}\left(m(x^2\tau+2xz+xy)\right)\varphi(\tau,z+x\tau+y)
\end{aligned}
$$

このとき、次の命題が成り立つ。

命題 6. $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})^J$ の任意の元は、実数 $a,b,c,x,y,u\in\mathbb{R}$ をもちいて $C(a,b,c)U(x,y)T(u)$ の形に一意的に書ける。

また、

$$
S:=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}
$$

とおくと（ S は $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})^J$ の元ではない)、次の命題が成り立つ。

命題 7. $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$ は $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})^J$ と S で生成される。

この S の $\mathrm{Hol}(\mathbb{H}_2)$ への作用は

$$
\left(F|_kS\right)(\tau,z,\omega)=(-1)^{-k}F(\omega,z,\tau)
$$

である。

本稿では、ヤコビ形式として、離散部分群が $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z})^J:=\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})^J\cap\mathrm{M}(4,\mathbb{Z})$ のときだけを扱う。この離散部分群に対しても、先の２つの命題と類似の命題が成り立つ。

命題 8. $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z})^J$ の任意の元は、整数 $a,b,c,x,y,u\in\mathbb{Z}$ をもちいて $C(a,b,c)U(x,y)T(u)$ の形に一意的に書ける。

命題 9. $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z})$ は $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z})^J$ と S で生成される。

正則関数 $\varphi\in\mathrm{Hol}(\mathbb{H}\times\mathbb{C})$ が重み k 指数 m の（ヤコビ形式の）保型性を持つとは条件

$$
\forall M\in\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z})^J,\ \varphi|_{k,m}M=\varphi
$$

が成り立つことである。いいかえれば、次の 2 条件が成り立つことである。

$$\begin{aligned}\varphi(\tau,z) =&(c\tau+d)^{-k}\mathbf{e}\left(\frac{-mcz^2}{c\tau+d}\right)\varphi\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{z}{c\tau+d}\right)\quad\left(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\right)\\ \varphi(\tau,z) =&\mathbf{e}\left(m(x^2\tau+2xz)\right)\varphi(\tau,z+x\tau+y)\quad(\ x,y\in\mathbb{Z}\ )\end{aligned}$$

（ヤコビ形式の）保型性を持つ正則関数については、次の命題が成り立つので、実質的には $m\geq 0$ のときだけを考えればよい。

命題 10. 正則関数 $\varphi\in\mathrm{Hol}(\mathbb{H}\times\mathbb{C})$ は重み k 指数 m の（ヤコビ形式の）保型性を持つとする。このとき、次のことが成り立つ。

- $m<0$ であれば、 $\varphi=0$ である。
- $m=0$ であれば、 φ は τ だけの関数とみなせる。（ z については定数関数である。）

Proof. 変数 τ を固定し、 φ を z の関数と考えて、周期平行四辺形内の零点の個数を勘定すると、上記の変換規則から

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{\varphi_z(\tau,z)}{\varphi(\tau,z)}dz=2m$$

となるので、 $m\geq 0$ である。とくに $m=0$ なら φ は z について零点をもたないか恒等的に 0 であるかのどちらかであり、いずれにせよ z について定数関数である。 □

そこで、 $m\geq 0$ とし、正則関数 $\varphi\in\mathrm{Hol}(\mathbb{H}\times\mathbb{C})$ は重み k 指数 m の（ヤコビ形式の）保型性を持つとする。このとき、 φ は τ,z の両変数について周期 1 を持つので、フーリエ展開により

$$\varphi(\tau,z)=\sum_{n,l\in\mathbb{Z}}c(n,l)q^n\zeta^l$$

という形に書ける。ただし、ここでは $q:=\mathbf{e}(\tau)$, $\zeta:=\mathbf{e}(z)$ とおいた。なお、$m>0$ のときには $c(n,l)$ は $4nm-l^2$ と $l \mod 2m$ の値のみで定まり、さらに $c(n,l)=(-1)^kc(n,-l)$ である。また、 $m=0$ のときには $l=0$ のときを除いて $c(n,l)=0$ である。

さて、関数 $\varphi\in\mathrm{Hol}(\mathbb{H}\times\mathbb{C})$ が重み k 指数 m のヤコビ形式であるとは、φ が次の 2 条件を満たすことである。

- φ は重み k 指数 m の（ヤコビ形式の）保型性を持つ。
- $4nm-l^2<0$ なら $c(n,l)=0$

最後の条件のかわりに、より強い条件

- $4nm - l^2 \leq 0$ なら $c(n,l) = 0$

を満たすとき、 φ はカスプ形式であるという。また、最後の条件のかわりに、少し弱い条件

- $n < 0$ なら $c(n,l) = 0$

を満たすとき、 φ は弱ヤコビ形式であるといい、さらに弱い条件

- ある定数 N が存在して $n < N$ であれば $c(n,l) = 0$

を満たすとき、 φ は弱正則ヤコビ形式であるという。

なお、 $m = 0$ のときには、重み k 指数 0 の（ヤコビ形式の）保型性を持つ $\varphi(\tau, z)$ は z について定数関数であり、 τ の関数として重み k の保型性を持つ。したがって、重み k 指数 0 のヤコビ形式とは、重み k の楕円モジュラー形式のことである。しかし、定義より、重み k 指数 0 のカスプ形式は 0 しかなく、楕円モジュラー形式の重み k のカスプ形式とは違うことに注意されたい。また、 $m = 0$ では、ヤコビ形式と弱ヤコビ形式はまったく同じものになる。

重み k 指数 m のヤコビ形式全体のなす $\mathbb{C}$-ベクトル空間を $\mathbb{J}_{k,m}$、そのなかでカスプ形式全体のなす $\mathbb{C}$-ベクトル空間を $\mathbb{J}_{k,m}^{\mathrm{cusp}}$ と書くことにする。また、重み k 指数 m の弱ヤコビ形式全体のなす $\mathbb{C}$-ベクトル空間を $\mathbb{J}_{k,m}^{\mathrm{weak}}$ 、弱正則ヤコビ形式全体のなす $\mathbb{C}$-ベクトル空間を $\mathbb{J}_{k,m}^{\mathrm{wh}}$ と書くことにする。定義より明らかに $\mathbb{J}_{k,m}^{\mathrm{cusp}} \subset \mathbb{J}_{k,m} \subset \mathbb{J}_{k,m}^{\mathrm{weak}} \subset \mathbb{J}_{k,m}^{\mathrm{wh}}$ である。

ここで、ヤコビ形式の例をいくつかあげておく。

$$\varphi_{-2,1}(\tau, z) := \left(\zeta - 2 + \zeta^{-1}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - q^n \zeta\right)^2 \left(1 - q^n\right)^{-4} \left(1 - q^n \zeta^{-1}\right)^2 \in \mathbb{J}_{-2,1}^{\mathrm{weak}}$$

$$\varphi_{-1,2}(\tau, z) := \left(\zeta - \zeta^{-1}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - q^n \zeta^2\right) \left(1 - q^n\right)^{-2} \left(1 - q^n \zeta^{-2}\right) \in \mathbb{J}_{-1,2}^{\mathrm{weak}}$$

は、それぞれ、重み -2 指数 1 および重み -1 指数 2 の弱ヤコビ形式である。特に

$$\varphi_{10,1} := \Delta(\tau) \varphi_{-2,1}(\tau, z) \in \mathbb{J}_{10,1}^{\mathrm{cusp}}$$

は、重み 10 指数 1 のカスプ形式である。

また、ワイエルシュトラスのペー関数

$$\begin{aligned}\wp(\tau, z) :=& \frac{1}{z^2} + \sum_{w \in (\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau) \setminus \{0\}} \left\{ \frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right\} \\ =& \frac{1}{z^2} + 2 \sum_{k=2}^{\infty} (2k-1) e_{2k}(\tau) z^{2k-2}\end{aligned}$$

は、 $z=\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau$ に 2 位の極を持つ有理型関数であるが、重み 2 指数 0 の（ヤコビ形式の）保型性を持つ。さらに

$$\frac{12\wp(\tau,z)}{\left(2\pi\sqrt{-1}\right)^2}=\frac{\zeta+10+\zeta^{-1}}{\zeta-2+\zeta^{-1}}+12\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{a|n}a\left(\zeta^a-2+\zeta^{-a}\right)\right)q^n$$

であることから、

$$\varphi_{0,1}:=\frac{12\wp(\tau,z)\varphi_{-2,1}(\tau,z)}{\left(2\pi\sqrt{-1}\right)^2}\in\mathbb{J}_{0,1}^{\mathrm{weak}}$$

は、重み 0 指数 1 の弱ヤコビ形式である。

ヤコビ形式がどの程度あるかという問題は、弱ヤコビ形式については、次に述べるような定理がある。しかし、ヤコビ形式全体のなす次数付き環は、楕円モジュラー形式全体のなす次数付き環に対して有限生成ではないことが知られており、記述するのは少々面倒である。

定理 11. 指数 m が負の弱ヤコビ形式は 0 しかない。また、指数 m で重みが $-2m$ 以下の弱ヤコビ形式も 0 しかない。重み k が偶数のとき、弱ヤコビ形式 $\varphi\in\mathbb{J}_{k,m}^{weak}$ は、4 つの代数的に独立な弱ヤコビ形式 $e_4,e_6,\varphi_{-2,1},\varphi_{0,1}$ （それぞれの重みは順に $4,6,-2,0$、指数は順に $0,0,1,1$ ）をもちいて

$$\varphi(\tau,z)=\sum_{4a+6b-2c=k,\ c+d=m}c_{a,b,c,d}e_4(\tau)^a e_6(\tau)^b\varphi_{-2,1}(\tau,z)^c\varphi_{0,1}(\tau,z)^d\qquad(c_{a,b,c,d}\in\mathbb{C})$$

と一意的に書き表すことができる。また、重み k が奇数の弱ヤコビ形式は、重み $k+1$ のヤコビ形式と $\varphi_{-1,2}$ との積になっている。すなわち、弱ヤコビ形式の環の構造は次のとおりである。

$$\mathbb{J}_{2\mathbb{Z},\mathbb{Z}}^{weak}:=\bigoplus_{k\in2\mathbb{Z},\ m\in\mathbb{Z}}\mathbb{J}_{k,m}^{weak}=\mathrm{M}_{\mathbb{Z}}[\varphi_{-2,1},\varphi_{0,1}]=\mathbb{C}[e_4,e_6,\varphi_{-2,1},\varphi_{0,1}]$$

$$\mathbb{J}_{\mathbb{Z},\mathbb{Z}}^{weak}\bigoplus_{k\in\mathbb{Z},\ m\in\mathbb{Z}}\mathbb{J}_{k}^{weak}=\mathbb{J}_{2\mathbb{Z},\mathbb{Z}}^{weak}\oplus\varphi_{-1,2}\mathbb{J}_{2\mathbb{Z},\mathbb{Z}}^{weak}$$

ここで述べたことの詳細や、より進んだ内容については、ヤコビ形式の教科書（[15]）などを参考にされたい。

3　ボーチャーズのアイデア

1990 年代半ば、ボーチャーズの一連の仕事により、ムーンシャイン予想が解決された。このなかで、彼は、無限積による保型形式の構成法（ボーチャー

ズ無限積）を与えている。ここでは、証明の細部には立ち入らずに、彼のアイデアを紹介したい。

3.1 マースリフト

まず最初に、マースリフト（齋藤・黒川リフト）について復習しておく。マースリフトは、指数 1 のヤコビ形式から、2 次のジーゲル保型形式を作る方法であった。

命題 12. $t \in \mathbb{N}$ とする。 $\varphi \in \mathbb{J}_{k,m}$ のとき

$$\left(\varphi|_{k,m}V(t)\right)(\tau,z) := t^{k-1}\sum_{ad=t,\ a>0}\sum_{b=0}^{d-1} d^{-k}\varphi\left(\frac{a\tau+b}{d}, az\right) \in \mathbb{J}_{k,mt}$$

である。特に $\varphi \in \mathbb{J}_{k,m}^{cusp}$ なら $\varphi|_{k,m}V(t) \in \mathbb{J}_{k,mt}^{cusp}$ である。

定理 13. （マースリフト） k を偶数とする。$\varphi \in \mathbb{J}_{k,1}^{cusp}$ のとき

$$\left(\mathrm{ML}(\varphi)\right)(Z) := \sum_{m=1}^{\infty}\left(\varphi|_{k,1}V(m)\right)(\tau,z)p^m \in \mathbb{M}_k^{cusp}$$

である。ただし、ここでは $p := \mathbf{e}(\omega)$ とおいた。

たとえば、

$$\begin{aligned}
\mathrm{ML}(\varphi_{10,1}) =& \Delta_{10} \qquad (\varphi_{10,1}(\tau,z) := \Delta(\tau)\varphi_{-2,1}(\tau,z) \in \mathbb{J}_{10,1}^{\mathrm{cusp}}) \\
\mathrm{ML}(\varphi_{12,1}) =& \Delta_{12} \qquad (\varphi_{12,1}(\tau,z) := \Delta(\tau)\varphi_{0,1}(\tau,z) \in \mathbb{J}_{12,1}^{\mathrm{cusp}})
\end{aligned}$$

である。 E_4, E_6 も、カスプ形式ではないが、後述する修正をおこなえば、ヤコビ形式

$$\varphi_{4,1} := \frac{e_4(\tau)\varphi_{0,1}(\tau,z) - e_6(\tau)\varphi_{-2,1}(\tau,z)}{12} \in \mathbb{J}_{4,1}$$

および

$$\varphi_{6,1} := \frac{e_6(\tau)\varphi_{0,1}(\tau,z) - e_4(\tau)^2\varphi_{-2,1}(\tau,z)}{12} \in \mathbb{J}_{6,1}$$

からマースリストで構成できる。

さて、ここでは、命題 12 は認めて、定理 13 の保型性がどのようにして証明されたのかを復習しておく。 φ のフーリエ展開を

$$\varphi(\tau,z) = \sum_{n,l\in\mathbb{Z}} c(n,l)q^n\zeta^l \in \mathbb{J}_{k,1}^{\mathrm{cusp}}$$

とすると、

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{ML}(\varphi))(Z) &:= \sum_{m=1}^{\infty} (\varphi|_{k,1}V(m))(\tau,z)\mathbf{e}(m\omega) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} m^{k-1}\sum_{ad=m}\sum_{b=0}^{d-1} d^{-k}\varphi\left(\frac{a\tau+b}{d}, az\right)\mathbf{e}(m\omega) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} m^{k-1}\sum_{ad=m}\sum_{b=0}^{d-1} d^{-k}\sum_{n,l\in\mathbb{Z}} c(n,l)\mathbf{e}\left(n\frac{a\tau+b}{d} + alz + m\omega\right) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} m^{k-1}\sum_{ad=m} d^{-k+1}\sum_{n,l\in\mathbb{Z}} c(dn,l)\mathbf{e}(na\tau + alz + m\omega) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{ad=m} a^{k-1}\sum_{n,l\in\mathbb{Z}} c\left(\frac{nm}{a}, l\right)\mathbf{e}(na\tau + alz + m\omega) \\
&= \sum_{a=1}^{\infty}\sum_{n,l,m\in\mathbb{Z}} a^{k-1}c(nm,l)\mathbf{e}(na\tau + alz + am\omega) \\
&= \sum_{n,l,m\in\mathbb{Z}}\sum_{a|(n,l,m)} a^{k-1}c\left(\frac{nm}{a^2}, \frac{l}{a}\right)\mathbf{e}(n\tau + lz + m\omega)
\end{aligned}
$$

となるので、 $\mathrm{ML}(\varphi)$ は S で不変である。よって、命題 9 より $\mathrm{ML}(\varphi)$ は $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z})$ の作用で不変であり、重み k の保型形式であることが示される。

ここでは、カスプ形式についてのマースリフトを説明したが、カスプ形式でないヤコビ形式に対しては、$\varphi|_{k,1}V(0)$ として適当なアイゼンシュタイン級数を補うことによってマースリフトが定まる。では、弱ヤコビ形式や弱正則ヤコビ形式については、マースリフトはどうなるのであろうか。実際、ケヒャーの主張があるので、形式的な計算は同じようにできても、結果は正則関数にはならないはずである。ボーチャーズは、論文 [9] においてこの問題を考察し、弱正則ヤコビ形式 $\varphi \in \mathbb{J}_{k,1}^{\mathrm{wh}}$ に対してマースリフトがどのようになるかを調べた。そして、ある状況下では、$\varphi|_{k,1}V(0)$ としてワイエルシュトラスのペー関数を補うことによりマースリフトが定まり、保型形式の変換規則を満たす有理型関数が得られることを示している。

3.2 ボーチャーズのアイデア

彼のアイデアは、知ってしまえば、とても単純なものである。さきほどのマースリフトの計算において、 $k=0$ のときを考えよう。もちろん実際には $\mathbb{J}_{0,1}=\{0\}$ であるからマースリフトそのものは $\mathrm{ML}(0)=0$ という当たり前の結果しか与えない。が、とりあえずそのことには目をつぶって、形式的にフーリエ展開の計算をしてみることにする。

$$
\varphi(\tau,z) = \sum_{n,l\in\mathbb{Z}} c(n,l)q^n\zeta^l \in \mathbb{J}_{0,1}^{\mathrm{cusp}}
$$

とおくと、さきほどの計算により

$$\begin{aligned}
(\mathrm{ML}(\varphi))(Z) = &\quad \cdots\cdots\cdots \\
&= \sum_{a=1}^{\infty} \sum_{n,l,m\in\mathbb{Z}} a^{-1} c(nm,l) \mathbf{e}\left(na\tau + alz + am\omega\right) \\
&= \sum_{n,l,m\in\mathbb{Z}} c(nm,l) \sum_{a=1}^{\infty} a^{-1} \mathbf{e}\left(n\tau + lz + m\omega\right)^{a} \\
&= -\sum_{n,l,m\in\mathbb{Z}} c(nm,l) \log\left(1 - \mathbf{e}\left(n\tau + lz + m\omega\right)\right)
\end{aligned}$$

となる。すなわち

$$\exp(-\mathrm{ML}(\varphi)) = \prod_{n,l,m\in\mathbb{Z}} \left(1 - q^n \zeta^l p^m\right)^{c(nm,l)}$$

が得られる。もちろんこれは S で不変であるから、無限積

$$\prod_{n,l,m\in\mathbb{Z}} \left(1 - q^n \zeta^l p^m\right)^{c(nm,l)}$$

は重み 0 のジーゲル保型形式である。

もっとも、冷静に考えれば、 $\mathbb{J}_{0,1}^{\mathrm{cusp}} = \{0\}$ であるから、これは $\exp(0) = 1$ という自明なことしか言っていない。が、元の φ が弱ヤコビ形式、あるいは弱正則ヤコビ形式であれば、 φ は 0 とは限らないので、この無限積は結構複雑なものになるであろう。そのとき、この無限積は、何を意味しているのだろうか。ボーチャーズによる解答を述べる前に、まず、元の φ が弱ヤコビ形式、あるいは弱正則ヤコビ形式のときに、この計算がどこで破綻しているかをはっきりとさせておこう。

マースリフトにおいては、 φ はカスプ形式であるとしているので、そのフーリエ展開の係数 $c(n,l)$ は、 $n > 0$ のところにしか現れない。これが、マースリフトにおける和のとりかた $\sum_{m=1}^{\infty}$ とちょうどマッチして、 τ と ω の対称性、すなわち S-不変性がいえたのであった。これが、もし φ がカスプ形式でないヤコビ形式であれば、 $n = 0$ にもフーリエ展開の係数があらわれるので、 $\varphi|_{k,1}V(0)$ を補わねばならない。さらに、 φ がヤコビ形式ではなく弱正則ヤコビ形式であれば、 $n < 0$ にもフーリエ係数があらわれるので、もし S-不変性を得たいのであれば、さらなる修正が必要となってくる。

では、ボーチャーズのアイデア、すなわち、無限積 $\exp(-\mathrm{ML}(\varphi))$ における修正の様子を、具体例を通してみてみよう。

$$\varphi(\tau,z) := 2\varphi_{0,1}(\tau,z) \in \mathbb{J}_{0,-1}^{\mathrm{weak}}$$

のときを考える。そのフーリエ展開を

$$\begin{aligned}\varphi(\tau,z) &= \sum_{n,l\in\mathbb{Z}} c(n,l)q^n\zeta^l \\ &= \left(2\zeta+20+2\zeta^{-1}\right) \\ &\quad + \left(20\zeta^2-128\zeta+216-128\zeta^{-1}+20\zeta^{-2}\right)q \\ &\qquad + \cdots\end{aligned}$$

とおき、

$$\mathrm{BP}(\varphi)(Z) := q\zeta^{-1}p \prod_{(n,l,m)>0} \left(1-q^n\zeta^l p^m\right)^{c(nm,l)}$$

と定める。ここで、無限積部分の $(n,l,m)>0$ は

「$m\in\mathbb{N},\ n,l\in\mathbb{Z}$」または「$m=0,\ n\in\mathbb{N},\ l\in\mathbb{Z}$」または「$m=n=0,\ l\in\mathbb{N}$」

を意味するものとする。この無限積のうち、 $m\geq 1$ の部分は $\exp(-\mathrm{ML}(\varphi))$ であるから、修正として追加された部分は

$$\begin{aligned}&q\zeta^{-1}p\prod_{n,l}\left(1-q^n\zeta^l\right)^{c(0,l)} \\ =&q\left(\zeta-2+\zeta^{-1}\right)p\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^n\zeta\right)^2\left(1-q^n\right)^{20}\left(1-q^n\zeta^{-1}\right)^2 \\ =&\Delta(\tau)\varphi_{-2,1}(\tau,z)p\end{aligned}$$

である。これは、追加部分が、重さ 10 指数 1 のヤコビ形式に対応していることを示している。さらに、

$$\mathrm{BP}(\varphi)(Z) := q\left(\zeta-2+\zeta^{-1}\right)p\prod_{n,m\geq 0}\prod_{l\in\mathbb{Z}}\left(1-q^n\zeta^l p^m\right)^{c(nm,l)}$$

であるから、 $\mathrm{BP}(\varphi)$ は S-不変である。以上より、(何らかの方法で $\mathrm{BP}(\varphi)$ が $\mathbb{H}_2$ 上の正則関数であることがいえれば) $\mathrm{BP}(\varphi)$ は重さ 10 のジーゲル保型形式、すなわち Δ_{10} であることがわかる。これで、「無限積＝無限和」の形をした等式

$$\mathrm{ML}(\varphi_{10,1}) = \mathrm{BP}(2\varphi_{0,1}) \quad (=\Delta_{10})$$

が示された。これは、ボーチャーズがムーンシャイン予想を解決する過程で使われた（ものを一般化して定式化した）BKMリー環の分母公式の一例である。また、 Δ_{35} も Δ_{10} と同様の方法で無限積表示を持つことがわかる。

3.3 無限積によるジーゲル保型形式の構成

前節では $\varphi=2\varphi_{0,1}$ とおいたが、本節では、一般の $\varphi\in\mathbb{J}_{k,0}^{\mathrm{wh}}$ について前節と同様のことを考察する。すなわち、

$$\varphi(\tau,z) = \sum_{n,l\in\mathbb{Z}} c(n,l)q^n\zeta^l \in \mathbb{J}_{k,0}^{\mathrm{wh}}$$

とおき、

$$\mathrm{BP}(\varphi)(Z) := q^a \zeta^{-b} p^c \prod_{(n,l,m)>0} \left(1 - q^n \zeta^l p^m\right)^{c(nm,l)}$$

と定める。ここで、 $(n,l,m) > 0$ の意味は前節と同じであり、また、

$$a := \frac{1}{24} \sum_{l \in \mathbb{Z}} c(0,l), \qquad b := \frac{1}{2} \sum_{l>0} c(0,l)l, \qquad c := \frac{1}{2} \sum_{l>0} c(0,l)l^2$$

とおいた。前節と同様の計算により、この無限積のうち $m \geq 1$ の部分は $\exp(-\mathrm{ML}(\varphi))$ であるから、修正として追加された部分は

$$q^a \zeta^{-b} p^c \prod_{(n,l)>0} \left(1 - q^n \zeta^l\right)^{c(0,l)}$$

である。なお、 $(n,l) > 0$ は

「$n \in \mathbb{N},\ l \in \mathbb{Z}$」または「$n = 0,\ l \in \mathbb{N}$」

を意味するものとする。このとき、次の命題が成り立つ。

命題 14. $a, b \in \mathbb{Z}$ かつ $\frac{1}{2}c(0,0) \in \mathbb{Z}$ のとき

$$q^a \zeta^{-b} \prod_{(n,l)>0} \left(1 - q^n \zeta^l\right)^{c(0,l)}$$

は、重み $\frac{1}{2}c(0,0)$ 指数 c の（ヤコビ形式の）保型性を持つ。

Proof. 頑張って計算すればよい。 □

これで $\mathrm{BP}(\varphi)$ が $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z})^J$ についての保型性を持つことがわかった。次に $\mathrm{BP}(\varphi)$ が S-不変であることを示したいのだが、そのためには、ひとつ補題を準備しておく必要がある。

補題 15. 次の等式が成り立つ。

$$a - c - \sum_{n>0,\ m<0,\ l \in \mathbb{Z}} nc(nm,l) = 0$$

Proof. まず、

$$\sum_{n>0,\ m<0,\ l \in \mathbb{Z}} nc(nm,l) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sigma_1(n) c(-n,l)$$

と

$$\frac{\Delta'(\tau)}{24(2\pi\sqrt{-1})\Delta(\tau)} = \frac{1}{24} - \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) q^n$$

より、 $a - \sum_{n>0,\, m<0,\, l\in\mathbb{Z}} nc(nm,l)$ は

$$\frac{\Delta'(\tau)\varphi(\tau,0)}{24(2\pi\sqrt{-1})\Delta(\tau)}$$

の（ τ での）フーリエ展開の定数項であることがわかる。一方、 c は

$$\frac{\varphi_{zz}(\tau,0)}{4(2\pi\sqrt{-1})^2}$$

のフーリエ展開の定数項である。したがって、示すべきことは

$$\frac{\Delta'(\tau)\varphi(\tau,0)}{24(2\pi\sqrt{-1})\Delta(\tau)} - \frac{\varphi_{zz}(\tau,0)}{4(2\pi\sqrt{-1})^2}$$

のフーリエ展開の定数項が 0 になることである。実際、計算により、この関数は重み 2 のカスプを除いて正則な保型形式であることがわかるので、命題 1 により、フーリエ展開の定数項は 0 である。 □

これで、次の定理を示すことができる。

命題 16. 条件

$$\frac{1}{2}\sum_{n>0,\, m<0,\, l\in\mathbb{Z}} c(nm,l) \in \mathbb{Z}$$

が成り立てば、 $\mathrm{BP}(\varphi)$ は S-不変である。

Proof. 頑張って計算すればよい。 □

以上より、（何らかの方法で $\mathrm{BP}(\varphi)$ が $\mathbb{H}_2$ 上の正則関数であることがいえれば） $\mathrm{BP}(\varphi)$ は重さ $\frac{1}{2}c(0,0)$ のジーゲル保型形式であることがわかる。なお、命題 14 および 命題 16 における整数条件は、保型性を示す上で 1 の冪根が出てこないようにするためのものである。したがって、指標付きの保型形式で考えれば、これらの条件はほぼ無視できる。一方で、補題 15 は S-不変性を示すうえで本質的であることを注意しておく。

以上が、無限積を用いて保型形式を構成するという Borcherds のアイデアの核心部分である。このアイデアについては、離散部分群を $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z})$ 以外のものにしたり、あるいは領域を一般の IV 型領域上としたりしても、それに応じて適当な修正を行えば、ほぼ同様の議論が可能である。しかし、実際に難しいのは、得られた無限積表示の収束性（あるいは、より小さい収束域から全体への解析接続の可能性）を示すことである。

4　ボーチャーズの結果

4.1　IV 型領域上の保型形式

s を自然数とし、符号 $(2, s+2)$ の対称行列 S は、正定値かつ偶値（各成分が整数かつ対角成分が偶数）である対称行列 $S_0 \in \mathrm{M}(s, \mathbb{Z})$ をもちいて次のようにあらわせるものとする。

$$S = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & S_1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}, \qquad S_1 = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & -S_0 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$$

このとき、 S の直交群

$$O(S, \mathbb{R}) := \left\{ M \in \mathrm{M}(s+4, \mathbb{R}) \mid {}^t MSM = S \right\}$$

は、集合

$$H_S := \left\{ w \in \mathbb{C}^{s+4} \mid S[w] := {}^t wSw = 0,\ S\{w\} := {}^t \overline{w} Sw > 0 \right\}$$

に、通常の行列演算 $w \mapsto Mw$ で作用している。なお、通常の位相で $O(S, \mathbb{R})$ は 4 つの連結成分をもち、H_S は 2 つの連結成分を持っている。$O(S, \mathbb{R})$ のなかで単位元を含む連結成分を G とし、 H_S のなかで ${}^t(1, \sqrt{-1}, 0, \ldots, 0, \sqrt{-1}, 1)$ を含む連結成分を H_S^0 とする。また、 $O(S, \mathbb{R})$ の元のうち H_S^0 を H_S^0 へうつすもの全体のなす群を $\widetilde{G}$ とする。 $\widetilde{G}$ は $O(S, \mathbb{R})$ の 4 つの連結成分のうちの 2 つである。

S によって定まる IV 型領域

$$\mathcal{H}_S := \left\{ Z = \begin{pmatrix} \omega \\ z \\ \tau \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{s+2} \;\middle|\; \begin{array}{c} \omega, \tau \in \mathbb{C}, \quad z \in \mathbb{C}^s, \\ S_1[\operatorname{Im} Z] > 0,\ \operatorname{Im} \tau > 0 \end{array} \right\}$$

は、ちょうど H_S^0 を射影化したものになっている。すなわち、 $P_{\mathbb{C}} H_S^0$ と $\mathcal{H}_S$ は、全単射

$$\mathcal{H}_S \ni Z \mapsto \left[\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} S_1[Z] \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} \right] \in P_{\mathbb{C}} H_S^0$$

で対応している。この対応により、群 $\widetilde{G}$ の領域 $\mathcal{H}_S$ への作用が定まる。具体的には、

$$M = \begin{pmatrix} g_{0,0} & g_{0,1} & \cdots & g_{0,s+3} \\ g_{1,0} & g_{1,1} & \cdots & g_{0,s+3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{s+3,0} & g_{s+3,1} & \cdots & g_{s+3,s+3} \end{pmatrix} \in \widetilde{G}$$

および

$$Z = \begin{pmatrix} \omega \\ \\ z \\ \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{s+1} \\ z_{s+2} \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_S \qquad \left(\quad z = \begin{pmatrix} z_2 \\ \vdots \\ z_{s+1} \end{pmatrix} \quad \right)$$

に対し、

$$J_i(M, Z) := -\frac{1}{2} g_{i,0} S_1[Z] + \sum_{j=1}^{s+2} g_{i,j} z_j + g_{i,s+3}$$

とおけば、 $\widetilde{G}$ の $\mathcal{H}_S$ への作用は

$$\widetilde{G} \times \mathcal{H}_S \ni (M, Z) \mapsto M\langle Z\rangle := \left(\frac{J_i(M, Z)}{J_{s+3}(M, Z)} \right)_{i=1}^{s+2} \in \mathcal{H}_S$$

とあらわせる。ここで、分母にあらわる $J(M, Z) := J_{s+3}(M, Z)$ は保型因子になっている。すなわち、２条件

- $\forall Z \in \mathcal{H}_S,\ J(E_{s+4}, Z) = 1$
- $\forall M, M' \in \widetilde{G},\ \forall Z \in \mathcal{H}_S,\ J(MM', Z) = J(M, M'\langle Z\rangle) J(M', Z)$

をみたす。

IV 型領域 $\mathcal{H}_S$ で定義された正則関数全体のなす集合を $\mathrm{Hol}(\mathcal{H}_S)$ と書くことにする。整数 $k \in \mathbb{Z}$ に応じて定まる、群 $\widetilde{G}$ の $\mathrm{Hol}(\mathcal{H}_s)$ への（右からの）作用

$$\mathrm{Hol}(\mathcal{H}_S) \times \widetilde{G} \ni (F, M) \longmapsto F|_k M \in \mathrm{Hol}(\mathcal{H}_S)$$

を

$$(F|_k M)(Z) := J(M, Z)^{-k} F(M\langle Z\rangle)$$

で定める。

簡単のため、ここでは S がユニモジュラーであると仮定し（このとき $8|s$ ）、離散部分群が $\Gamma := G \cap O(S, \mathbb{Z})$ のときだけを扱う。正則関数 $F \in \mathrm{Hol}(\mathcal{H}_S)$ が重み k の保型形式であるとは、

$$\forall M \in \Gamma,\ F|_k M = F$$

が成り立つことである。IV 型領域上の保型形式については、カスプ付近で有界であるという条件は、保型性から導かれる。すなわち、ケヒャーの主張が成り立つ。

定理 17. F を重み k の保型形式であるとする。このとき、 F はカスプ付近で有界である。すなわち、 F のフーリエ展開

$$F(Z) = \sum_{n,m\in\mathbb{Z},l\in\mathbb{Z}^s} a(n,l,m)\mathbf{e}(n\tau + {}^t lS_0 z + m\omega)$$

において、「 $2nm - S_0[l] \geq 0$ かつ $n \geq 0$ 」でなければ $a(n,l,m) = 0$ である。

なお、ケヒャーの主張よりより強く、

- 「 $2nm - S_0[l] > 0$ かつ $n > 0$ 」でなければ $a(n,l,m) = 0$

を満たすとき、 F はカスプ形式であるという。

なお、先に述べた 2 次のジーゲル保型形式は、IV 型領域上の保型形式において、特に $S_0 = (2)$ のときに相当している。この場合、 S はユニモジュラーではないが、（ $s = 1$ という特殊事情も一部で好都合に働き）ほぼ以下の議論と同様のことが成り立っている。

4.2 多変数ヤコビ形式

IV 型領域上の保型形式に対しても、2 次のジーゲル保型形式のときと同様に、対応するヤコビ形式が定義される。すなわち、重み k の保型形式 F を

$$F(Z) = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m(\tau, z)\mathbf{e}(m\omega)$$

とフーリエ・ヤコビ展開すると、各 φ_m は指数 m のヤコビ形式になっている。

整数 $m \in \mathbb{Z}$ に対し、写像 $i_m : \mathrm{Hol}(\mathbb{H} \times \mathbb{C}^s) \to \mathrm{Hol}(\mathcal{H}_S)$ を $(i_m\varphi)(Z) := \varphi(\tau, z)\mathbf{e}(m\omega)$ で定め、

$$\widetilde{G}^J := \{M \in \widetilde{G} \mid \forall\varphi,\ \exists\psi \text{ s.t. } (i_1\varphi)|_0 M = i_1\psi\}$$

とおく。この $\widetilde{G}^J$ （あるいは $G^J := \widetilde{G}^J \cap G$ ）を $\widetilde{G}$ （あるいは G ）のヤコビ部分群という。このとき、 $M \in \widetilde{G}^J$ は、性質

$$\forall m \in \mathbb{Z},\ \forall k \in \mathbb{Z},\ \forall\varphi,\ \exists\psi \text{ s.t. } (i_m\varphi)|_k M = i_m\psi$$

をみたす。この ψ を $\varphi|_{k,m}M$ と書くことにする。この対応は、整数 $k, m \in \mathbb{Z}$ を固定するごとに、群 $\widetilde{G}^J$ の $\mathrm{Hol}(\mathbb{H} \times \mathbb{C}^s)$ への（右からの）作用を定めている。

２次のジーゲル保型形式に対応するヤコビ形式について成り立つ諸性質は、IV 型領域上の保型形式に対応するヤコビ形式についても、ほぼ同様に成り立つ。まず

$$\widetilde{G}^F := \left\{ M = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & M_1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \in \widetilde{G} \;\middle|\; {}^tM_1 S_1 M_1 = S_1 \right\}$$

とおくと、次の命題が成り立つ。

命題 18. $\widetilde{G}$ は $\widetilde{G}^J$ と $\widetilde{G}^F$ で生成される。

次に、

$$S(s) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & E_s & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \widetilde{G}^F$$

とおく。 $S(s)$ は $\widetilde{G}^J$ にも G にも属さない。また、 $S(s)$ の $\mathrm{Hol}(\mathbb{H}_2)$ への作用は

$$\left(F|_k S(s)\right)(\tau, z, \omega) = F(\omega, z, \tau)$$

である。

さきほど、離散部分群を $\Gamma = G \cap O(S, \mathbb{Z})$ とおいた。この Γ に対し、$\Gamma^J := \Gamma \cap G$ および $\Gamma^F := \Gamma \cap \widetilde{G}^F$ と定める。このとき、次の命題が成り立つ。

命題 19. $\widetilde{\Gamma}$ を Γ^J と Γ^F で生成される群とするとき、次のことが成り立つ。

- $\widetilde{\Gamma} \cap G = \Gamma$ である。
- Γ は $\widetilde{\Gamma}$ の正規部分群で、その指数は 2 である。
- $\widetilde{\Gamma}/\Gamma$ の完全代表系は $\{E_{s+4}, S(s)\}$ である。

正則関数 $\varphi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{H} \times \mathbb{C}^s)$ が重み k 指数 m の（ヤコビ形式の）保型性を持つとは条件

$$\forall M \in \Gamma^J,\ \varphi|_{k,m} M = \varphi$$

が成り立つことである。２次のジーゲル保型形式に対応するヤコビ形式のときと同様に、（ヤコビ形式の）保型性を持つ正則関数については、次の命題が成り立つので、実質的には $m \geq 0$ のときだけを考えればよいことが、すぐにわかる。

命題 20. 正則関数 $\varphi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{H} \times \mathbb{C}^s)$ は重み k 指数 m の（ヤコビ形式の）保型性を持つとする。このとき、次のことが成り立つ。

- $m < 0$ であれば、 $\varphi = 0$ である。
- $m = 0$ であれば、 φ は τ だけの関数とみなせる。(z については定数関数である。)

特に S_0 がユニモジュラーであることから、

$$\theta_S(\tau, z) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^s} \mathbf{e}\left(\frac{1}{2}S_0[l] + {}^t l S_0 z\right)$$

は、重み $\dfrac{s}{2}$ 指数 1 の（ヤコビ形式の）保型性を持つ。さらに、次の定理が成り立つ。

命題 21. 重み k 指数 1 の（ヤコビ形式の）保型性を持つ関数と、重み $k - \dfrac{s}{2}$ の保型性を持つ $\mathbb{H}$ 上の関数とは、次のように 1 対 1 対応している。

$$\varphi(\tau, z) = f(\tau)\theta_S(\tau, z) \leftrightarrow f(\tau)$$

したがって、重み k 指数 1 の（ヤコビ形式の）保型性を持つ関数 φ のフーリエ展開

$$\varphi(\tau, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{Z}^s} c(n, l)\mathbf{e}(n\tau + {}^t l S_0 z)$$

の係数 $c(n, l)$ は $n - \dfrac{1}{2}S_0[l]$ の値だけで決り、これを $c\left(n - \dfrac{1}{2}S_0[l]\right)$ と書けば、

$$f(\tau) := \sum_{n'} c(n')q^n$$

は、重み $k - \dfrac{s}{2}$ の保型性を持つ $\mathbb{H}$ 上の関数である。

4.3 ボーチャーズの定理

IV 型領域上の保型形式に対応する指数 1 のヤコビ形式からは、2 次のジーゲル保型形式に対応するヤコビ形式と場合とほぼ同様にして、IV 型領域上の保型形式が作れること、すなわちマースリフトが知られている。

定理 22. （マースリフト）重み k 指数 1 の（ヤコビ形式の）保型性を持つ関数 φ のフーリエ展開

$$\varphi(\tau, z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}, l\in\mathbb{Z}^s} c\left(n - \frac{1}{2}S_0[l]\right)\mathbf{e}(n\tau + {}^t l S_0 z)$$

の係数 $c(n')$ は、 $n' \leq 0$ のとき $c(n') = 0$ であるとする。このとき、

$$(\mathrm{ML}(\varphi))(Z) := \sum_{n,m\in\mathbb{Z}, l\in\mathbb{Z}^s} \sum_{a|(n,l,m)} a^{k-1} c\left(\frac{1}{a^2}\left(nm - \frac{1}{2}S_0[l]\right)\right)\mathbf{e}\left(n\tau + {}^t l S_0 z + m\omega\right)$$

は $\mathcal{H}_S$ 上収束し、重み k の保型形式になる。

マースリフトの形から明らかなように、IV 型領域上の保型形式についても、2 次のジーゲル保型形式のときと同様に、ボーチャーズのアイデアをたどることができ、保型形式の無限積表示が得られる。重み 0 指数 1 の（ヤコビ形式の）保型性を持つ関数 φ のフーリエ展開

$$\varphi(\tau, z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}, l\in\mathbb{Z}^s} c\left(n - \frac{1}{2}S_0[l]\right)\mathbf{e}(n\tau + {}^t l S_0 z)$$

の係数 $c(n')$ は、n' がじゅうぶん小さければ $c(n') = 0$ であり、さらに $n' < 0$ のとき $c(n') \in \mathbb{Z}$ であるとする。さらに、

$$a := \frac{1}{24}\sum_{l\in\mathbb{Z}^s} c\left(-\frac{1}{2}S_0[l]\right), \qquad b := \frac{1}{2}\sum_{l>0} c\left(-\frac{1}{2}S_0[l]\right) l,$$
$$c := \frac{1}{4}\sum_{l>0} c\left(-\frac{1}{2}S_0[l]\right) S_0[l]$$

としたときに、 $a, c \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z}^s$ がみたされているとする。ただし、 $l > 0$ は、 l が $\mathbb{Z}^s$ から原点を除いた集合のちょうど半分に入っていることを意味するものとする。この「ちょうど半分」の選びかたは、次の $\mathrm{BP}(\varphi)$ の定義に、符号の違いしか影響を与えない。このとき、

$$\mathrm{BP}(\varphi)(Z) := \mathbf{e}(a\tau - {}^t b S_0 z + c\omega) \times \prod_{(n,l,m)>0} \left(1 - \mathbf{e}(n\tau + {}^t l S_0 z + m\omega)\right)^{c(nm - \frac{1}{2}S_0[l])}$$

は、形式的に重み $\dfrac{c(0)}{2}$ の保型性をみたす。ただし、無限積部分の $(n, l, m) > 0$ は

「$m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{Z},\ l \in \mathbb{Z}^s$」または「 $m = 0,\ n \in \mathbb{N},\ l \in \mathbb{Z}^s$」または「$m = n = 0,\ l > 0$」

を意味するものする。

実際、ボーチャーズは、論文 [9] において、次の定理を示した。

定理 23. （ボーチャーズ） $\mathrm{BP}(\varphi)$ は $S_1[\mathrm{Im}\, Z]$ が十分大きなところで収束し、さらに、解析接続を行うことにより $\mathrm{BP}(\varphi)$ は $\mathcal{H}_S$ 上の有理型関数とみなすことができる。すなわち、 $\mathrm{BP}(\varphi)$ は $\mathcal{H}_S$ 上の重み $\dfrac{c(0)}{2}$ の保型性をみたす有理型関数とみなせる。そして、その零点と極の場所は $c(n')$ $(n' < 0)$ に対応する項から定まる零点の軌道だけであり、位数は $c(n')$ である。

5　ボーチャーズ無限積の収束性

ボーチャーズの定理を示すにあたり、形式的な保型性はマースリフトより容易に導かれるため、無限積の収束性およびその解析接続が問題となる。現在、ボーチャーズのアイデアに基づいて構成された無限積表示について、その収束性と解析接続を示す方法は３通り知られている。その方法は、見つかった順に少しずつ易しくはなってはきているものの、それでも相当に煩雑な計算を必要としている。ここでは、それぞれの方法について、煩雑な計算は省いて、概略だけを説明する。詳細は、参考文献を見ていただきたい。

5.1　漸近展開を利用する方法

この方法は、ボーチャーズによる原論文 [9] で扱われたものである。大雑把にいって、ボーチャーズ無限積はマースリフトの指数べきであるから、弱正則なヤコビ形式からのマースリフトが、解析接続により、たかだか log 程度の多価性をもった $\mathcal{H}_S$ 上の関数とみなせることをいえばよい。そのためには、 $c(n')$ のふるまいを正確に調べる必要がある。実際、 $c(n')$ の様子はサークルメソッドを使って調べることができ、

$$
\begin{aligned}
c(n) \sim & 2\pi \sum_{m>0} \sum_{c>0} \frac{1}{c} \sum_{0 \le a < c, 0 \le d < c, c | (ad-1)} \\
& c(-m) \mathbf{e}\left(\frac{an - md}{c}\right) I_{1+\frac{s}{2}}\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}\right)\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{2}+\frac{s}{4}}
\end{aligned}
$$

となる（ I は第１種変形ベッセル関数）。この両辺の違いは、任意の正の整数 ϵ に対してたかだか $O(\exp(\epsilon\sqrt{n}))$ のオーダーに抑えられるので、これより弱正則なヤコビ形式からのマースリフトの挙動が判明する。詳細は、ボーチャーズによる原論文 [9] を参照にされたい。

5.2 テータ積分表示を利用する方法

この方法は、ハーヴェイとムーアによるもの [22] であり、ブルニエによるレクチャーノート [12] によくまとめられている。ボーチャーズによる方法と同様、弱正則なヤコビ形式からのマースリフトが、解析接続により、たかだか log 程度の多価性をもった $\mathcal{H}_S$ 上の関数とみなせることを示すのであるが、彼らは、それを、直接計算ではなく、テータ積分を用いて示した。大雑把にいって、マースリフトはテータ積分であり（[33] など）実際、そのテータ積分は、弱正則ヤコビ形式に対応する重み $-\dfrac{s}{2}$ の保型性を持つ $\mathbb{H}$ 上の関数 f をもちいて

$$\int_{\mathcal{F}} f(\tau)\overline{\theta_S(\tau,Z)}y\frac{dx\ dy}{y^2} \qquad (\tau = x + y\sqrt{-1})$$

とあらわせるのだが（詳細省略)、この積分は、そのまま計算すれば、 Z の場所によっては発散する。そこで、この積分の積分領域を、 $\mathbb{H}$ の $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ に関する基本領域 $\mathcal{F}$ から虚部が u より大きい部分を削ったものに変更し、さらに発散の度合いを少しゆるくして、積分

$$\int_{\mathcal{F}_u} f(\tau)\overline{\theta_S(\tau,Z)}y^{1+s}\frac{dx\ dy}{y^2}$$

を考えれば、これは s の実部がじゅうぶん大きいところで収束する。この積分の $u \to 0$ での極限を考え、さらに、その $s = 0$ でのローラン展開の定数項を考えれば、これがちょうどもとのテータ積分の解析接続になっており、ボーチャーズの定理が証明できる。詳細は、ブルニエのレクチャーノート [12] を参照されたい。

5.3 フーリエ・ヤコビ展開についての予想

ヤコビ形式の形式的な級数

$$\sum_m \varphi_m(\tau,z)\mathbf{e}(m\omega)$$

は、そのフーリエ展開の係数が Γ^F 不変であれば収束して保型形式になるであろうという予想がある。(実は、講演者である青木が予想しているだけである。）実際、２次のジーゲル保型形式については、フルモジュラーの場合だけでなく、レベル付き（レベル $2,3,4$）の場合でも、この予想は正しいことが示されている。したがって、これらの場合には、ボーチャーズ無限積のフーリエヤコビ展開にあらわれる（ヤコビ形式の）保型性をみたす関数（これらは元の φ から有限回の計算で得られる）が、ケヒャーの主張を満たしていることをみれば、収束性が示される。ただし、この予想はどこまで正しいかわかっておらず、また、極や零点の情報は得られない。

6　ボーチャーズ無限積の応用

マースリフトと違い、それを指数べきしたボーチャーズ無限積は、基本的にヘッケ作用素との相性が良くないと、講演者である青木は考えている。実際、ボーチャーズ無限積でヘッケ固有関数が得られることは、あまりない（保型形式のなす空間の次元が小さいときにたまたま一致することは起き得る）もちろん、ヘッケ作用素は保型形式たちの足し算であったから、それをかわりに掛け算にしてやれば、ボーチャーズ無限積との相性は良くなると思われる。実際、「掛け算の」ヘッケ作用素を定義して、与えられた保型形式がボーチャーズ無限積表示を持つかどうかの判定法が、村瀬・ハイムによって研究されている（[23] など）。

ボーチャーズ無限積の話をするにあたり必ず触れなければいけないことは、ボーチャーズ自身によるムーンシャイン予想の解決であろう。なにしろ、ボーチャーズはこの業績によりフィールズ賞を受賞したのだから。ムーンシャイン予想の解決については、原論文 [8] のほか、さまざまな解説が書かれている。本講演では保型形式をメインに据えたためにムーンシャイン予想の解決を応用として扱ったが、時系列的には、ボーチャーズはムーンシャイン予想を解決する過程でモンスターリー環の分母公式を得ようとして、多変数の保型形式を無限積を用いて構成したようである。それをより一般化したものが、今日「ボーチャーズ無限積」と称されているのである。

先に述べたように、ボーチャーズ無限積は、ヘッケ作用素の理論とは相性が良くない。が、一方で、零点と極がはっきりと判り、しかも比較的重みの小さい保型形式が作れることが多いため、具体的な保型形式の構成を必要とする分野では重宝されている。実際、保型形式環の構造の決定（[1, 14] など）やある種のモジュライ空間の射影モデルの構成（[10, 29] など）などにおいて、ボーチャーズ無限積は、（一般論ではなく具体的な数値条件を満たす特定の）保型形式を構成する手段として有効に利用されている。

また、大学１年で物理の授業に落ちこぼれた講演者にはまったく理解できないが、ボーチャーズ無限積は、どうやら数理物理にも応用されているようである（[21, 28] など）。

7　おわりに

以上、いろいろと偉そうに書いてきましたが、僕自身、サマースクールでの講演と報告集の執筆は、ボーチャーズ無限積の理解をより深めるとてもよい機会でした。講演を依頼されてからこの原稿が完成するまでの約１年間で、あらためて（特に無限積関連における）保型形式の難しさを認識すると同時

に、研究するべきテーマがまだ多く残っている（というか、ようやく手がつけられはじめたばかりである）ことに気づき、今後の研究のモチベーションが大きくあがったように感じます。なによりもサマースクール世話人のみなさま、そして、講演の準備や報告集の執筆にご協力いただいた多くの先生方にとても感謝しています。どうもありがとうございました。

参考文献

[1] H. Aoki, T. Ibukiyama, Simple graded rings of Siegel modular forms of small levels, differential operators and Borcherds products, *Int. J. Math.* **16**(3) (2005), 249–279.

[2] H. Aoki, Estimating the dimension of the space of Siegel modular forms of genus 2 with level 2 and 3, *Proceedings of Japan-German seminar, Explicit Structure of Modular Forms and Zeta Functions* (白馬, 2001), 101-106.

[3] H. Aoki, Practical Construction of Borcherds Product, 第 1 回保型形式周辺分野スプリングコンファレンス (浜名湖, 2002), 97-112.

[4] H. Aoki, On vector valued Siegel modular forms of degree 2 with small levels, *Osaka J. Math*, accepted.

[5] T. Apostol, *Modular functions and Dirichlet series in number theory, 2nd Ed.*, GTM 41 (Springer, 1990).

[6] 浅井 哲也, Borcherds の無限積 ー入門一歩手前ー, 第 41 回代数学シンポジウム報告集, 113–121.

[7] W. Baily Jr., *Introductory lectures on automorphic forms* (Iwanami, 1973).

[8] R. Borcherds, Monstrous moonshine and monstrous Lie superalgebras, *Invent. Math.* **109-2** (1992), 405–444.

[9] R. Borcherds, Automorphic forms on $O_{s+2,2}(R)$ and infinite products, *Invent. Math.* **120-1** (1995), 161–213.

[10] R. Borcherds, The moduli space of Enriques surfaces and the fake Monster Lie superalgebra, *Topology* **35-3** (1996), 699–710.

[11] R. Borcherds, Automorphic forms with singularities on Grassmannians, *Invent. Math.* **132-3** (1998), 491–562.

[12] J. Bruinier, *Borcherds products on O(2,l) and Chern classes of Heegner divisors*, Lecture Notes in Mathematics **1780** (Springer-Verlag, Berlin, 2002).

[13] J. Bruinier, G. van der Geer, G. Harder, D. Zagier, *The 1-2-3 of modular forms*, Universitext (Springer-Verlag, Berlin, 2008)

[14] T. Dern, A. Krieg, Graded rings of Hermitian modular forms of degree 2, *Manuscripta Math* **110-2** (2003), 251–272.

[15] M. Eichler, D. Zagier, *The theory of Jacobi forms* (Birkhäuser, 1985).

[16] E. Freitag, *Siegelsche Modulfunktionen*, GMW 254, Springer Verlag, Berlin (1983).

[17] V. A. Gritsenko, V. V. Nikulin, Automorphic forms and Lorentzian Kac-Moody algebras. I; II, *Internat. J. Math.* **9-2** (1998), 153–199; 201–275.

[18] V. A. Gritsenko, V. V. Nikulin, Siegel automorphic form corrections of some Lorentzian Kac-Moody Lie algebras, *Amer. J. Math.* **119-1** (1997), 181–224.

[19] V. A. Gritsenko, V. V. Nikulin, Igusa modular forms and "the simplest" Lorentzian Kac-Moody algebras (Russian), *Mat. Sb.* **187-11** (1996), 27–66; translation in *Sb. Math.* **187-11** (1996), 1601–1641.

[20] V. A. Gritsenko, Fourier-Jacobi functions in n variables (Russian), *Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov* **168** (1988), *Anal. Teor. Chisel i Teor. Funktsii* **9**, 32–44, 187–188; translation in *J. Soviet Math.* **53-3** (1991), 243–252

[21] J. Harvey, G. Moore, Algebras, BPS states, and Strings, *Nuclear Phys. B* **463-2;463-3** (1996), 315–368.

[22] 原田 耕一郎, 松尾 厚, フィールズ賞受賞者紹介 R. E. Borcherds 氏の業績 I; II, 数学 **51-1** (1999/1), 56–61.

[23] B. heim, A. Murase, Borcherds lift on $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{Z})$, *Geometry and analysis of automorphic forms of several variables*, Poceedings of the International Symposium in Honor of Takayuki Oda on the Occasion of His 60th Birthday (2009), 56–76.

[24] J. Igusa, On Siegel modular forms of genus two I; II, *Amer. J. Math.* **84** (1962), 175–200; **86** (1964), 392–412.

[25] 池田 保, 無限積による保型形式の構成, 第 5 回 (1997 年) 整数論サマースクール報告集, 94–104.

[26] 河合 俊哉, 弦理論における保型関数, 数理科学 **439** (2000/1), 28–34.

[27] H. Klingen, *Introductory lectures on Siegel modular forms*, CSAM 20, Cambridge University Press (1990).

[28] D. P. Jatkar, A. Sen, *Dyon spectrum in CHL models*, arXiv:0510147 [hep-th].

[29] 金銅 誠之, Borcherds products and Algebraic Geometry, 数理解析研究所講究録 **1294** (2002), 121–128

[30] M. Kontsevich, Product formulas for modular forms on O(2,n) (after R. Borcherds), *Seminaire Bourbaki* Vol. 1996/97, Asterisque No. 245 (1997), Exp. No. 821-3, 41–56.

[31] T. Miyake, *Modular forms*, Springer Monographs in Mathematics (Springer-Verlag, Berlin, 2006).

[32] 菅野 孝史, Jacobi 形式, Oda lifting, Maass space について, 数理解析研究所講究録 **617** (1987), 114–129.

[33] T. Sugano, Jacobi forms and the theta lifting, *Comment. Math. Univ. St. Paul.* **44-1** (1995), 1–58.