ヤコビ形式のインデックス - レベル変換について
(N.-P. Skoruppa 氏および坂田裕氏との共同研究)

青木 宏樹 （東京理科大学・理工学部）

概要

ヤコビ形式の指数（インデックス）とレベルは、定義はまったく異なっているもの、その間には強い関係があるだろうということが、2010 年頃、坂田裕氏によって示された。（[Sa]）記号の説明については省略するが、彼は、ヤコビ形式に対してヘッケ作用素のトレースを計算し、無平方数 N に対し、ベクトル空間の同型

$$\mathbb{J}_{k,N}^{cusp,new}(1)^{+\cdots+} \simeq \mathbb{J}_{k,1}^{cusp,new}(N)^{+\cdots+}$$

が成り立つことを証明した。本稿は、彼の結果を受けて、必ずしも new form とは限らないヤコビ形式についても、インデックスとレベルとの間に強い関係があることを、比較的初等的な計算で示したものである。この関係は、 2 次のジーゲル保型形式において、レベル N の合同部分群に関する保型形式と、レベル N のパラモジュラーな保型形式とが対応していることに由来していると考えられているが、詳細については現在研究中である。また、本稿の内容を含む、より一般のヤコビ形式についてのインデックスとレベルとの関係については、論文 [ASS] にまとめて近日中に発表の予定である。

1　２次のジーゲル保型形式

本稿は純粋にヤコビ形式に関する話題であるが、「ヤコビ形式は、ある種の保型形式をフーリエ・ヤコビ展開したときの係数にあらわれる」という事実を知っておいたほうが、ヤコビ形式を理解しやすい。そこでまず、 2 次のジーゲル保型形式について簡単にまとめておく。ジーゲル保型形式についてより詳しく知りたい場合には、たとえば [Fr, Kl] などを参照すると良い。

シンプレクティック群

$$G_{\mathbb{R}} := \mathrm{Sp}(2,\mathbb{R}) = \left\{ M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R}) \;\middle|\; {}^tMJM = J := \begin{pmatrix} O_2 & -E_2 \\ E_2 & O_2 \end{pmatrix} \right\}$$

は、 2 次のジーゲル上半空間

$$\mathbb{H}_2 := \left\{ Z = {}^tZ = \begin{pmatrix} \tau & z \\ z & \omega \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C}) \;\middle|\; \operatorname{Im} Z := \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(Z - \overline{Z}\right) > 0 \right\}$$

に

$$\mathbb{H}_2 \ni Z \longmapsto M\langle Z\rangle := (AZ+B)(CZ+D)^{-1} \in \mathbb{H}_2.$$

により推移的に作用している。ここで $\operatorname{Im} Z > 0$ は、実対称行列 $\operatorname{Im} Z$ が正定値であるという意味である。この作用は、重みとよばれる整数 $k \in \mathbb{Z}$ を定めるごとに、 $\mathbb{H}_2$ 上の正則関数全体のなす集合 $\mathrm{Hol}(\mathbb{H}_2)$ への $G_{\mathbb{R}}$ の作用を導く。具体的には、 F を $\mathbb{H}_2$ 上の正則関数とすると、$M \in G_{\mathbb{R}}$ に対し

$$F(Z) \longmapsto (F|_kM)(Z) := \det(CZ+D)^{-k}F(M\langle Z\rangle)$$

と定める。

さて、 Γ を $G_{\mathbb{Z}} := \mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}) := \mathrm{Sp}(2,\mathbb{R}) \cap \mathrm{M}_4(\mathbb{Z})$ の有限指数部分群とする。$\mathbb{H}_2$ 上の正則関数 F が、 Γ に関する重み k の**ジーゲル保型形式**であるとは、任意の $M \in \Gamma$ に対し、条件 $F = F|_kM$ がみたされることである。 Γ に関する重み k のジーゲル保型形式全体のなす複素ベクトル空間を $\mathbb{M}_k(\Gamma)$ と書くことにする。

F を Γ の関する重み k のジーゲル保型形式であるとする。このとき、各 $M \in G_{\mathbb{Z}}$ に対し、$F|_kM$ は、フーリエ展開

$$(F|_kM)(Z) = \sum_{n,l,m} c_M(n,l,m)\,\mathbf{e}\left(n\tau + lz + m\omega\right)$$

を持つ。ただし $\mathbf{e}(w) := \exp(2\pi\sqrt{-1}w)$ であるとする。このとき、**ケヒャーの主張**と呼ばれる命題「もし $4nm - l^2 < 0$ であるか、あるいは $m < 0$ であれば、 $c_M(n,l,m) = 0$ である。」が成り立つ。

2　ヤコビ形式

この節では、ヤコビ形式の基本的性質について、簡単にまとめておく。本稿においてはレベル付きのヤコビ形式を扱うので、群がフルモジュラーでない場合についても考慮してまとめたが、本稿は基本的にはヤコビ形式の標準的な教科書である [EZ] に書いてある内容の一部である。

まず最初にヤコビ群を定義する。ヤコビ群の生成元となる 3 種類の元

$$[A] \;\; (A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})), \quad [x,y] \;\; (x,y \in \mathbb{R}), \quad [r] \;\; (r \in \mathbb{R})$$

を考え、その間の演算規則を

$$[A_1][A_2]=[A_1A_2] \qquad [x,y][A]=[A][(x,y)A] \qquad [r][A]=[A][r]$$
$$[x_1,y_1][x_2,y_2]=[x_1+x_2,y_1+y_2][x_1y_2-x_2y_1]$$
$$[r][x,y]=[x,y][r] \qquad [r][s]=[r+s]$$

で定める。ヤコビ群 $G_{\mathbb{R}}^J$ とは、この演算規則によりこれら３種類の元たちから生成される群のことである。定義から次の命題は明らかである。

命題 1. $G_{\mathbb{R}}^J$ の任意の元 M は次の形に一意的にあらわされる。

$$M=[A][x,y][r] \qquad (\ A\in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}),\ x,y,r\in\mathbb{R}\ )$$

ここで与えたヤコビ群 $G_{\mathbb{R}}^J$ の定義は少々複雑に見えるが、実際には次の対応で、ヤコビ群は $G_{\mathbb{R}}$ の部分群とみなすことができる。

$$[A]\cdots\begin{pmatrix} a & 0 & b & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ c & 0 & d & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \left(A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})\right)$$

$$[x,y]\cdots\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & y\\ x & 1 & y & 0\\ 0 & 0 & 1 & -x\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad [r]\cdots\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & r\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

より精密にいえば、 $G_{\mathbb{R}}$ のかわりに、群 $G:=G_{\mathbb{R}}/\{\pm E_4\}$ を考えれば、 G の $\mathrm{Hol}(\mathbb{H}_2)$ への作用は忠実であり、ヤコビ群は、 G の $[1]$ （に対応する元）における中心化群 $C_G([1])$ であるとみなすことができる。以下、この対応にしたがって $G_{\mathbb{R}}^J$ を $G_{\mathbb{R}}$ または G の部分群とみなすことがある。

このことから、ヤコビ群の作用により、 $\mathbb{H}_2$ 上 ω について周期的な関数は、同じ周期を持つ関数にうつされる。実際、 $\mathrm{Hol}(\mathbb{H}_2)$ の元で ω について周期的な関数の ω についてのフーリエ展開（フーリエ・ヤコビ展開）を考えると、各フーリエ係数は $\mathrm{Hol}(\mathbb{H}\times\mathbb{C})$ の元であり、ヤコビ群はそのフーリエ係数の各々に作用していることがわかる。ただし $\mathbb{H}$ は通常の複素上半平面

$$\mathbb{H}:=\{\ \tau\in\mathbb{C}\mid\ \mathrm{Im}\,\tau>0\ \}$$

をあらわすものとする。特に、有理数 m に対し $\mathbf{e}(m\omega)$ の係数に着目することにより、ヤコビ群の $\mathrm{Hol}(\mathbb{H}\times\mathbb{C})$ への作用が次のように定義できる。

$$(\varphi|_{k,m}[A])(\tau,z)=(c\tau+d)^{-k}\,\mathbf{e}\left(\frac{mcz^2}{c\tau+d}\right)\varphi\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{z}{c\tau+d}\right)$$
$$(\varphi|_{k,m}[x,y])(\tau,z)=\mathbf{e}\left(m\left(x^2\tau+2xz+xy\right)\right)\varphi\left(\tau,z+x\tau+y\right)$$
$$(\varphi|_{k,m}[r])(\tau,z)=\mathbf{e}\left(mr\right)\varphi(\tau,z)$$

この m を、指数（インデックス）と呼ぶ。

さて、 Γ^J を $G^J_{\mathbb{Z}} := G^J_{\mathbb{R}} \cap G_{\mathbb{Z}}$ の有限指数部分群とする。ヤコビ形式というのは、大雑把にいえば Γ^J 不変な正則関数のことであるが、ケヒャーの主張に対応する条件が付加されている。いま、 $\varphi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{H} \times \mathbb{C})$ が、任意の $M \in \Gamma^J$ に対して、条件 $\varphi|_{k,m}M = \varphi$ を満たしているとする。まず、次の定理が成り立つ。([EZ, Theorem. 1.2])

定理 2. 関数 $\varphi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{H}\times\mathbb{C})$ は、任意の $M \in \Gamma^J$ に対して、条件 $\varphi|_{k,m}M = \varphi$ を満たしているとする。このとき、次のことが成り立つ。

- 指数 m が負であれば、 φ は恒等的に 0 である。
- 指数 m が 0 であれば、 φ は第 2 変数（すなわち z ）について定数関数である。

よって、以下、我々は $m > 0$ を仮定する。任意の $M \in G^J_{\mathbb{Z}}$ に対し、$\varphi|_{k,m}M$ はフーリエ展開

$$(\varphi|_{k,m}M)(\tau, z) = \sum_{n,l} c_M(n, l)\, \mathbf{e}(n\tau + lz)$$

を持つ。 $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$ 上の正則関数 φ が、 Γ^J に関する重み k 指数 m の**ヤコビ形式**であるとは、任意の $M \in \Gamma^J$ に対し、条件 $\varphi = \varphi|_{k,m}M$ がみたされ、さらに、条件「もし $4nm - l^2 < 0$ であれば、 $c_M(n, l) = 0$ である」が成り立つことである。 Γ^J に関する重み k 指数 m のヤコビ形式全体のなす複素ベクトル空間を $\mathbb{J}_{k,m}(\Gamma^J)$ と書くことにする。

定義より明らかに、任意のジーゲル保型形式 $F \in \mathbb{M}_k(\Gamma)$ に対し、そのフーリエ・ヤコビ展開

$$F(Z) = \sum_{m} \varphi_m(\tau, z)\, \mathbf{e}(m\omega)$$

の係数は φ_m はヤコビ形式になる。すなわち $\varphi_m \in \mathbb{J}_{k,m}(\Gamma \cap G^J_{\mathbb{R}})$ となる。

3 テータ分解

大雑把にいえば、ヤコビ形式は、テータ関数を介して、ベクトル値の楕円モジュラー形式とみなすことができる。そして、この楕円モジュラー形式のなす空間を調べることにより、ヤコビ形式のなす空間はいくつかの部分空間に分解できる。([EZ, Section 5])

この節では、Γ^J は $G^J_{\mathbb{Z}}$ の有限指数部分群であり、さらに、任意の $x, y \in \mathbb{Z}$ に対し、条件 $[x, y] \in \Gamma^J$ を満たすとする。このような Γ^J に対して、ヤコビ形式のなす空間の分解を調べる。

命題 3. $G^J_{\mathbb{Z}}$ の有限指数部分群 Γ^J は、任意の $x, y \in \mathbb{Z}$ に対し、条件 $[x, y] \in \Gamma^J$ を満たすとする。このとき、 Γ^J の任意の元 M は次の形に一意的にあらわされる。

$$M = [A][x, y][r] \qquad \big(\, A \in (\Gamma^J)',\ x, y, r \in \mathbb{Z}\,\big)$$

ここで、 $(\Gamma^J)'$ は

$$(\Gamma^J)' := \big\{ A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \ \big|\ [A] \in \Gamma^J \big\}$$

と定義した。

証明. まず $[1, 0][0, 1][-1, -1] = [1]$ より $r \in \mathbb{Z}$ のときに $[r] \in \Gamma^J$ であることがわかる。そうすれば、 **命題 1** よりこの命題の主張は明らかである。 □

さて、 m を自然数、 $\varphi \in \mathbb{J}_{k,m}(\Gamma^J)$ とし、そのフーリエ展開

$$\varphi(\tau, z) = \sum_{n,l} c(n, l)\, \mathbf{e}(n\tau + lz)$$

を考える。こののとき、 $[x, 0] \in \Gamma^J$ $(x \in \mathbb{Z})$ による変換規則よりすぐに、フーリエ係数 $c(n, l)$ は、 2 つの値 $4nm - l^2$ および $l \pmod{2m}$ だけに依存していることが示せる。よって $c_l(4nm - l^2) := c(n, l)$ と定め、左辺の l は $\mathbb{Z}/2m\mathbb{Z}$ の元であるとみなすことができる。そして、

$$h_\mu(\tau) := \sum_{\substack{n \equiv \mu^2\ (4m) \\ n \geq 0}} c_\mu(n) q^{\frac{n}{4m}}$$

と定めれば、テータ関数

$$\theta_{m,\mu}(\tau, z) := \sum_{\substack{l \in \mathbb{Z} \\ l \equiv \mu\ (2m)}} q^{\frac{l^2}{4m}} \zeta^l$$

をもちいて、 φ は

$$\varphi(\tau, z) = \sum_{\mu \in \mathbb{Z}/2m\mathbb{Z}} h_\mu(\tau) \theta_{m,\mu}(\tau, z)$$

とあらわすことができる。

このテータ関数は、変換規則

$$\theta_{m,\mu}(\tau + 1, z) = \mathbf{e}\left(\frac{\mu^2}{4m}\right) \theta_{m,\mu}(\tau, z)$$

および

$$\theta_{m,\mu}\left(-\frac{1}{\tau},\frac{z}{\tau}\right)=\sqrt{\frac{\tau}{2m\sqrt{-1}}}\,\mathbf{e}\left(\frac{mz^2}{\tau}\right)\sum_{\nu\in\mathbb{Z}/2m\mathbb{Z}}\mathbf{e}\left(\frac{-\mu\nu}{2m}\right)\theta_{m,\nu}(\tau,z)$$

をみたす。ゆえに、 φ と $(h_\mu)_{\mu\in\mathbb{Z}/2m\mathbb{Z}}$ を対応させることにより、 Γ^J に関する重み k 指数 m のヤコビ形式は、 $(\Gamma^J)'$ に関する（しかるべき指標つきの）重み $k-\frac{1}{2}$ の $2m$-次元ベクトル値楕円モジュラー形式とみなすことができる。

さて、 m' を m の exact な約数、すなわち $m'|m$ かつ $(m',\frac{m}{m'})=1$ であるとする。 これを以下 $m'||m$ と書くことにする。このとき、 m' に対して、次の条件を満たす $\xi_{m'}\in\mathbb{Z}/2m\mathbb{Z}$ が一意的に定まる。

$$\xi_{m'}\equiv 1 \pmod{\frac{2m}{m'}},\qquad \xi_{m'}\equiv -1 \pmod{2m'}$$

すなわち

$$\left\{\xi_{m'}\in\mathbb{Z}/2m\mathbb{Z}\;\middle|\; m'||m\right\}=\left\{\xi\in\mathbb{Z}/2m\mathbb{Z}\;\middle|\;\xi^2\equiv 1 \pmod{4m}\right\}$$

が成り立つ。ここで、

$$\theta_{m,\xi_{m'}\mu}(\tau+1,z)=\mathbf{e}\left(\frac{\mu^2}{4m}\right)\theta_{m,\xi_{m'}\mu}(\tau,z)$$

および

$$\theta_{m,\xi_{m'}\mu}\left(-\frac{1}{\tau},\frac{z}{\tau}\right)=\sqrt{\frac{\tau}{2m\sqrt{-1}}}\,\mathbf{e}\left(\frac{mz^2}{\tau}\right)\sum_{\nu\in\mathbb{Z}/2m\mathbb{Z}}\mathbf{e}\left(\frac{-\mu\nu}{2m}\right)\theta_{m,\xi_{m'}\nu}(\tau,z)$$

であることに注意すれば、

$$\varphi(\tau,z)=\sum_{\mu\in\mathbb{Z}/2m\mathbb{Z}}h_\mu(\tau)\theta_{m,\mu}(\tau,z)\in\mathbb{J}_{k,m}(\Gamma^J)$$

に対し

$$\left(\varphi|W_{m'}\right)(\tau,z):=\sum_{\mu\in\mathbb{Z}/2m\mathbb{Z}}h_\mu(\tau)\theta_{m,\xi_{m'}\mu}(\tau,z)\in\mathbb{J}_{k,m}(\Gamma^J)$$

と定めると、この作用素 $W_{m'}$ は $\mathbb{J}_{k,m}(\Gamma^J)$ の自己同型になっていることがわかる。これは、ヤコビ形式のフーリエ展開への作用として言い換えれば、フーリエ展開の係数 $c_l(n)$ を $c_{\xi_m l}(n)$ に対応させる変換である。

空間 $\mathbb{J}_{k,m}(\Gamma^J)$ はピーターソン内積により内積空間となり、各 $W_{m'}$ の作用はエルミートである。さらに、 $m_1||m,\ m_2||m,\ (m_1,m_2)=1$ であれば $W_{m_1}\circ W_{m_2}=W_{m_2}\circ W_{m_1}=W_{m_1m_2}$ であるので、結局、空間 $\mathbb{J}_{k,m}(\Gamma^J)$ は作用素 $W_{m'}$ たちによって同時固有空間に分解される。明らかにこの変換の固有値は ±1 である。

$$m=\prod_{j=1}^{f} p_j^{v_j}$$

とし、 $m'||m$ に対し

$$\varepsilon_j:=\begin{cases}1 & (p_j|m')\\ -1 & (p_j\not|m')\end{cases}$$

とおき、

$$\mathbb{J}_{k,m}^{m'}(\Gamma^J):=\left\{\varphi\in\mathbb{J}_{k,m}(\Gamma^J)\mid \varphi|W_{p_j^{e_j}}=\varepsilon_j\varphi\quad (j=1,2,\dots,f)\right\}$$

と定める。この記号を用いて上記のことをまとめると、次の定理となる。([EZ, Theorem. 5.2])

定理 4. 空間 $\mathbb{J}_{k,m}(\Gamma^J)$ は次のように分解される。

$$\mathbb{J}_{k,m}(\Gamma^J)=\bigoplus_{m'||m}\mathbb{J}_{k,m}^{m'}(\Gamma^J)$$

なお、定義より明らかに、条件 $[-E_2]\in\Gamma^J$ および $\prod_{j=1}^{f}\varepsilon_j\neq(-1)^k$ が満たされれば、 $\mathbb{J}_{k,m}^{m'}(\Gamma^J)=\{0\}$ が成り立つ。

4 レベル付きのヤコビ形式

さて、本稿の主題は、レベル付きのヤコビ形式についてである。群 $\Gamma_0(N)^J$ を、前節最初の条件をみたす $G_{\mathbb{Z}}^J$ の有限指数部分群 Γ^J で、特に $(\Gamma^J)'$ がレベル N の合同部分群

$$\Gamma_0(N):=\left\{\ M=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\ \middle|\ c\equiv0\pmod N\ \right\}$$

となるものとする。言い換えれば、 $\Gamma_0(N)^J$ は、次の 3 種類の元

$$[A]\ \ (A\in\Gamma_0(N)),\quad [x,y]\ \ (x,y\in\mathbb{Z}),\quad [r]\ \ (r\in\mathbb{Z})$$

から生成される $G_{\mathbb{Z}}^J$ の部分群である。この $\Gamma_0(N)^J$ に関するヤコビ形式を、レベル N のヤコビ形式という。以下、簡単のため、

$$\mathbb{J}_{k,m}(N):=\mathbb{J}_{k,m}(\Gamma_0(N)^J)$$

と書くことにする。

さて、 $L \in \mathbb{N}$ に対し

$$\mathbb{J}_{k,m}(N;L) := \left\{ \varphi \in \mathbb{J}_{k,m}(N) \;\middle|\; \varphi(\tau,z) = \varphi\left(\tau, z+\frac{1}{L}\right) \right\}$$

と定める。明らかに $L|m$ でない限り $\mathbb{J}_{k,m}(N;L) = \{0\}$ である。少し計算すれば、対応

$$\mathbb{J}_{k,m}(N) \ni \varphi \mapsto \left(\varphi|_{k,m}\left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]\right)(N\tau, Nz) \in \mathbb{J}_{k,mN}(N;N)$$

が同型写像であることがわかる。特に、 m が無平方数（square free）である場合には、次のことが示される。

命題 5. m を無平方数、 $t|m$、 $m'|\frac{m}{t}$ とする。このとき、次の写像は同型である。

$$\mathbb{J}^{m'}_{k,\frac{m}{t}}(t) \ni \varphi \mapsto \left(\varphi|_{k,\frac{m}{t}}\left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]\right)(t\tau, tz) \in \mathbb{J}^{tm'}_{k,m}(t;t)$$

5　ヤコビ形式のインデックス - レベル変換

以上の準備のもとに、ヤコビ形式のインデックス - レベル変換について述べる。 $\varphi \in \mathbb{J}_{k,m}(N)$ および $t|m$ に対し、 $V(t)$ および $W(t)$ を次のように定める。

$$(\varphi|V(t)) := \sum_{j=0}^{t-1}\left(\varphi|_{k,m}\left[0, \frac{j}{t}\right]\right)(\tau,z)$$

$$(\varphi|W(t)) := \frac{1}{t}\sum_{j=0}^{t-1}\sum_{s=0}^{t-1}\left(\varphi|_{k,m}\left[\frac{s}{t}, \frac{j}{t}\right]\right)(\tau,z)$$

幾許かの計算により、次の命題が示される。

命題 6.

- 作用素 $V(t)$ は、写像

  $$V(t) : \mathbb{J}_{k,m}(N) \to \mathbb{J}_{k,m}(\mathrm{l.c.m.}(N,t);t)$$

  を引き起こす。

- 作用素 $W(t)$ は、写像

$$W(t):\mathbb{J}_{k,m}(N)\to\mathbb{J}_{k,m}(N)$$

を引き起こす。

実は、この $W(t)$ は、以前に定義した W_t の一般化である。すなわち、次の命題が成り立つ。

命題 7. $t||m$ のとき、 $W(t)$ は W_t に一致する。

証明. $\varphi\in\mathbb{J}_{k,m}(N)$ のフーリエ展開を

$$\varphi(\tau,z)=\sum_{n,l}c(n,l)\,\mathbf{e}(n\tau+lz)$$

とすると、

$$\begin{aligned}&\left(\varphi|W(t)\right)(\tau,z)\\=&\frac{1}{t}\sum_{j=0}^{t-1}\sum_{s=0}^{t-1}\mathbf{e}\left(\frac{ms^2}{t^2}\tau+\frac{2ms}{t}z+\frac{msj}{t^2}\right)\varphi\left(\tau,z+\frac{s}{t}\tau+\frac{j}{t}\right)\\=&\frac{1}{t}\sum_{j=0}^{t-1}\sum_{s=0}^{t-1}\sum_{n,l}c(n,l)\mathbf{e}\left(\left(\frac{ms^2}{t^2}+\frac{ls}{t}+n\right)\tau+\left(\frac{2ms}{t}+l\right)z+\frac{j}{t}\left(\frac{ms}{t}+l\right)\right)\end{aligned}$$

である。ここで

$$n':=\frac{ms^2}{t^2}+\frac{ls}{t}+n,\qquad l':=\frac{2ms}{t}+l$$

とおけば

$$\left(\varphi|W(t)\right)(\tau,z)=\sum_{s=0}^{t-1}\sum_{n,l}c(n,l)\left(\frac{1}{t}\sum_{j=0}^{t-1}\mathbf{e}\left(\frac{j}{t}\left(\frac{ms}{t}+l\right)\right)\right)\mathbf{e}\left(n'\tau+l'z\right)$$

となる。ここで

$$\frac{1}{t}\sum_{j=0}^{t-1}\mathbf{e}\left(\frac{j}{t}\left(\frac{ms}{t}+l\right)\right)=\begin{cases}1 & \left(\frac{ms}{t}+l\in t\mathbb{Z}\right)\\0 & (\text{ それ以外 })\end{cases}$$

である。いま、 $t||m$ より、この場合分けの前者、すなわち $\frac{ms}{t}+l\in t\mathbb{Z}$ を満たす s は 0 から $t-1$ までのなかに唯一つ存在し、この s に対しては

$$l'=\frac{2ms}{t}+l\equiv l\pmod{\frac{2m}{t}}$$

および

$$l' = 2\left(\frac{m}{t}s + l\right) - l \equiv -l \pmod{2t}$$

が成り立つ。つまり $l' = \xi_t l$ である。さらに $4n'm - l^2 = 4nm - l^2$ も成り立つので、この $W(t)$ は W_t と一致する。 □

さて、 $\varphi \in \mathbb{J}_{k,m}(1)$ に対し、 $U(t)$ を次のように定める。

$$(\varphi|U(t)) := \sum_{g \in \Gamma_0(t)\backslash \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})} (\varphi|_{k,m}[g])(\tau, z)$$

このとき、次の定理が成り立つ。

定理 8. $\varphi \in \mathbb{J}_{k,m}(1)$ および $t|m$ に対し、

$$(\varphi|V(t))\,|U(t) = \sum_{u|t} a_u\,(\varphi|W(u))$$

が成り立つ。ここで a_u は次の式で与えられる定数である。

$$a_u = u\sum_{v|\frac{t}{u}} \mu\left(\frac{t}{uv}\right)\frac{\psi(t)}{\psi\left(\frac{t}{v}\right)}$$

ただし、式中の μ はメビウス関数であり、 ψ は次のように定められた数論的関数である。

$$\psi(t) := t\prod_{p|t}\left(1 + \frac{1}{p}\right) \quad (p\,\text{は}\,t\,\text{の素因子をわたる})$$

証明. 定義よりすぐに

$$(\varphi|V(t))\,|U(t) = \sum_{j=0}^{t-1}\sum_{(c,d)} \varphi|\left[\frac{cj}{t}, \frac{dj}{t}\right]$$

であることがわかる。ここで、 (c, d) は次の集合をわたる。

$$\left\{(c,d) \in (\mathbb{Z}/t\mathbb{Z})^2 \mid (c,d,t) = 1\right\}/(\mathbb{Z}/t\mathbb{Z})^\times$$

そこで、 $(x, y, t) = u$ を満たす $(x, y) \in \mathbb{Z}/t\mathbb{Z}$ に対し、 $(x, y) = (cj, dj)$ となる場合の数を勘定すれば

$$\sum_{v|u}\frac{v}{t}a_{\frac{t}{v}} = \frac{\psi(t)}{\psi\left(\frac{t}{u}\right)}$$

が得られる。これにメビウスの反転公式を適用して

$$\frac{u}{t}a_{\frac{t}{u}} = \sum_{v|u} \mu\left(\frac{u}{v}\right)\frac{\psi(t)}{\psi\left(\frac{t}{v}\right)}$$

が得られる。よって

$$\frac{1}{u}a_u = \sum_{v|\frac{t}{u}} \mu\left(\frac{t}{uv}\right)\frac{\psi(t)}{\psi\left(\frac{t}{v}\right)}$$

が成り立つ。 □

以下、特に m が無平方数のときを考える。このとき**定理 8** はより簡単に、次の形であらわされる。

系 9. m が無平方数のとき、 $\varphi \in \mathbb{J}_{k,m}(1)$ および $t|m$ に対し、

$$(\varphi|V(t))\,|U(t) = t\sum_{u|t}(\varphi|W(u))$$

が成り立つ。

m が無平方数のときには、ヤコビ形式の空間は、次のように分解できる。

$$\mathbb{J}_{k,m}(1) = \bigoplus_{m'|m} \mathbb{J}_{k,m}^{m'}(1)$$

そこで、特に $\varphi \in \mathbb{J}_{k,m}^{m'}(1)$ のときを考えれば、 $t|m'$ に対し、

$$(\varphi|V(t))\,|U(t) = t\sigma_0(t)\varphi$$

が成り立つ。ここで $\sigma_0(t)$ は t の約数の個数をあらわす記号である。したがって、 $V(t)\circ U(t)$、ひいては $V(t)$ は、空間 $\mathbb{J}_{k,m}^{m'}(1)$ からの単射である。すなわち、次の定理が成り立つ。

定理 10. $t|m'$ とする。このとき、 $V(t)$ は、インデックスとレベルを変換する単射

$$\mathbb{J}_{k,m}^{m'}(1) \xrightarrow{V(t)} \mathbb{J}_{k,m}^{m'}(t;t) \simeq \mathbb{J}_{k,\frac{m}{t}}^{\frac{m'}{t}}(t)$$

をみちびく。

例 11.

- $m'|m$ に対し、次の単射が存在。

$$\mathbb{J}_{k,m}^{m'}(1) \hookrightarrow \mathbb{J}_{k,\frac{m}{m'}}^{1}(m')$$

- 特に、次の式が成立。

$$\mathbb{J}_{k,m}^{m}(1) \hookrightarrow \mathbb{J}_{k,1}^{1}(m) = \mathbb{J}_{k,1}(m)$$

- 素数 p と偶数 k に対しては、次の式が成立。

$$\mathbb{J}_{k,p}(1) = \mathbb{J}_{k,p}^{p}(1) \hookrightarrow \mathbb{J}_{k,1}^{1}(p) = \mathbb{J}_{k,1}(p)$$

なお、同様の計算（難しくはないがある程度面倒）により、より一般には次の定理が得られる。

定理 12. 自然数 m は、無平方数 m_1 と、 m_1 と互いに素な自然数 m_2 との積であるとする。さらに、 $m' = m_1' m_2'$ は、条件 $m_1'|m_1$ および $m_2'||m_2$ をみたすとする、このとき、 $t|m_1'$ に対し、 $V(t)$ はインデックスとレベルを変換する単射

$$\mathbb{J}_{k,m}^{m'}(1) \ni \varphi \mapsto \varphi|V(t) \in \mathbb{J}_{k,m}^{m'}(t;t) \simeq \mathbb{J}_{k,\frac{m}{t}}^{\frac{m'}{t}}(t)$$

をみちびく。

さいごに

講演の機会を与えてくださった研究集会の世話人の先生方、また研究集会の準備をしてくださった早稲田大学の学生の皆様方に、この場をお借りしてお礼を申し上げます。どうもありがとうございました。

参考文献

[ASS] H. Aoki, H. Sakata, N. -P. Skoruppa, *Swapping level and index of Jacobi forms*, in preparation.

[EZ] M. Eichler, D. Zagier, *The theory of Jacobi forms* (Birkhäuser, 1985).

[Fr] E. Freitag, *Siegelsche Modulfunktionen*, GMW 254, Springer Verlag, Berlin (1983).

[Kl] H. Klingen, *Introductory lectures on Siegel modular forms*, CSAM 20, Cambridge University Press (1990).

[Sa] H. Sakata, *Trace formula for Jacobi forms of level p*, in preparation.