Determination of the structure of vector valued Siegel modular forms by using Jacobi forms

青木 宏樹 （東京理科大学 理工学部）

2014 年 3 月 12 日

次数 2 のジーゲル保型形式のなす空間の構造は、いくつかの場合には、次元の評価を用いて比較的簡単に決定することができる。そのなかには、スカラー値の場合だけでなく、ベクトル値の場合も含まれている。本稿では、このことについて、簡単な解説を行う。次元の評価を用いて、次数 2 のジーゲル保型形式のなす空間の構造を決定する方法は、２つある（ように見える)。ヤコビ形式を用いる方法と、微分作用素を用いる方法である。しかし実は、この２つの方法は、本質的にはあまり変わらないことが、ベクトル値の場合について調べることによってわかった。

1　基本的事項

まず最初に、ジーゲル保型形式に関する基本事項をまとめておく。この節の内容についてより深く知りたいときには、ジーゲル保型形式に関するテキスト、たとえば [Fr2, Kl] などを見ていただきたい。

1.1　記法

$\mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ を、それぞれ非負整数、整数、実数、複素数全体のなす集合とする。また、簡単のため、$\tau,\ z,\ \omega \in \mathbb{C}$ に対して $q := \mathbf{e}(\tau) := \exp(2\pi\sqrt{-1}\tau),\ \zeta := \mathbf{e}(z),\ p := \mathbf{e}(\omega)$ と書くことにする。

1.2　次数 2 のジーゲル保型形式

次数 2 のジーゲル上半空間は

$$\mathbb{H}_2 := \left\{ Z = {}^tZ = \begin{pmatrix} \tau & z \\ z & \omega \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(2,\mathbb{C}) \;\middle|\; \mathrm{Im}\,(Z) > 0 \right\}$$

によって定義される。シンプレクティック群

$$\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R}) := \left\{ M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(4,\mathbb{R}) \;\middle|\; {}^tMJM = J,\ J = \begin{pmatrix} 0 & E_2 \\ -E_2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

は

$$\mathbb{H}_2 \ni Z \mapsto M\langle Z \rangle := (AZ+B)(CZ+D)^{-1} \in \mathbb{H}_2$$

によって $\mathbb{H}_2$ に推移的に作用し、$\det(CZ+D)$ はこの作用の保型因子になっている。重み $k \in \mathbb{Z}$ に対し、正則関数 $F : \mathbb{H}_2 \to \mathbb{C}$ への $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$ の作用を

$$(F|_kM)(Z) := \det(CZ+D)^{-k}F(M\langle Z \rangle).$$

で定める。Γ を $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}) := \mathrm{Sp}(2,\mathbb{R}) \cap \mathrm{M}(4,\mathbb{Z})$ の有限指数部分群であるとする。

定義　正則関数 $F:\mathbb{H}_2\to\mathbb{C}$ が重み k のジーゲル保型形式であるとは、任意の $M\in\Gamma$ に対し、$F|_k M=F$ が成り立っていることである。

重み k のジーゲル保型形式全体のなす $\mathbb{C}$-ベクトル空間を $\mathbb{M}_k(\Gamma)$ と書くことにする。 $k<0$ のときには $\mathbb{M}_k(\Gamma)=\{0\}$ であることが、また、 $k=0$ のときには $\mathbb{M}_0(\Gamma)=\mathbb{C}$ であることが知られている。以下、 Γ が明白なときには、それを省略して $\mathbb{M}_k(\Gamma)$ のかわりに $\mathbb{M}_k$ と書くことにする。ジーゲル保型形式全体のなす次数付き環を

$$\mathbb{M}_*:=\bigoplus_{k=0}^{\infty}\mathbb{M}_k$$

と書くことにする。

1.3　井草の定理

特に $\Gamma=\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z})$ のときには、ジーゲル保型形式全体のなす次数付き環 $\mathbb{M}_*$ の構造は、1960 年代、井草先生の論文 [Ig1, Ig2] により決定されている。

定理　次数 2 のジーゲル保型形式全体のなす次数付き環 $\mathbb{M}_*$ は、重みが $4,6,10,12$ および 35 の 5 つの元で生成される。前者 4 つは代数的独立であり、重み 35 の元の自乗は前者 4 つの元であらわされる。

この定理により、$\mathbb{M}_k$ の次元は

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\dim\mathbb{M}_k)\,x^k=\frac{1+x^{35}}{(1-x^4)(1-x^6)(1-x^{10})(1-x^{12})}$$

によって与えられる。現在では、この定理の証明は何通りも知られている。本稿では、簡単のため、 k が偶数の場合に限って、この定理の証明を 2 つ紹介する。

2　ヤコビ形式を用いた保型形式環の構造決定法

2.1　ヤコビ形式

ヤコビ形式は、Eichler と Zagier によって定義され、彼らの本 [EZ] に、その基本的性質がまとめられている。井草の定理の証明にあたっては、ヤコビ形式より少し条件の弱い弱ヤコビ形式しか必要としないので、ここでは、その定義を紹介する。

定義　$k\in\mathbb{Z},\ m\in\mathbb{N}_0$ とする。正則関数 $\varphi:\mathbb{C}\times\mathbb{H}\to\mathbb{C}$ が次の条件を満たしているとき、φ は重み k 指数 m の弱ヤコビ形式であるという。

(J1) $\varphi(\tau,z)=(c\tau+d)^{-k}\mathbf{e}(\frac{-mcz^2}{c\tau+d})\varphi\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{z}{c\tau+d}\right)\quad\left(\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\right)$

(J2) $\varphi(\tau,z)=q^{mx^2}\zeta^{2mx}\varphi(\tau,z+x\tau+y)\quad(x,y\in\mathbb{Z})$

(J3) フーリエ展開 $\varphi(\tau,z)=\sum_{n,l\in\mathbb{Z}}a(n,l)q^n\zeta^l$ で $n<0$ のとき $a(n,l)=0$。

重み k 指数 m の弱ヤコビ形式全体のなす $\mathbb{C}$-ベクトル空間を $\mathbb{J}^{\mathrm{w}}_{k,m}$ と書くことにする。特に、条件 **(J3)** において $n<0$ のかわりに $n<r$ としたものを $\mathbb{J}^{\mathrm{w}}_{k,m}(r)$ と書くことにする。 $\mathbb{J}^{\mathrm{w}}_{k,m}(r)$ の元のうち、テーラー展開 $\varphi(\tau,z)=\sum_{t=0}^{\infty}f_t(\tau)z^t$ において、$t<s$ では $f_t=0$ となるもの全体のなす $\mathbb{C}$-ベクトル空間を $\mathbb{J}^{\mathrm{w}}_{k,m}(r)[s]$ と書くことにし、写像 P_t を $\varphi\mapsto f_t$ と定義する。（なお、φ がヤコビ形式であるとは、 $m>0$ のときに、条件 **(J3)** において $n<0$ のかわりに $4nm-l^2<0$ としたものである。）ヤコビ形式とジーゲル保型形式とは非常に密接な関係にある。すなわち、重み k のジーゲル保型形式のフーリエ展開

$$F(Z)=\sum_{m=0}^{\infty}\varphi_m(\tau,z)p^m\in\mathbb{M}_k$$

を考えると、 $\varphi_m(\tau,z)\in\mathbb{J}^{\mathrm{w}}_{k,m}$ となる。（ケヒャーの主張により、各 φ_m は、条件 **(J3)** より強いヤコビ形式の条件を満たす。）ただし、この対応は 1 対 1 ではなく、任意のヤコビ形式がジーゲル保型形式のフーリエ展開の係数に現れるとは限らない。

2.2 ヤコビ形式を用いた次元の評価

先ほど述べたジーゲル保型形式のフーリエ展開を、もう少し精密に見てみることにする。

$$\mathbb{M}_k(r):=\left\{\,F\in\mathbb{M}_k\;\middle|\;\varphi_m=0\quad(m<r)\,\right\}$$

と定めれば、対応 $F\mapsto\varphi_r$ より、完全列

$$0\longrightarrow\mathbb{M}_k(r+1)\longrightarrow\mathbb{M}_k(r)\longrightarrow\mathbb{J}^{\mathrm{w}}_{k,m}$$

が得られる。ただし、この写像は全射ではない。

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\in\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z})$$

より導かれる $F\in\mathbb{M}_k$ の変換規則

$$F\begin{pmatrix}\tau&z\\z&\omega\end{pmatrix}=(-1)^kF\begin{pmatrix}\omega&z\\z&\tau\end{pmatrix}$$

に注意すれば、たとえば k が偶数のときには、より精密な完全列

$$0\longrightarrow\mathbb{M}_k(r+1)\longrightarrow\mathbb{M}_k(r)\longrightarrow\mathbb{J}^{\mathrm{w}}_{k,m}(r)$$

が得られる。すなわち

$$\dim\mathbb{M}_k\le\sum_{r=0}^{\infty}\dim\mathbb{J}^{\mathrm{w}}_{k,r}(r)$$

ということである。

次に、 k を偶数とし、 $\mathbb{J}^{\mathrm{w}}_{k,r}(r)$ の次元を評価する。写像 P_t は完全列

$$0\longrightarrow\mathbb{J}^{\mathrm{w}}_{k,m}(r)[t+2]\longrightarrow\mathbb{J}^{\mathrm{w}}_{k,m}(r)[t]\xrightarrow{P_t}\mathcal{M}_{k+t}(r)$$

を導く。ここで、$\mathcal{M}_{k+t}(r)$ は、重み $k+t$ の楕円モジュラ形式で、フーリエ展開が q^r 以降からはじまるもの全体のなす空間である。P_t の核が $\mathbb{J}^{\mathrm{w}}_{k,m}(r)[t+1]$ でなく $\mathbb{J}^{\mathrm{w}}_{k,m}(r)[t+2]$ になっている理由は、k が偶数のとき、弱ヤコビ形式は z について偶関数であるからである。大切なのは、本質的に Eichler-Zagier の本のなかで示されている、次の補題である。

補題　重み k が偶数のとき、$\mathbb{J}^{\mathrm{w}}_{k,m}(r)[2m+1]=\{0\}$。

証明　$\varphi(\tau,z)\in\mathbb{J}^{\mathrm{w}}_{k,m}$ が 0 でないとし、変数 τ を固定して φ を z の関数と考えることにする。このとき、φ の零点を通らない、原点を内部に含む積分路 $z\to z+1\to z+\tau+1\to z+\tau\to z$ がとれる。この積分路の内側の零点の個数は変換規則 **(J2)** より容易に計算でき、重複度を込めてちょうど $2m$ 個と求まる。よって φ の $z=0$ での零点の位数はたかだか $2m$ なので $\mathbb{J}^{\mathrm{w}}_{k,m}(r,2m+1)=\{0\}$。 □

この補題により、弱ヤコビ形式の次元の評価

$$\dim\mathbb{J}^{\mathrm{w}}_{k,m}(r)\leq\sum_{t=0}^{m}\dim\mathcal{M}_{k+2t}(r)$$

が得られる。よって、我々は、ジーゲル保型形式の次元の評価として

$$\dim\mathbb{M}_k\leq\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{r}\dim\mathcal{M}_{k+2t}(r)$$

を得ることができた。この右辺は、楕円モジュラ形式の次元だから、容易に計算できる。実際、具体的に計算することにより、不等式

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\dim\mathbb{M}_k)\,x^{2k}\leq\frac{1}{(1-x^4)(1-x^6)(1-x^{10})(1-x^{12})}$$

が導かれる。ただし、ここで記号「$\leq$」は, 各辺を x についての形式的巾級数と見て各項の係数ごとに「$\leq$」が成り立っているという意味で用いた。

実際にはこの不等式は等号が成立するのであるが、それを証明するためには、実際に生成元を構成し、その代数的独立性を調べねばならない。井草先生の論文 [Ig1, Ig2] では、生成元はテータ級数を用いて構成されている。しかし、現在では、重み偶数の生成元は、斎藤-黒川リフトを用いて容易に構成し、その代数的独立性を確かめることができる。以上が、筆者の論文 [Ao1] における井草の定理の別証明の要点である。

3　微分作用素を用いた保型形式環の構造決定法

3.1　Witt 保型形式

まず最初に、Witt 保型形式を定義する。

定義　$k\in\mathbb{Z}$ とする。正則関数 $\psi:\mathbb{H}\times\mathbb{H}\to\mathbb{C}$ が重み k の Witt 保型形式であるとは、ψ が、片方の変数を固定するごとにもう一方の変数について重み k の楕円モジュラー形式であることをいう。

重み k の Witt 保型形式全体のなす $\mathbb{C}$-ベクトル空間を $\mathbb{W}_k$ と書くことにする。特に、この定義において楕円モジュラー形式の部分をより強く $\mathcal{M}_k(r)$ の元であると変えたもののなす空間を $\mathbb{W}_k(r)$ と書くことにする。さらに、

$$\mathbb{W}_k^{\mathrm{sym}}(r) := \{\ \psi \in \mathbb{W}_k(r) \mid \psi(\tau,\omega) = \psi(\omega,\tau)\ \},$$

と定める。これらの空間の構造（基底）は、たとえば Witt の論文 [Wi] の付録に書かれている方針に従うなどして、極めて容易に決定できる。

3.2 Witt 保型形式を用いた次元の評価

ジーゲル保型形式 $F(Z) \in \mathbb{M}_k$ 上の微分作用素 D_m を

$$D_m(F)(\tau,\omega) := \left(\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^m}\ \frac{\partial^m F}{\partial z^m}\right)\begin{pmatrix}\tau & 0\\ 0 & \omega\end{pmatrix}$$

で定義する。これは、言い換えれば、 F を z でテーラー展開したときの、 z^m の項を取り出す操作である。さて、

$$\mathbb{M}_k[r] := \left\{\ F \in \mathbb{M}_k\ \middle|\ D_m(F) = 0 \quad (m < r)\ \right\}$$

と書くことにする。微分の連鎖律により $F \in \mathbb{M}_k[r]$ であれば $D_r(F) \in \mathbb{W}_{k+r}$ である。これにより、完全列

$$0 \longrightarrow \mathbb{M}_k[r+1] \longrightarrow \mathbb{M}_k[r] \xrightarrow{D_r} \mathbb{W}_{k+r}$$

が得られる。ここで、写像 D_r は全射ではない。前章でもあらわれた $F \in \mathbb{M}_k$ の変換規則

$$F\begin{pmatrix}\tau & z\\ z & \omega\end{pmatrix} = (-1)^k F\begin{pmatrix}\omega & z\\ z & \tau\end{pmatrix}$$

に注意すれば、たとえば k が偶数のときには、もう少し精密な完全列

$$0 \longrightarrow \mathbb{M}_k[2r+2] \longrightarrow \mathbb{M}_k[2r] \longrightarrow \mathbb{W}_{k+2r}^{\mathrm{sym}}(0)$$

が得られる。しかしまだ、右端の矢印は全射ではない。ジーゲル保型形式のフーリエ展開を

$$F(Z) = \sum_{n,l,m} a(n,l,m) q^n \zeta^l p^m \in \mathbb{M}_k[r]$$

とすれば

$$(D_r F)(\tau,\omega) = \sum_{n,m}\left(\sum_l a(n,l,m) l^r\right) q^n p^m$$

と書けるので、ジーゲル保型形式の変換規則によるフーリエ係数間の関係と、ファンデルモンドの行列式を使って計算すれば、 n または m が小さいところでは $a(n,l,m) = 0$ となることがわかる。これにより、より精密な完全列

$$0 \longrightarrow \mathbb{M}_k[2r+2] \longrightarrow \mathbb{M}_k[2r] \longrightarrow \mathbb{W}_{k+2r}^{\mathrm{sym}}(r)$$

が得られる。次元の評価としては

$$\dim \mathbb{M}_k \leq \sum_{r=0}^{\infty} \dim \mathbb{W}_{k+2r}^{\mathrm{sym}}(r)$$

ということである。右辺の次元は、楕円モジュラー形式の構造を知っていれば容易に計算でき、不等式

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\dim \mathbb{M}_k)\, x^{2k} \leq \frac{1}{(1-x^4)(1-x^6)(1-x^{10})(1-x^{12})}$$

が導かれる。証明の残りの部分はヤコビ形式を用いた場合と同様である。

4 応用

以下、前々節のヤコビ形式を用いる方法を **(J)** と、また、前節の微分作用素を用いる方法を **(W)** と略記する。この 2 つの方法は、いずれも初等的ながら、多変数の保型形式のなす空間の構造を決定する手段としては極めて有力なものである。今までに、次のような結果が得られている。

- 次数 2 のジーゲル保型形式（フルモジュラー $\Gamma = \mathrm{Sp}(2, \mathbb{Z})$ ）
  最初の構造決定は井草 [Ig1, Ig2](1962,1964) によってなされた。その後、Freitag [Fr1](1967) によって比較的簡単な別証明（アイデアは **(W)** にやや近い）が与えられた。方法 **(J)** による証明は筆者 [Ao1](2000)、方法 **(W)** による証明は van der Geer [Ge](2008) による。

- 次数 2 のジーゲル保型形式（レベル付き $\Gamma = \Gamma_0(N)$ $(N = 2, 3, 4)$ ）
  レベル 3 以下については伊吹山 [Ib1](1991) に、レベル 4 の場合には林田・伊吹山 [HI](2005) に結果が記されている。（青木・伊吹山 [AI](2005) でもふれている。）方法 **(J)** による証明（レベル 3 以下）は筆者 [Ao1](2000)、方法 **(W)** による証明は筆者 [Ao6](2008) による。

- 次数 2 のジーゲル保型形式（パラモジュラー、レベル 4 以下）
  最初の結果は、レベル 2 の場合についてで、伊吹山・小野寺 [IO](1997) によって示された。レベル 3 の場合については Dern [De](2002) によって示された。方法 **(J)** による証明は伊吹山・Poor・Yuen [IPY](2013) による。この結果は、筆者 [Ao7] によって若干一般化された。

- 次数 2 のジーゲル保型形式（ Sym_2 についてのベクトル値 ）
  フルモジュラーの場合には、まず偶数重みの場合について佐藤 [Sa](1986) により、一般の整数重みの場合については伊吹山 [Ib3](2001) により構造が決定されてた。レベル付きの場合には、レベル 4 以下の整数重みの場合について、方法 **(W)** を用いて筆者 [Ao6](2012) が構造を決定した。

- 次数 2 のエルミート保型形式
  最初の結果は、ガウス数体 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ の整数環 $\mathcal{O}$ によって定まる群 $\Gamma = \mathrm{Sp}_2(\mathcal{O})$ の場合についてで、Freitag [Fr1](1967) で与えられた。この場合については、Hermann [He](1995)、長岡 [Na](1996)、伊吹山 [Ib2](1999) などの結果があり、方法 **(J)** による証明は筆者 [Ao3](2002) による。アイゼンシュタイン数体 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ の整数環 $\mathcal{O}$ によって定まる群 $\Gamma = \mathrm{Sp}_2(\mathcal{O})$ の場合についての結果は、Dern(1996) によって得られており（c.f. Dern・Krieg [DK]）、筆者は同時期に方法 **(J)** による次元の評価を得ている。

- ヒルベルト保型形式
  方法 **(W)** と類似した方法が適用可能であり、筆者による結果 [Ao4](2004)（平行重みの場合）、 [Ao5](2008)（混合重みの場合）などが知られている。

5 ２つの方法の違いについて

5.1 次元の評価方法の考察

さて、２つの方法 **(J)** と **(W)** は、本質的に同じものなのだろうか、それとも、違うものなのだろうか。大雑把にみれば、いずれの方法も、巧妙な次元の評価を行っており、それは、 ω または τ によるフーリエ展開の係数の消え具合についての評価と、 z によるテーラー展開の係数の消え具合の評価である。先にフーリエ展開の評価を行い、次にテーラー展開の評価を行うのが方法 **(J)** であり、逆に先にテーラー展開の評価を行い、次にフーリエ展開の評価を行うのが方法 **(W)** である。こう書くと、両者手順の違いだけでほとんど同じことしかやっていないように思えるが、評価を打ち切るポイントの設定の方法は、両者で異なっている。この点について、方法 **(J)** での重要なポイントは、第２章で述べた補題であり、証明には関数論的手法、すなわち周期積分を用いている。一方、方法 **(W)** での重要なポイントは、第３章の後半で述べた部分であり、代数的方法、すなわち変換規則から形式的に導けるフーリエ係数間の関係と、ファンデルモンドの行列式を用いている。この両者は、ジーゲル保型形式の次元の評価を行うときには同じ結果を導くが、たとえば、弱ヤコビ形式の理論として第２章で述べた補題を代数的に示すことは不可能である。（ジーゲル保型形式の展開にあらわれない弱ヤコビ形式が存在するため。）ではやっぱり、この２つの方法は本質的に違うのであろうか？ van der Geer によるテキスト [Ge] では、筆者の方法 **(J)** による論文 [Ao1] をあげたうえで、 another variant （変種）として方法 **(W)** を紹介している。なんとも微妙な言い回しである。筆者は、方法 **(J)** による論文 [Ao1] を書いた直後に方法 **(W)** でも同様の結果が得られることを知っていたが、まさか同じネタで論文を再度書くわけにもいかず、放置していた。そのときには、両者の関係はよくわからなかったのが、最近になって、（筆者の見解として）両者の方法は、ひとつの一般的な方法の側面を違った部分から切り取っていたにすぎないと思うようになった。井草の定理の場合は、多変数の保型形式のなかであまりにも基本的なものであったため、一般的な方法をしっかりと見なくても、方法 **(J)** または方法 **(W)** という一部を見ただけで証明できてしまうので、２通りの次元の評価法があるように見えてしまったのである。このことは、ベクトル値のジーゲル保型形式について次元の評価を行おうとすれば、はっきりする。

5.2 ベクトル値ジーゲル保型形式

$s \in \mathbb{N}_0$ を非負整数とし、 $\rho : \mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(s+1,\mathbb{C})$ を有理表現とする。

定義　正則関数 $F : \mathbb{H}_2 \to \mathbb{C}^{s+1}$ が重み ρ の保型形式であるとは、任意の $M \in \Gamma$ に対し、 $F(Z) = \rho(CZ+D)^{-1} F(M\langle Z \rangle)$ が成り立っていることである。

特に ρ が既約表現であれば、 $k \in \mathbb{Z}$ をもちいて $\rho = \rho_{k,s} := \mathrm{Sym}^s \otimes \det^k$ と書けることが知られている。ここで、 Sym^s は以下の式で定義される表現である。

$$(u^s, u^{s-1}v, \ldots, v^s) = (x^s, x^{s-1}y, \ldots, y^s)\,\mathrm{Sym}^s(A) \quad (\ (u,v) = (x,y)A\ )$$

以下、 $s=2$、 $\Gamma = \mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z})$ として、表現が $\rho = \rho_{k,2}$ のときだけを扱う。

このベクトル値保型形式の対して、方法 **(J)** や方法 **(W)** は有効であろうか。実は、どちらの方法も有効である。筆者の論文 [Ao6] では方法 **(W)** を用いている。また、ベクトル値保型形式から導かれるヤコビ形式（ベクトル値ヤコビ形式）については、伊吹山・京村の論文 [IK] で構造が完全に決定されているので、もち

ろん方法 **(J)** も通用する。そして、よく考えると、それぞれの方法で実際に次元の評価を実行するとなれば、両者はまったく同じプロセスをふむことになるなのである。その理由は、 $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z})$ の元 $\left(\begin{smallmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{smallmatrix}\right)$ から導かれる変換規則

$$F\begin{pmatrix}\tau & z\\ z & \omega\end{pmatrix} = (-1)^k \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix} F\begin{pmatrix}\omega & z\\ z & \tau\end{pmatrix}$$

にある。この変換規則は、フーリエ展開の係数を調べるときに、各係数の第 1 成分と第 3 成分が非常に強く関連していることを示している。たとえば、方法 **(J)** を用いようとすると、ヤコビ形式の第 1 成分と第 3 成分を同時に見比べなることになり、ちょうど第 1 成分の ω についての制約が、第 3 成分の τ についての制約になる。なので、結局、ヤコビ形式を用いて次元を評価しようとしても、 2 つの変数 ω と τ の両方を同時に見比べねばならない。これはまさに、方法 **(W)** である。ベクトル値ジーゲル保型形式では、方法 **(J)** を用いようとしても、方法 **(W)** で使う議論を回避できないのである。

ということは、方法 **(W)** のほうが、方法 **(J)** より優れているのであろうか。これまた筆者の見解ではあるが、そうは言えないと思う。ジーゲル保型形式をいきなり z でテーラー展開する方法 **(W)** は、その先頭項しか Witt 保型形式にならない。（高次の項では変換規則に低次の項の影響があらわれる。）つまり、 Witt 保型形式だけでは、元のジーゲル保型形式の情報を再現するのは難しい。その点、ジーゲル保型形式を ω でフーリエ展開する方法 **(J)** では、すべての係数がヤコビ形式になるので、もとのジーゲル保型形式の情報が、比較的わかりやすくヤコビ形式にあらわれる。実際、斎藤-黒川リフトや Borcherds 無限積のように、具体的にヤコビ形式からジーゲル保型形式を構成する方法が知られている。一方で、Witt 保型形式からジーゲル保型形式を具体的に構成する方法は、おそらく知られていない。この点では、方法 **(J)** のほうが、方法 **(W)** より優れていると考えることもできる。結局、本稿で取り上げた 2 つの方法は、少なくとも Γ がフルモジュラーかレベル付き（ $\Gamma_0(N)$ ）のときには、どちらが偉いなどと言えない似たもの同士であると見なすのが妥当ではないだろうか。

References

[Ao1] H. Aoki, Estimating Siegel modular forms of genus 2 using Jacobi forms, *J. Math. Kyoto Univ.* **40-3**(2000), 581–588.

[Ao2] H. Aoki, Estimating the dimension of the space of Siegel modular forms of genus 2 withe level 2 and 3, Explicit Structure of Modular Forms and Zeta Functions (Hakuba, 2001), *Proceedings of Japan-German seminar*, 101–106.

[Ao3] H. Aoki, The graded ring of Hermitian modular forms of degree 2, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **72**(2002), 21–34.

[Ao4] H. Aoki, Estimate of the dimension of Hilbert modular forms by means of differential operator, Automorphic forms and Zeta functions (Rikkyo, 2004), *Proceedings of the Conference in Memory of Tsuneo Arakawa*, World Scientific, 20–28.

[Ao5] H. Aoki, Estimate of the dimensions of mixed weight Hilbert modular forms, *Commun. Math. Univ. St. Pauli* **57-1**(2008), 1–11.

[Ao6] H. Aoki, On vector valued Siegel modular forms of degree 2 with small levels, *Osaka J. Math.* **49-3**(2012), 625–651.

[Ao7] H. Aoki, On Siegel paramodular forms of degree 2 with small levels, *in preparation.*

[AI] H. Aoki, T. Ibukiyama, Simple graded rings of Siegel modular forms of small levels, differential operators and Borcherds products *Int. J. Math.* **16-3**(2005), 249–279.

[De] T. Dern, Paramodular forms of degree 2 and level 3, *Comment. Math. Univ. St. Paul.* **51-2**(2002), 157–194.

[DK] T. Dern, A. Krieg, Graded rings of Hermitian modular forms of degree 2, *Manuscripta Math.*, **110-2**(2003), 251–272.

[EZ] M. Eichler, D. Zagier, *The Theory of Jacobi Forms*, Progress in Math. 55, Birkhäuser, Boston, 1985.

[Fr1] E. Freitag, Modulformen zweiten Grades zum rationalen und Gaußschen Zahlkörper (German), *Sitzungsber. Heidelb. Akad. Wiss.,* (1967), 3–49.

[Fr2] E. Freitag, *Siegelsche Modulfunktionen*, GMW 254, Springer Verlag, Berlin (1983).

[Ge] G. van der Geer, Siegel modular forms and their applications, *The 1-2-3 of modular forms*, Universitext, Springer, Berlin, (2008) 181–245.

[He] C. F. Hermann, Some modular varieties related to P_4, *Abelian Varieties*, (Egloffstein 1993) de Gruyter, Berlin, 1995, 105–129.

[HI] S. Hayashida, T. Ibukiyama, Siegel modular forms of half integral weights and a lifting conjecture, *J. Math. Kyoto Univ.* **45-3**(2005), 489–530.

[Ib1] T. Ibukiyama, On Siegel modular varieties of level 3, *Int. J. Math.* **2-1**(1991), 17–35.

[Ib2] T. Ibukiyama, A remark on the hermitian modular forms, *Osaka University Research Reports in Mathematics*, **99-19**(1999).

[Ib3] T. Ibukiyama, Differential operators and structures of vector valued Siegel modular forms (Japanese), Algebraic number theory and related topics (Kyoto, 2000), *Surikaisekikenkyusho Kokyuroku* **1200**(2001), 71-81.

[Ig1] J. Igusa, On Siegel modular forms of genus two, *Amer. J. Math.* **84**(1962), 175–200.

[Ig2] J. Igusa, On Siegel modular forms of genus two (II), *Amer. J. Math.* **86**(1964), 392–412.

[IK] T. Ibukiyama, R. Kyomura, A generalization of vector valued Jacobi forms. *Osaka J. Math.* **48-3**(2011), 783–808.

[IO] T. Ibukiyama, F. Onodera, On the graded ring of modular forms of the Siegel paramodular group of level 2, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **67**(1997), 297–305.

[IPY] T. Ibukiyama, C. Poor, D. Yuen, Jacobi forms that characterize paramodular forms, *Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg* **83**(2013), 111–128.

[Kl] H. Klingen, *Introductory lectures on Siegel modular forms*, CSAM 20, Cambridge University Press (1990).

[Na] S. Nagaoka, A note on the structure of the ring of symmetric Hermitian modular forms of degree 2 over the Gaussian field, *J. Math. Soc. Japan* **48-3**(1996), 525–549.

[Sa] T. Satoh, On certain vector valued Siegel modular forms of degree two, *Math. Ann.* **274-2**(1986), 335–352.

[Wi] E. Witt, Eine Identität zwischen Modulformen zweiten Grades, *Abh. Math. Sem. Hansischen Univ.*, **14**(1941), 323–337.