Hilbert modular 曲面上の曲線の交差数と保型形式

東京理科大学理工学部　浜畑 芳紀

Hirzebruch-Zagier の論文 [HZ] “Intersection numbers of curves on Hilbert modular surfaces and modular forms of Nebentypus” を紹介する．この論文では, Hilbert modular 曲面上の Hirzebruch-Zagier 因子と呼ばれる特別な因子の交差数は weight 2 の保型形式の Fourier 係数であるということが示されている．

1 動機

必要な記号を準備する．p は $p \equiv 1 \pmod 4$ をみたす素数とし, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{p})$ は実 2 次体, $\sigma : K \to K$, $x = a + b\sqrt{p} \mapsto x' = a - b\sqrt{p}$ は K の $\mathbb{Q}$ 上の自明でない自己同型とする．O_K は K の整数環とし, $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ は複素上半平面とする．$SL_2(O_K)$ は H^2 に 1 次分数変換により作用するので, 商 $X := SL_2(O_K) \setminus H^2$ が存在する．これは非コンパクト複素曲面で有限個の特異点をもつ．

$$\overline{SL_2(O_K) \setminus H^2} = X \cup \{\text{cusps}\}$$

は $SL_2(O_K) \setminus H^2$ のコンパクト化で, $\widetilde{X}$ は $\overline{SL_2(O_K) \setminus H^2}$ の cusp 特異点を解消したものとする．$\overline{SL_2(O_K) \setminus H^2}$, $\widetilde{X}$ を Hilbert modular 曲面という．χ_p を mod p の Legendre 記号とし,

$$\Gamma_0(p) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z} \mid c \equiv 0 \pmod p) \right\}$$

とおく．f が weight k ($k \in 2\mathbb{N}$), Nebentypus の保型形式とは, f は H 上の正則関数で $\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(p)$ について, $f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \chi_p(a)(cz+d)^k f(z)$ が成立し, $\Gamma_0(p)$ の cusp で正則となることである．このような f 全体の

なす線型空間を $M_k(\Gamma_0(p),\chi_p)$ と書く．$f\in M_k(\Gamma_0(p),\chi_p)$ は,

$$f=\sum_{n=0}^{\infty}a(n)q^n \quad (q=\exp(2\pi iz))$$

と表せる.

$$M_k^+(\Gamma_0(p),\chi_p)=\left\{\sum_{n=0}^{\infty}a(n)q^n\in M_k(\Gamma_0(p),\chi_p)\mid \chi_p(n)=-1 \text{ のとき } a(n)=0\right\}$$

とおく．この空間の次元はHeckeにより計算されており, $\dim M_2^+(\Gamma_0(p),\chi_p)=\left[\frac{p-5}{24}\right]+1$ である（$[\cdot]$ はGauss記号）.

さて, Hilbert modular 曲面 $\widetilde{X}$ の算術種数 $\chi(\widetilde{X})$ はHirzebruch の論文の中で計算されているが, Serre はそれを見て1971年12月8日付の手紙でHirzebruch に次の問題を提示した.

問題 $\chi(\widetilde{X})$ が $\dim M_2^+(\Gamma_0(p),\chi_p)$ と等しくなるのはなぜか?

この問題を解決することが, Hirzebruch-Zagier [HZ] の研究動機となっている.

2 Hirzebruch-Zagier因子の交差数

2.1 Hirzebruch-Zagier 因子

$N\in\mathbb{N}$ をとって固定する.

$$\bigcup_{\substack{(a,b,\lambda)\in\mathbb{Z}^2\times O_K\\ abp+N(\lambda)=N}}\left\{(z_1,z_2)\in H^2 \;\middle|\; a\sqrt{p}z_1z_2+\lambda z_1-\lambda' z_2+b\sqrt{p}=0\right\}$$

の $SL_2(O_K)\setminus H^2$ における像, およびその $\widetilde{X}$ における閉包を T_N と書いて, discriminant N の Hirzebruch-Zagier divisor と呼ぶ. 記号を乱用して, T_N の $H_2(\widetilde{X},\mathbb{Q})$ におけるホモロジー類も T_N と書く.

2.2 T_N^c

$\widetilde{X}$ はコンパクト有理ホモロジー多様体であるから, 交差形式

$$\langle\ ,\ \rangle : H_2(\widetilde{X},\mathbb{Q})\times H_2(\widetilde{X},\mathbb{Q})\to\mathbb{Q}$$

が定義できる. これを使って, Hirzebruch-Zagier因子の交差数を計算する.

$\{S_k\}$ を $\overline{SL_2(O_K)\setminus H^2}$ の cusp 特異点を解消するときにできる曲線全体とする．S_k の $H_2(\widetilde{X},\mathbb{Q})$ におけるホモロジー類も S_k と書く．$H_2(\widetilde{X},\mathbb{Q})$ において，

$$T_N^c = T_N + \sum_k \alpha(N,k)S_k$$

を $\forall k$, $T_N^c \cdot S_k = 0$ となるように定義する．このとき $\alpha(N,K)\in\mathbb{Q}$ は, T_N^c に対して一意的に決まる．容易にわかることだが

$$T_M^c \cdot T_N^c = T_M^c \cdot T_N = T_M \cdot T_N^c$$

が成立する．

$$T_M^c \cdot T_N = (T_M \cdot T_N)_{SL_2(O_K)\setminus H^2} + (T_M \cdot T_N)_\infty$$

と書く．ここで第 1 項は $SL_2(O_K)\setminus H^2$ 上の交差数, 第 2 項は $\bigcup S_k$ 上の交差数を表す.

2.3 T_0^c

上で定義した T_N^c（$N\in\mathbb{N}$）のほかに $T_0^c \in H_2(\widetilde{X},\mathbb{Q})$ も定義しよう．

$$\begin{aligned}\omega_j &= -\frac{1}{2\pi}y_j^{-2}dx_j\wedge dy_j \quad (j=1,2),\\ \omega &= \omega_1\wedge\omega_2\end{aligned}$$

とおくと

$$\begin{aligned}\int_{SL_2(O_K)\setminus H^2}(\omega_1+\omega_2)\wedge(\omega_1+\omega_2) &= 2\int_{SL_2(O_K)\setminus H^2}\omega\\ &= 4\zeta_K(-1)\end{aligned}$$

となる．ただし, $\zeta_K(s)$ は Dedekind ゼータ関数である.

今 $\frac{1}{4}(\omega_1+\omega_2)$ に対応する $\mathrm{Im}(H_2(SL_2(O_K)\setminus H^2,\mathbb{Q})\to H_2(\widetilde{X},\mathbb{Q}))$ の元を T_0^c と定義する．T_0^c について次のことがいえる：

$$T_0^c\cdot T_0^c = \frac{1}{4}\zeta_K(-1), \tag{1}$$

$$T_0^c\cdot T_N = \frac{1}{2}\mathrm{vol}(T_N) \quad (N\in\mathbb{N}) \tag{2}$$

$$= -\frac{1}{24}\sum_{d|N}(\chi_p(d)+\chi_p(N/d))d. \tag{3}$$

2.4　交差数

$V := \{v \in M_2(K) \mid {}^t v = -\sigma(v)\}$, $V_{\mathbb{R}} := V \otimes \mathbb{R}$ とおくと, $V_{\mathbb{R}}$ は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間であり, $V_{\mathbb{R}}$ 上で行列式は, 符号 $(2,2)$ の 2 次形式 Δ を定める. $v \in V_{\mathbb{R}}$ に対し, $C_v := \{(z_1, z_2) \in H^2 \mid (z_1, 1)v^t(z_2, 1) = 0\}$ とおくと

$$C_v \neq \phi \;\Leftrightarrow\; \Delta(v) > 0.$$

さて $V_{\mathbb{R},z} := \{v \in V_{\mathbb{R}} \mid z \in C_v\}$, $V_{\mathbb{Z}} := M_2(O_K) \cap V_{\mathbb{R}}$ とおけば, $\{C_v \mid v \in V_{\mathbb{Z}}, \Delta(v) = N\}$ が T_N を与える. $V_z := V_{\mathbb{Z}} \cap V_{\mathbb{R},z}$ とおけば,

$$T_N \text{ が } z \text{ を通る} \;\Leftrightarrow\; \exists v \in V_z \ \text{ s.t. } \Delta(v) = N.$$

また, $\Delta|V_z$ は正定値で, $\mathrm{rank}V_z \leqq 2$ となる. $\mathrm{rank}V_z = 2$ のとき, $z \in H^2$ は special であるという. z が special のとき, $\Delta(v_1) = M, \Delta(v_2) = N$ となる 1 次独立な $v_1, v_2 \in V_z$ が存在するとき, T_M と T_N は z で交わる. このような z と $\Delta|V_z$ の形, (v_1, v_2) の数を決定しないといけない.

判別式 δ の整係数正定値原始的 2 元 2 次形式の同値類の数を $h(\delta)$ と書く.

$$h'(\delta) = \begin{cases} 1/3 & (\delta = -3) \\ 1/2 & (\delta = -4) \\ h(\delta) & (\text{その他}) \end{cases}, \qquad H(n) = \sum_{\substack{d \geqq 1 \\ d^2 | n}} h'(-n/d^2)$$

とおくと $H(n)$ は判別式 $-n$ の正定値 2 次形式の同値類の個数である.

$$H_p(N) := \sum_{\substack{t \in \mathbb{Z} \\ t^2 \leqq 4N \\ t^2 \equiv 4N \pmod{p}}} H\left(\frac{4N - t^2}{p}\right)$$

を使うと, $(T_M \cdot T_N)_{SL_2(O_K)\backslash H^2}$ を表示することができて, $\nu_p(N) \leqq \nu_p(M)$ のとき,

$$\begin{aligned} (T_M \cdot T_N)_{SL_2(O_K)\backslash H^2} &= (\text{相異なる既約曲線の交差数}) \\ &\quad + (\text{self-intersection number からの寄与}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{d|(M,N)} d\left(\chi_p(d) + \chi_p(N/p)\right) H_p(MN/d^2). \end{aligned}$$

となる. ただし, $\nu_p(*)$ は p の exponent.

また

$$I_p(N) = \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{\substack{\lambda \in O_K, \lambda:\text{総正} \\ \lambda\lambda' = N}} \min(\lambda, \lambda')$$

を使うと, $(T_M\cdot T_N)_\infty$ を表示することができて,

$$(T_M\cdot T_N)_\infty = \sum_{d|(M,N)} d\cdot\chi_p(d)I_p(MN/d^2)$$

となる. よって次の定理がわかる：

定理 1 (Hirzebruch-Zagier) $\nu_p(N)\leqq\nu_p(M)$ のとき,

$$T_M^c\cdot T_N = \frac{1}{2}\sum_{d|(M,N)} d\left(\chi_p(d)+\chi_p(N/d)\right)\times\left(H_p(MN/d^2)+I_p(MN/d^2)\right).$$

特に

$$T_N^c\cdot T_1 = H_p(N)+I_p(N).$$

注意 2 この定理は, 一般の判別式をもつ実2次体の場合に拡張されている ([Hausmann]) .

3 交差数からつくられる保型形式

3.1 $M_2(\Gamma_0(p),\chi_p)$ の構造

$\Gamma_0(p)$ は2つの cusp ∞, 0 をもち, それぞれに Eisenstein 級数 E_1, E_2 が付随している. これらは

$$E_1(z) = \sum_{N=1}^{\infty}\left(\sum_{d|N}\chi_p(N/d)d\right)q^N, \tag{4}$$

$$E_2(z) = -\frac{p^{3/2}}{4\pi^2}L(2,\chi_p)+\sum_{N=1}^{\infty}\left(\sum_{d|N}\chi_p(d)d\right)q^N \tag{5}$$

と表せる. $M_2(\Gamma_0(p),\chi_p)$ の中で, cusp form 全体のなす部分空間を $S_2(\Gamma_0(p),\chi_p)$ と書くと

$$M_2(\Gamma_0(p),\chi_p) = S_2(\Gamma_0(p),\chi_p)\oplus E_1\oplus E_2$$

と直和分解される.

$T(M)$ ($M\in\mathbb{N}$) を $M_2(\Gamma_0(p),\chi_p)$ 上に作用する Hecke 作用素とすると, $f(z)=\sum_{N=0}^{\infty}a(N)q^N\in M_2(\Gamma_0(p),\chi_p)$ に対して,

$$f|T(M) = \sum_{N=0}^{\infty}\left(\sum_{d|(M,N)}\chi_p(d)d\cdot a(MN/d^2)\right)q^N$$

となる. Eisenstein 級数 E_1, E_2 は同時固有関数であり, $T(M)$ の固有値は M 番目の Fourier 係数である. $f(z) = \sum_{N=1}^{\infty} a(N)q^N \in S_2(\Gamma_0(p), \chi_p)$ を正規化された固有形式とすると, $\overline{f(-\overline{z})} = \sum_{N=1}^{\infty} \overline{a(N)}q^N$ もそうである.

$$
\begin{aligned}
f_+(z) &:= \frac{1}{2}\left(f(z) + \overline{f(-\overline{z})}\right) = \sum_{N=1}^{\infty} \mathrm{Re}(a(N))q^N, \\
f_-(z) &:= \frac{1}{2}\left(f(z) - \overline{f(-\overline{z})}\right) = i\sum_{N=1}^{\infty} \mathrm{Im}(a(N))q^N
\end{aligned}
$$

とおく. $M_2^{\pm}(\Gamma_0(p), \chi_p)$ を

$$
\left\{ \sum_{N=0}^{\infty} a(N)q^N \in M_2(\Gamma_0(p), \chi_p) \mid \chi_p(N) = \mp 1 \text{ のとき } a(N) = 0 \right\}
$$

（複号同順）として定義して, さらに $S_2^{\pm}(\Gamma_0(p), \chi_p)$ を $M_2^{\pm}(\Gamma_0(p), \chi_p)$ の中の cusp form 全体のなす部分空間とすると, $f \mapsto f_+$, $f \mapsto f_-$ を linear に拡張することにより, 射影

$$
\pi_{\pm} : S_2(\Gamma_0(p), \chi_p) \to S_2^{\pm}(\Gamma_0(p), \chi_p)
$$

が得られる. これを使うと直和分解

$$
S_2(\Gamma_0(p), \chi_p) = S_2^{+}(\Gamma_0(p), \chi_p) \oplus S_2^{-}(\Gamma_0(p), \chi_p)
$$

が証明できる. さて E_1, E_2 については $E_1 \pm E_2 \in M_2^{\pm}(\Gamma_0(p), \chi_p)$ が成り立ち,

$$
\pi_{\pm}(E_1) = \pm\pi_{\pm}(E_2) = (E_1 \pm E_2)/2
$$

と直和分解

$$
M_2^{+}(\Gamma_0(p), \chi_p) = S_2^{+}(\Gamma_0(p), \chi_p) \oplus (E_1 + E_2)/2
$$

がわかる.

3.2 Hirzebruch-Zagier の結果

各 $M \geq 0$ に対して,

$$
\Phi(T_M^c) := \sum_{N=0}^{\infty} (T_M^c \cdot T_N^c)q^N
$$

と定義すると, $\Phi(T_M^c) \in M_2^{+}(\Gamma_0(p), \chi_p)$ となることを見てみよう.

$M = 0$ の場合: (1) と (3) より

$$
\Phi(T_0^c) = \frac{1}{2}\zeta_K(-1) - \frac{1}{24}\sum_{N=1}^{\infty}\sum_{d|N}\left(\chi_p(d) + \chi_p(N/d)\right) dq^N.
$$

$\zeta_K(s)$ の関数等式と $\zeta_K(s)=\zeta(s)L(s,\chi_p)$ を使うと

$$\frac{1}{2}\zeta_K(-1)=\frac{p^{3/2}}{16\pi^4}\zeta_K(2)=\frac{p^{3/2}}{96\pi^2}L(2,\chi_p)$$

となるから, (4) と (5) より $\Phi(T_0^c)=-(E_1+E_2)/24\in M_2^+(\Gamma_0(p),\chi_p)$ が言えた.

$M=1$ の場合: $H_p(0)=-1/12,\quad I_p(0)=0$ とおいて

$$\varphi_p(z)=\sum_{N=0}^{\infty}\left(H_p(N)+I_p(N)\right)q^N$$

を定義する. このとき $\Phi(T_1^c)=\varphi_p(z)$ となる. ここで次の結果を紹介する.

定理 3 (Holomorphic projection priciple, cf. [Geer], [GZ], [Sturm])
$g^*(z)=\sum_{N=-\infty}^{\infty}a_N(y)q^N$ を weight 2, level D, character χ の non-holomorphic modular form で

$$g^*(z)=a+O(y^{-\lambda})\quad(\exists a\in\mathbb{C},\exists\lambda>0)$$

が成立するものとする. $N\in\mathbb{N}$ に対して

$$a_N=4nN\int_0^\infty a_N(y)e^{-4\pi Ny}dy$$

とおくと

$$g(z)=a+\sum_{N=1}^{\infty}a_Nq^N\in M_2(\Gamma_0(D),\chi).$$

さて

$$\begin{aligned}
\beta(y) &= \frac{1}{16\pi}\int_1^\infty u^{-3/2}e^{-4\pi yu}du,\\
\mathcal{H}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty}H(n)q^n+\frac{1}{\sqrt{y}}\sum_{t=-\infty}^{\infty}\beta(t^2y)e^{-2\pi it^2z},\\
\theta(z) &= \sum_{s=-\infty}^{\infty}q^{s^2},\\
\varphi_p^*(z) &= \mathcal{H}(pz)\theta(z)|U_4
\end{aligned}$$

とおく. ただし, $f|U_4=\frac{1}{4}\sum_{m=1}^{4}f\left(\frac{z+m}{4}\right)$ とする. このとき, $a=H_p(0),\quad\lambda=1/2$ について Holomorphic projection formula を使えば $\Phi(T_1^c)\in M_2^+(\Gamma_0(p),\chi_p)$ が言える. さらに $\varphi_p(z)$ の各 Fourier 係数は実数であるから, $\Phi(T_1^c)\in M_2^+(\Gamma_0(p),\chi_p)$ が証明できた.

一般の $M > 0$ については, $\Phi(T^c_M) = \pi_+(\varphi_p | T(M))$ が成立するので $\Phi(T^c_M) \in M^+_2(\Gamma_0(p), \chi_p)$.

$\mathbb{T}$ を $H_2(\widetilde{X}, \mathbb{C})$ の部分空間で, ホモロジー類 T^c_N 全体で生成されたものとする.

定理 4 (Hirzebruch-Zagier) 写像

$$\Phi : \mathbb{T} \to M^+_2(\Gamma_0(p), \chi_p), \quad C \mapsto \sum_{N=0}^{\infty} (C \cdot T^c_N) q^N$$

は単射.

証明　Hodge index theorem より, 代数的 cycle のなす空間上で intersection form の符号は $(1, \rho - 1)$. $T^c_0 \cdot T^c_0 > 0$ だから, T^c_0 の直交補空間上で負値. $C \in \mathbb{T}$ が 0 にうつるとき, $\forall N \geqq 0$ に対して, $C \cdot T^c_N = 0$. $C \cdot C = 0$ となり, $C = 0$. □

3.3　Φ の全単射性

H^2 の involution $(z_1, z_2) \mapsto (z_2, z_1)$ からひきおこされる $\widetilde{X}$ の involution を τ とし, $\widetilde{X}_\tau$ を $\widetilde{X}/\tau$ の特異点の minimal resolution とする. $\mathbb{H} := H^2(\widetilde{X}_\tau, \mathbb{C})$ を Hodge 分解したときの $(1,1)$ 型の部分空間を $H^{1,1}(\widetilde{X}_\tau)$ と書く. $S_2(SL_2(O_K))$ を, $SL_2(O_K)$ に対する weight 2 の cusp forms の空間とする.

$$j : \mathbb{C} \oplus S_2(SL_2(O_K)) \to H^{1,1}(\widetilde{X}_\tau)$$

を次のように定義する. $f \in S_2(SL_2(O_K))$ に対し,

$$\frac{i}{2} \left(f(\epsilon_0 z_1, \epsilon'_0 \overline{z_2}) dz_1 \wedge d\overline{z_2} + f(\epsilon_0 z_2, \epsilon'_0 \overline{z_1}) dz_2 \wedge d\overline{z_1} \right)$$

の定めるコホモロジー類を対応させ（ϵ_0 は K の基本単数）, 第 1 成分の 1 に対して

$$\frac{1}{16\pi i} \left(\frac{1}{(\mathrm{Im}\, z_1)^2} dz_1 \wedge d\overline{z_1} + \frac{1}{(\mathrm{Im}\, z_2)^2} dz_2 \wedge d\overline{z_2} \right)$$

の定めるコホモロジー類を対応させる. このとき j は単射になるが, $\mathrm{Im}(j)$ を $\mathbb{U}$ と書くことにする. T^c_N の Poincaré-dual は $H^{1,1}(\widetilde{X}_\tau)$ のコホモロジー類を定めるが, 実際には $\mathbb{U}$ に含まれる. T^c_N から決まるコホモロジー類全体で生成される $\mathbb{U}$ の部分空間を $\mathbb{F}$ とすると, 定理 4 より

$$\Phi' : \mathbb{F} \to \mathbb{M} := M^+_2(\Gamma_0(p), \chi_p), \quad K \mapsto \sum_{N=0}^{\infty} (T^c_N \cdot K) q^N$$

は単射である．定理4の証明からわかるが，すべての T_N^c と直交するような $K \in \mathbb{F}$ は0となる．よって $\mathbb{F}^\perp$ を $\mathbb{F}$ の直交補空間とすると，$\mathbb{H} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{F}^\perp$ がいえる．したがって上の Φ' の定義域が拡張できて $\Phi' : \mathbb{H} \to \mathbb{M}$ を得る．

以上からわかることを列挙する．

$\mathbb{F} \subset \mathbb{U} \subset \mathbb{H}$,

$\dim \mathrm{Im}(\Phi') = \dim \mathbb{F}$,

$\dim \mathbb{U} = 1 + \dim S_2(SL_2(O_K)) = [(p-5)/24] + 1$（Hirzebruch の結果），

$\dim \mathbb{M} = [(p-5)/24] + 1$（Hecke の結果）．

Hirzebruch はこれらを参考にして次の予想を立てた．

予想 5 $\mathbb{F} = \mathbb{U}$ であり，$\Phi' : \mathbb{U} \to \mathbb{M}$ は同型．

定理4より $\Phi : \mathbb{T} \to \mathbb{M}$ の全射性を示せばよいが，これを保型形式の言葉で言い換えることができる．

予想 6 $\pi_+(\varphi_p | T(M))$ 全体は $M_2^+(\Gamma_0(p), \chi_p)$ を生成する．

この予想は Oda と Zagier によって独立に証明された．

定理 7 (Oda, Zagier) $\pi_+(\varphi_p | T(M))$ $(p \nmid M)$ 全体は $M_2^+(\Gamma_0(p), \chi_p)$ を生成する．

この定理より次の結果がわかる．

定理 8 $\Phi : \mathbb{T} \to \mathbb{M}$, $\Phi' : \mathbb{U} \to \mathbb{M}$ は同型．

系 9
$$\dim \mathbb{T} = \left[\frac{p-5}{24} \right] + 1.$$

系 10 次は同値：

(1) $\forall \sum a(n) q^n \in M_2^+(\Gamma_0(p), \chi_p)$ に対して，$\sum \lambda_i a(n_i) = 0$.

(2) $\mathbb{T}$ において，$\sum \lambda_i T_{n_i}^c = 0$.

3.4 算術種数

Serre の提示した問題は Φ' が同型であることから解決する．このことについて説明したい．

$\widehat{X}$ を X の smooth コンパクト化とする．Ω^p を $\widehat{X}$ 上の正則 p-形式の層とし，$h^{p,q}$ を線型空間 $H^q(\widehat{X}, \Omega^p)$ の次元とすると，$\widehat{X}$ の算術種数 $\chi(\widehat{X})$ は $\chi(\widehat{X}) = h^{0,0} - h^{0,1} + h^{0,2}$ として定義された．$h^{0,0} = 1$ で $h^{0,2} = h^{2,0} =$

$\dim S_2(SL_2(O_K))$ であることが知られている. $\widehat{X}$ は単連結だから, $h^{0,1}=0$. よって

$$
\begin{aligned}
\chi(\widetilde{X}) &= \chi(\widehat{X}) \\
&= 1+\dim S_2(SL_2(O_K)) \\
&= \dim M_2^+(\Gamma_0(p),\chi_p) \quad (\dim \mathbb{U}=\dim \mathbb{M})
\end{aligned}
$$

が成立する.

3.5 補足

1. 写像 j と Φ' の合成は $S_2(SL_2(O_K))$ から $S_2(\Gamma_0(p),\chi_p)$ への写像を定め, Petersson 内積に関して（定数倍を除いて）Doi-Naganuma lift （[桂田] 参照）$\iota: S_2(\Gamma_0(p),\chi_p)\to S_2(SL_2(O_K))$ の adjoint になる. この結果も Oda と Zagier によって独立に証明された.

2. T_N^c 全体から generating series $\sum_{N=0}^{\infty} T_N^c q^N \in H_2(\widetilde{X},\mathbb{Q})\otimes\mathbb{Q}[[q]]$ をつくる. そのとき $H_2(\widetilde{X},\mathbb{Q})$ 上の線型形式 λ について, $\sum_{N=0}^{\infty}\lambda(T_N^c)q^N \in M_2^+(\Gamma_0(p),\chi_p)$ となることがいえる. Borcherds の結果からもこのことが得られることを簡単に説明する. 使用する記号, 結果については [河合] を参照されたい.

形式的 Laurent 級数 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c(n)q^n$ に対し,

$$
\widetilde{c}(n)=\begin{cases} c(n) & (p\not| n) \\ 2c(n) & (p|n) \end{cases}
$$

とおく. このとき（[河合] 定理 5.1 より）形式的べき級数 $\sum_{m\geq 0} b(m)q^m$ が $M_2^+(\Gamma_0(p),\chi_p)$ の元であるためには, weakly holomorphic modular forms の空間 $W_0^+(\Gamma_0(p),\chi_p)$ の任意の元 $f=\sum_n c(n)q^n$ に対して

$$
\sum_{n\leq 0}\widetilde{c}(n)b(-n)=0
$$

となることが必要かつ十分である. これと Borcherds の定理 ([河合] 定理 5.2(i), (ii)) を使うと上記のことが結論づけられる.

4 おわりに

代数的 cycle の交差数が保型形式の Fourier 係数として現れるという現象は, Riemann 幾何学, reductive dual pair, テータ対応などの理論を

使って広く研究されている．このようなことを研究している数学者は Hirzebruch, Zagier, Oda の他にも多数おり, R. Borcherds, J. Bruinier, J. Cogdell, J. Getz, B. Gordon, C. Hermann, S. Kudla, J. Millson, S. Rallis, G. Schiffmann, Y. Tong, M. Tsuzuki, S. Wang とその共同研究者等である．Hirzebruch-Zagier の結果に興味をもち, 関連する結果を知りたい方はこの人たちの論文をご覧下さい.

参考文献

[Geer] G. van der Geer, Hilbert Modular Surfaces, Springer-Verlag, 1988.

[GZ] B. Gross and D. Zagier, Heegner points and derivatives of L-series, Invent. Math. **84** (1986), 225-320.

[Hausmann] W. Hausmann, Kurven auf Hilbertschen Modulflächen, Bonner Math. Schriften **123** (1980).

[HZ] F. Hirzebruch and D. Zagier, Intersection numbers of curves on Hilbert modular surfaces and modular forms of Nebentypus, Invent. Math. **36** (1976), 57-113.

[桂田] 桂田英典, Doi-Naganuma lift およびそれに関連する話題, 本報告集.

[河合] 河合悠介, Borcherds の無限積 $-$ $O(2,2)$ の場合 $-$, 本報告集.

[Oda1] T. Oda, On modular forms associated with indefinite quadratic forms of signature $(2, n-2)$, Math. Ann. **231** (1977), 97-144.

[Oda2] T. Oda, Introduction to Hilbert modular varieties, 本報告集.

[Sturm] J. Sturm, Projections of C^∞ automorphic forms, Bull. Amer. Math. Soc. **2** (1980), 435-439.

[Zagier] D. Zagier, Modular forms whose Fourier coefficients involve zeta-functions of quadratic fields. In: Modular Functions of One Variable VI, Lecture Notes in Math. **627** (1977), 105-169, Springer-Verlag.