保型形式から ℓ 進表現, モティーフへ

東北大学理学研究科　　花村昌樹

1　モジュライ M_n とコンパクト化

(1.1) k を代数的閉体とする. $n \geq 3$ は k の標数と互いに素とする. k 上の楕円曲線 E の n 分点のなす群 ${}_nE$ は $(\mathbb{Z}/n)^2$ に同型である. 同型写像 $\alpha : {}_nE \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/n)^2$ を E の レベル n 構造 という.

S をスキーム, $f : E \to S$ を楕円曲線とする. (とくに零切断 $0 : S \to E$ が与えられている. また各ファイバーは楕円曲線である.) f のレベル n 構造とは同型 $\alpha : {}_nE \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/n)^2_S$ のことである. ここで ${}_nE = \mathrm{Ker}[n : E \to E]$ は S 上の群スキームである.

$n \geq 3$ を固定する. 各 S に対し, 楕円曲線 $f : E \to S$ とレベル n 構造の組 $(f : E \to S,\ \alpha)$ の全体を考え, その同型類のなす集合を $F(S)$ とする:

$$F(S) = \{(f : E \to S,\ \alpha)\}/\cong$$

反変函手 $S \mapsto F(S)$ は表現可能である. $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$ 上のアフィンなスキーム M_n で $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$ 上スムーズかつ次元が 1 であるものが存在し, この関手を表現する. とくに, M_n のうえの楕円曲線 $f : E \to M_n$ とレベル n 構造 $\alpha : {}_nE \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/n)^2$ が存在し, $(f : E \to M_n,\ \alpha)$ は普遍性をもつ.

とくに $\mathrm{ch}\,k \nmid n$ なる代数的閉体 k に対し, k 上のスムーズなアフィン曲線 M_n と, そのうえのレベル n 構造つきの普遍楕円曲線 $E \to M_n$ が存在する.

(1.2) $k = \mathbb{C}$ のとき M_n と E は次のように与えられる. M_n は互いに同型な $\varphi(n)$ 個の連結成分をもち, そのひとつ M_n^0 は

$$M_n^0 = \Gamma(n) \diagdown H$$

である. ここで $H = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\,\tau > 0\}$ は上半平面で, $SL(2, \mathbb{R})$ が H に通常に $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \cdot \tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$ で作用する.

$$\Gamma(n) = \{\gamma \in SL(2, \mathbb{Z}) \mid \gamma \equiv I \mod n\}$$

は H に離散的かつ固定点なしに作用する.

各 $\tau \in H$ は格子 $L_\tau = \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$ と楕円曲線 $E_\tau = \mathbb{C}/L_\tau$ を定める. $\gamma \in \Gamma(1) = SL(2,\mathbb{Z})$ に対し $E_{\gamma\tau}$ と E_τ は同型である. E_τ の n 分点は

$$ {}_nE_\tau = \left(\frac{1}{n}L_\tau\right)/L_\tau $$

で与えられ, $m \in (\mathbb{Z}/n)^*$ に対し, $\{\frac{\tau}{n}, \frac{m}{n}\}$ はその $\mathbb{Z}/n$ 上の基を与える. よってレベル n 構造 $\alpha_m : {}_nE_\tau \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/n)^2$ で

$$ \alpha_m^{-1}(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}) = \frac{\tau}{n},\ \alpha_m^{-1}(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}) = \frac{m}{n} $$

なるものが存在する. 任意のレベル n 構造つきの楕円曲線はこのように得られる (E_τ, α) に同型である. $\gamma \in \Gamma(n)$ に対し $(E_{\gamma\tau}, \alpha)$ と (E_τ, α) は同型である.

M_n の成分 $(M_n)_m$ は $m \in (\mathbb{Z}/n)^*$ で添字づけられ, $(M_n)_m$ は $\Gamma(n)\diagdown H$ に同型であり, $\tau \in H$ には (E_τ, α_m) が対応する. とくに $m = 1$ のとき対応する成分 $(M_n)_1 = M_n^0$ のうえでは, $\tau \in H$ には (E_τ, α_1),

$$ \alpha^{-1}(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}) = \frac{\tau}{n}, \quad \alpha^{-1}(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}) = \frac{1}{n}, $$

が対応する.

M_n^0 のうえの普遍族 $E \to M_n^0$ は次のように構成される. まず加法群 $\mathbb{Z}^2$ を $H \times \mathbb{C}$ に

$$ (m,n)\cdot(\tau, z) = (\tau,\ z + m\tau + n) $$

で作用させ, その商を E_H とすると, 射影 $E_H \to H$ は E_τ をファイバーとする楕円曲線である. $\Gamma(n)$ を $H \times \mathbb{C}$ に

$$ \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\cdot(\tau, z) = (\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\ \frac{z}{c\tau+d}) $$

で作用させる. これは $\mathbb{Z}^2$ の作用を正規化するので $\Gamma(n)$ は $E_H \to H$ にも作用する. その作用による商を E とする. 射影 $f : E \to \Gamma(n)\diagdown H = M_n^0$ がみちびかれる. f は楕円曲線で各ファイバーは E_τ であり, さらにレベル n 構造 α_1 をもつ.

$$ \begin{array}{ccc} E_H & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow f \\ H & \longrightarrow & M_n^0 \end{array} $$

別の述べ方をすると，$E = (\Gamma(n) \ltimes \mathbb{Z}^2)\diagdown(H \times \mathbb{C})$　である．同様に各成分 $(M_n)_m$ のうえの楕円曲線とレベル n 構造が与えられ，これらをまとめると M_n のうえの普遍楕円曲線 $E \to M_n$ を得る．

レベル構造 α は ${}_nE$ の順序つき基底 $(t_1,\ t_2)$ を与える．Weil pairing $e_n : {}_nE \times {}_nE \to \mu_n$ により $e_n(t_1,\ t_2) = e^{\frac{2\pi i m}{n}},\ m \in (\mathbb{Z}/n)^*$ が定まる．$m \in (\mathbb{Z}/n)^*$ に対応する (E, α) のモジュライが $(M_n)_m$ である．

(1.3) M_n のコンパクト化 $\overline{M_n}$ および E のコンパクト化 $f : \overline{E} \to \overline{M_n}$ を $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$ のうえで代数的に構成することができる [DeRa]．$\overline{M_n}$ は "一般化された楕円曲線 + レベル n 構造" の fine モジュライである．

$k = \mathbb{C}$ のとき，これらは以下のように与えることができる．M_n のコンパクト化 $\overline{M_n}$ は

$$\overline{M_n} = \Gamma(n)\diagdown(H \cup \{\text{cusp の集合 }\})$$

の形であり，cusp ∞ の近傍では次のように与えられる．

$\Gamma_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \Gamma(n)$ を巡回部分群，$c > 0$ を十分大，$H_c = \{\tau \in H \mid \operatorname{Im}\tau > 0\}$ とすると，写像

$$(\Gamma_1\diagdown H_c) \cup \{\infty\} \longrightarrow \Gamma(n)\diagdown H^*$$

は開集合の埋めこみであり，前者は半径 $e^{-\frac{2\pi c}{n}}$ の開円板 D に写像 $\tau \mapsto q = e^{\frac{2\pi i \tau}{n}}$ により同型である．

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_1\diagdown H_c \cup \{\infty\} & \xrightarrow{e^{\frac{2\pi i\tau}{n}}} & D \\ \bigcup & & \bigcup \\ \Gamma_1\diagdown H_c & \longrightarrow & D^* = D - \{0\} \end{array}$$

$\Gamma_1\diagdown H_c$ は穴のあいた開円板 D^* に同型である．他の cusp $s \in \mathbb{Q}$ に対しても $\rho \in SL(2, \mathbb{R})$ を $\rho(s) = \infty$ なるようにとり，同様に考えることができる．

$f : \overline{E} \to \overline{M}$ は ∞ の近傍 D で次のように与えることができる．$E|_{D^*}$ は $H_c \times \mathbb{C}$ を $\Gamma_1 \ltimes \mathbb{Z}^2$ の作用で割って得られるが，この作用を $\Gamma_1 \ltimes \mathbb{Z}^2$ の部分群

$$\Gamma_1 \ltimes \mathbb{Z}\cdot(0,\ 1)\ \subset\ \Gamma_1 \ltimes \mathbb{Z}^2$$

に制限すると，次のようである:

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & : & (\tau, z) \mapsto (\tau + n, z) \\ (0,\ 1) & : & (\tau, z) \mapsto (\tau, z+1) \end{array}$$

よって $H_c \times \mathbb{C}$ の $\Gamma_1 \ltimes \mathbb{Z} \cdot (0,1)$ による商は写像

$$(\tau, z) \mapsto \left(q = e^{\frac{2\pi i\tau}{n}}, t = e^{2\pi iz}\right)$$

により $D^* \times \mathbb{C}^*$ と同型である．そして $(\Gamma_1 \ltimes \mathbb{Z}^2)/(\Gamma_1 \ltimes \mathbb{Z} \cdot (0,1)) = \mathbb{Z} \cdot < \sigma >$ は $D^* \times \mathbb{C}^*$ に,

$$\sigma : (q,\ t) \mapsto (q,\ q^n t)$$

と作用し, その商は $E|_{D^*}$ である．

E_{D^*} は D^* のうえの自明なトーラス・バンドルを $\mathbb{Z}$ の作用で割って得られるので, このトーラス・バンドルを D のうえの “トーラス・バンドルの退化” に拡張し, それを $\mathbb{Z}$ で割って E_{D^*} を含み D に固有写像をもつ多様体 $\overline{E}_D$ を得ることを考える．つまり, $D^* \times \mathbb{C}^*$ を開集合として含み, D に写像を持つような (有限型でない) スムーズなスキーム $(D^* \times \mathbb{C}^*)^\sim$ で, 次の図式が可換であり, $\mathbb{Z}$ の作用が (ファイバーを保つ) 作用に拡張を持つものを構成する．

$$\begin{array}{ccc} D^* \times \mathbb{C}^* & \longrightarrow & (D^* \times \mathbb{C}^*)^\sim \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^* & \longrightarrow & D \end{array}$$

この作用は真性不連続で固定点を持たないので, その商 $\overline{E}_D$ をとることができ, 図式

$$\begin{array}{ccc} E_{D^*} & \longrightarrow & \overline{E}_D \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^* & \longrightarrow & D \end{array}$$

を得る．ここで $\overline{E}_D \to D$ は固有写像となる．各 cusp においてこのように構成される退化を寄せ集め, $f : \overline{E} \to \overline{M}$ を得る．

$(D^* \times \mathbb{C}^*)^\sim$ の構成はトーリック幾何を用いて次のようになされる．$\mathbb{R}^2$ の扇を, $i \in \mathbb{Z}$ に対し

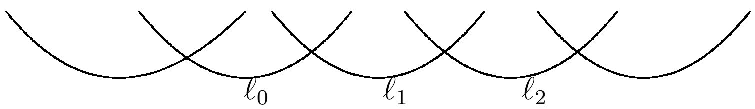
$$\Delta_i = (1,\ i),\ (1,\ i+1)\ \text{ で生成される cone(錘)}$$

(およびその境界) により与えられるものとする．対応するトーリック多様体 X_Δ は各 i に対し $\mathbb{C}^2$ を準備し, それらを貼りあわせることにより得られる．X_Δ は $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ を開集合として含み, 写像 $p : X_\Delta \to \mathbb{C}$ を持ち, 次は

可換:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* & \longrightarrow & X_\Delta \\ \downarrow{\scriptstyle p_1} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C} \end{array}$$

X_Δ の $0 \in \mathbb{C}$ におけるファイバーは有理曲線 $\mathbb{P}^1$ の $i \in \mathbb{Z}$ で添字づけられた鎖である:



X_Δ の D への制限 $p^{-1}(D)$ を $(D^* \times \mathbb{C}^*)^\sim$ と定める. $\mathbb{Z}$ の $\mathbb{R}^2$ への作用を

$$\sigma : (a,\ b) \ \mapsto\ (a + nb,\ b)$$

で定めると, 扇に作用する. 従って X_Δ および $(D^* \times \mathbb{C}^*)^\sim$ に作用し, 後者の作用は固定点を持たない. よって商 $\overline{E}_D = \mathbb{Z}\diagdown(D^* \times \mathbb{C}^*)^\sim$ が存在する. σ は ℓ_i を ℓ_{i+n} にうつすので, $\overline{E}_D$ の 0 におけるファイバーは n 個の $\mathbb{P}^1$ からなるサイクルである (Néron n-gon という).

2 保型形式とパラボリック・コホモロジー

(2.1) 離散群 $\Gamma \subset SL(2,\ \mathbb{Z})$ が H に固定点なしに作用し, かつ $S = \Gamma\diagdown H$ の体積が有限とする. $\Gamma = \Gamma(n),\ n \geq 3,$ がそのような例である. $\overline{S} = \Gamma\diagdown(H \cup \{\text{cusp 全体}\})$ はコンパクト Riemann 面である. 前節のように楕円曲線 $f : E \to S$ が存在し, 次はファイバー積である.

$$\begin{array}{ccc} E_H & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ H & \longrightarrow & S \end{array}$$

$\omega_S = f_*\Omega^1_{E/S}$ は S 上の可逆層で H にひきもどすと dz により自明化される (前節のように, z はファイバーの座標とする). この自明化は各 $\text{cusp} \in \overline{S}$ の穴つき近傍 D^* における ω_S の自明化をひきおこす. なぜなら (前節の記号を用いると) $H_c \times \mathbb{C}$ に $\Gamma_1 \ltimes \mathbb{Z}^2$ が作用しているが, これは $dz \in \Omega^1_{H_c \times \mathbb{C}/H_c}$

を保つからである．この ω_S の D^* 上の断面 dz が零点なしに拡張できるような $\overline{S}$ 上の可逆層として $\omega_{\overline{S}}$ を定義する．

ウェイト k の Γ-cusp 形式の空間 $S_k(\Gamma)$ は H 上の正則関数 $f : H \to \mathbb{C}$ で

$$f(\gamma\tau) = (c\tau + d)^k f(\tau),\ \forall\tau = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$$

をみたし, 各 cusp での Fourier 展開の定数項が 0 であるもの全体である．これは $\omega_{\overline{S}}^{k} = \omega_{\overline{S}}^{\otimes k}$ の断面で cusp に零点を持つもの全体と同一視できる．つまり $D = \sum_i P_i$ を cusp の和とすると,

$$S_k(\Gamma) = \Gamma(\overline{S},\ \omega_{\overline{S}}^{k}(-D)).$$

対応は $f(\tau) \longleftrightarrow f(\tau)(dz)^{\otimes k}$ である．

S 上には局所系 $R^1 f_*\mathbb{Q}$ があり, その対称積 $\mathrm{Sym}^k\, R^1 f_*\mathbb{Q}$ をとり, そのパラボリック・コホモロジーを考える．一般に S 上の局所系 $\mathcal{L}$ のパラボリック・コホモロジーは, 自然な写像

$$H_c^1(S,\ \mathcal{L}) \to H^1(S, \mathcal{L})$$

の像と定義され, $\tilde{H}^1(S, \mathcal{L})$ で表す．$j : S \hookrightarrow \overline{S}$ を埋め込みとすると

$$\tilde{H}^1(S,\ \mathcal{L}) = H^1(\overline{S},\ j_*\mathcal{L})$$

であり, これを定義としてもよい．後者の定義は任意の次元で交叉コホモロジーとして一般化できる．

(2.2) パラボリック・コホモロジーと保型形式の関係は以下の Shimura 同型で与えられる．この定理については L^2 コホモロジーを用いた Zucker の解説がある（Annals of Math., 1979).

定理　$k \geq 0$ に対し自然な同型

$$S_{k+2}(\Gamma) \oplus \overline{S_{k+2}(\Gamma)}\ \xrightarrow{\sim}\ \tilde{H}^1(S,\ \mathrm{Sym}^k\, R^1 f_*\mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C}$$

が存在する．

(2.3) 以下 $\Gamma = \Gamma(n)$ とし ${}^k_n W = H^1(M_n,\, \mathrm{Sym}^k\, R^1 f_*\mathbb{Q})$ とおく．$S_k(\Gamma(n))$ には Hecke 作用素が作用する．対応する作用素がパラボリック・コホモロジーにも存在する．

p を素数で $\neq \mathrm{ch}\, k$, $(p,\ n)=1$ とする．k 上の楕円曲線の組 $(E,\ F)$ と p-isogeny $\varphi : E \to F$ およびレベル n 構造 $\alpha : {}_nE \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/n)^2$ からなるデータ $(\varphi : E \to F,\ \alpha)$ を考え, その同型類の fine モジュライを $M_{n,p}$ とする．これは $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$ 上のスキームで, 次の図式がある．

$$
\begin{array}{ccccccc}
E & \xleftarrow{q_1'} & q_1^*E & \xrightarrow{\varphi} & q_2^*E & \xrightarrow{q_2'} & E \\
{\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\
M_n & \xleftarrow{q_1} & M_{n,p} & = & M_{n,p} & \xrightarrow{q_2} & M_n
\end{array}
$$

ここで q_i は有限写像で

$$
\begin{aligned}
q_1 &: (\varphi : E \to F,\ \alpha) \mapsto (E,\ \alpha), \\
q_2 &: (\varphi : E \to F,\ \alpha) \mapsto (F,\ \alpha')
\end{aligned}
$$

ただし α' は α と $\varphi : {}_nE \xrightarrow{\sim} {}_nF$ よりみちびかれる F のレベル n 構造, また φ は普遍的な p-isogeny である．

作用素 T_p を

$$
T_p = q_{1*}\varphi^* q_2^* \ :\ \tilde{H}^1(M_n,\ \mathrm{Sym}^k R^1 f_*\mathbb{Q}) \to \tilde{H}^1(M_n,\ \mathrm{Sym}^k R^1 f_*\mathbb{Q})
$$

により定める．また写像 $I_p\ :\ M_n \to M_n$ を $(E, \alpha)\ \to\ (E, p^{-1}\alpha)$ で定め $R_p = p^k I_p^*$ とする．Shimura 同型を通じ, この T_p は $S_k(\Gamma(n))$ に作用する Hecke 作用素 T_p およびその共役 $\overline{T_p}$ に対応する．また R_p についても同様である．

また, ${}^k_nW$ には Petersson 内積に対応する双線形形式が存在する．

3 ${}^k_nW$ とモティーフ

この節は [Sch] にしたがう．

(3.1) M_n を以前の通り, $f : X_n \to M_n$ を普遍楕円曲線 (以前は $E \to M_n$ と書いたもの), $f : \overline{X_n}\ \to\ \overline{M_n}$ をそのコンパクト化とする．$k \geq 1$ に対し,

$$
X_n^k = \overbrace{X_n \times_{M_n} \times \cdots \times_{M_n} X_n}^{k\text{ 個}}
$$

を X_n の M_n 上の k 重のファイバー積とする．同様に

$$
\overline{X_n}^k = \overbrace{\overline{X_n} \times_{\overline{M}_n} \times \cdots \times_{\overline{M}_n} \overline{X_n}}^{k\text{ 個}}
$$

とする. $\overline{X_n}^k$ は特異点を持ち, 局所的に定義式が

$$x_1y_1 = \cdots = x_ky_k$$

と書ける. $\overline{\overline{X}}_n{}^k \ \to \ \overline{X}_n^k$ を自然な特異点解消とする.

$$\begin{array}{ccc} X_n^k & \longrightarrow & \overline{\overline{X}}_n^k \\ {\scriptstyle f}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle f} \\ M_n & \longrightarrow & \overline{M}_n \end{array}$$

$\overline{\overline{X}}_n^k$ は非特異代数多様体である.

$\overline{X_n}^k$ の特異点解消は次のように得られる. 特異点集合 Σ は自然に閉集合による列 $\Sigma_0 \subset \Sigma_1 \subset \cdots \subset \Sigma_{k-2} = \Sigma$ をもち, $\dim \Sigma_i = i$ で $\Sigma_i - \Sigma_{i+1}$ はスムーズである. Σ_0 をブローアップし, ついで Σ_1 をブローアップし, $\ldots, \Sigma_{k-2}$ をブローアップすると非特異となる. この過程はトーリック幾何による記述が最も分かりやすい.

$\overline{X_n}$ は次の対称性をもつ. $\mu_2 = \{\pm 1\}$ が inversion $x \mapsto -x$ として $\overline{X_n}$ にファイバーを保って作用する. また $(\mathbb{Z}/n)^2$ の各元 a に対し, レベル n 構造を通して対応する断面 s_a による平行移動が $\overline{X_n}$ に作用する. よって半直積 $(\mathbb{Z}/n)^2 \rtimes \mu_2$ が $\overline{X_n}$ に作用する.

$\overline{\overline{X}}_n^k$ は次の対称性をもつ. $\overline{X_n}^k$ に対称群 S_k が直積因子の置換として作用する. また $((\mathbb{Z}/n)^2 \rtimes \mu_2)^k$ が $\overline{X_n}^k$ に直積因子ごとに上で述べたように作用する. この作用は S_k の作用により正規化されるので, 半直積

$$\Gamma_n^k = ((\mathbb{Z}/n)^2 \rtimes \mu_2)^k \rtimes S_k$$

が $\overline{X}_n^k$ に作用する. これは自然に $\overline{\overline{X}}_n^k$ への作用に持ち上がる.

(3.2) Γ_n^k は次のように定まる指標 $\mathrm{sgn} : \Gamma_n^k \to \{\pm 1\}$ を持つ. (1) 各成分 μ_2 のうえでは恒等写像である. (2) 各成分 $(\mathbb{Z}/n)^2$ のうえでは自明. (3)S_k のうえでは置換の符号と一致する.

$\mathbb{Q}[\Gamma_n^k]$ を Γ_n^k の群環とし,

$$\varepsilon = \frac{1}{\Gamma_n^k} \sum_{\sigma \in \Gamma_n^k} \mathrm{sgn}\, \sigma \cdot \sigma \ \in \mathbb{Q}[\Gamma_n^k]$$

とおくと, ε はべき等元である. Γ_n^k の表現 V に対し $V(\varepsilon) = \mathrm{Im}[\varepsilon : V \to V]$ とする.

Γ_n^k は $\overline{\overline{X}}_n^k$ のコホモロジー $H^*(\overline{\overline{X}}_n^k,\ \mathbb{Q})$ に作用する． ここで $H^*(X) = \bigoplus_i H^i(X)$ である．また，

$$ {}_n^kW = \tilde{H}^1(M_n,\ \mathrm{Sym}^k R^1 f_*\mathbb{Q}) $$

とする．

定理　自然な同型

$$ {}_n^kW \cong H^*(\overline{\overline{X}}_n^k,\ \mathbb{Q})(\varepsilon) $$

が存在する．

言い換えると，${}_n^kW$ は $\mathbb{Q}$ 上のモティーフ $(\overline{\overline{X}}_n^k, \varepsilon, 0)$ のコホモロジーと同型である．とくにこのモティーフ $(\overline{\overline{X}}_n^k, \varepsilon, 0)$ は対応する $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の ℓ 進表現をもつ．

(3.3) 各々の保型形式に対応するモティーフも ${}_n^kW$ の部分モティーフとして構成できる．

そのために，Hecke 作用素をモティーフの射として定義する．(2.3) の図式における写像 q_1', q_2' を用いて X_n からそれ自身への代数的対応 T_p を

$$ T_p = (q_1')_*(\varphi)^*(q_2')^* $$

により定める．　同様に X_n^k の自己対応 T_p を定義できる．その閉包をとることにより $\overline{\overline{X}}_n^k$ の自己対応 T_p を定める．これはコホモロジー $H^*(\overline{\overline{X}}_n^k$ の自己準同型 T_p を導く．定理 3.1 における同型は T_p の作用と両立することが容易に示される．

さて $f \in S_{k+2}(\Gamma_1(n))$ が指標 χ をもつ正規化された new form とする．その Fourier 展開　$f = \sum_{n\geq 1} a_n q^n$ の係数で $\mathbb{Q}$ 上生成される体を L とする．

定理　　L に係数をもつモティーフ M_f で次の性質を持つものが存在する．素数 ℓ と L の素イデアル $\lambda \mid \ell$ に対する λ-進表現　$H_\lambda(M_f)$ は，素数 $p \nmid n\ell$ において不分岐であり，幾何的 *Frobenius* F_p に対し，

$$ \det(1 - F_pX) = 1 - a_pX + \chi(p)p^{k+1}X^2 $$

をみたす．

M_f は $H^*(\overline{\overline{X}}{}^k_n) \otimes L$ の部分モティーフであり，L-部分空間としては

$$\bigcap_{p \nmid n} (T_p - a_p)$$

と

$$\begin{pmatrix} * & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix} \subset GL(2, \mathbb{Z}/n)$$

による不変部分空間の交わりである．（それをある代数的サイクル p, ただし $p \circ p = p$，の像として表せる．）ここで $GL(2,\mathbb{Z}/n)$ は自然にレベル n 構造に作用し，したがって $\bar{M}_n$ および $\bar{\bar{X}}{}^k_n$ に作用する．

このようなモティーフ M_f が欲しい条件をみたすことは，f が $T_p f = a_p f$ をみたすこと，new form の $\{T_p\}$ についての重複度が 1 であること，および T_p と F_p を関係づける「合同関係式」を用いて示される．

モティーフ M_f でなくその λ-進表現を構成するだけなら，パラボリック・コホモロジーに対応する ℓ 進表現と，そこに作用する Hecke 作用素をを用いて同様に行うことができる．

(3.4)　Hilbert モデュラー多様体とその上の普遍族に対しても同様の問題を考えられる．この場合，(3.2) に対応する結果がある．[GHM-1], [GHM-2] を参照．これは特別な場合として (3.2) を含んでいるが，証明はずっと簡明である．そこではモティーフ層の理論と，perverse 層の理論における分解定理が本質的な役割を果たす．

参考文献

[De] Deligne, P. ; Formes modulaires et représentations ℓ-adiques. Seminaire Bourbaki 1968/69, no. 355., Lecture Notes in Math. 179, Springer.

[DeRa] Deligne, P.; Rapoport, M. Les schémas de modules de courbes elliptiques. (French) Modular functions of one variable, II (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, Antwerp, 1972), pp. 143–316. Lecture Notes in Math., Vol. 349, Springer, Berlin, 1973.

[GHM-1] B. Gordon; M. Hanamura; J.P. Murre: Relative Chow-Künneth projectors for modular varieties. J. Reine Angew. Math. 558 (2003), 1–

14.

[GHM-2] B. Gordon; M. Hanamura; J.P. Murre: Absolute Chow-Künneth projectors for modular varieties. J. Reine Angew. Math. 580 (2005), 139–155.

[Sch] Scholl, A. J. Motives for modular forms. Invent. Math. 100 (1990), no. 2, 419–430.