

# 局所体の mod $p$ Galois 表現の有限性について

原田 新也\*†

$F$  を有限次代数体とする。  $F$  の代数閉包をひとつとり、  $F$  の拡大体をその中で考えるとき、 Hermite-Minkowski の定理として知られている次の結果がある。

**定理 1 (Hermite-Minkowski).**  $S$  を  $F$  の素点の有限集合とする。 任意の自然数  $N$  に対して、  $[L:F] \leq N$  なる  $S$  の外不分岐な  $F$  の拡大体  $L$  は有限個である。

つまり代数体の拡大について、 分岐する素点の範囲と拡大次数を制限した場合、 そのような条件を満たす拡大体は有限個しかないということである。

これは代数体に限った話ではなく、 有限体上の一変数代数関数体や局所体に関しても類似の結果が知られている。

**定理 2 (cf. [Gos96] Chapter 8, §23).**

- (1)  $F$  を有限体上の一変数代数関数体、  $S$  を  $F$  の素点の有限集合とする。  $F^{\text{sep}}$  を  $F$  の分離閉包とする。 任意の自然数  $N$  に対して、  $[L:F] \leq N$  なる  $S$  の外不分岐な  $F$  の geometric な分離拡大  $L \subset F^{\text{sep}}$  は有限個である (ここで  $L/F$  が geometric とは定数体の拡大が自明なこと。)
- (2)  $K$  を局所体、  $K^{\text{sep}}$  を  $K$  の分離閉包とする。 任意の自然数  $N, n$  に対して、  $[L:K] \leq N$  かつ  $v_L(\mathcal{D}_{L/K}) \leq n$  なる  $K$  の有限分離拡大  $L \subset K^{\text{sep}}$  は有限個である。 ここで  $v_L$  は  $L$  の正規付値、  $\mathcal{D}_{L/K}$  は  $L/K$  の different。

本稿では、 上のような分岐を制限した場合の有限性が、 ガロア表現に関しても成り立つということを紹介したい。

---

\*九州大学大学院数理学府博士 1 年

†s.harada@math.kyushu-u.ac.jp

$F$  を代数体とし,  $F$  の代数閉包  $\bar{F}$  をひとつ固定する.  $G_F$  を  $F$  の絶対ガロア群,  $V$  を代数閉体  $k$  上の線形空間として, 連続表現  $\rho: G_F \rightarrow \mathrm{GL}_k(V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_d(k)$  を考える. ここで  $k$  には離散位相を入れて考える (このような表現を  $\mathrm{mod} \ p$  ( $p \geq 0$ ) ガロア表現と呼ぶことにする. ここで  $\mathrm{char} \ k = p$ .)

$p$  を  $F$  の有限素点とすると,  $F$  の  $p$  での完備化  $F_p$  の絶対ガロア群  $G_{F_p}$  は, 制限写像により  $G_F$  の部分群とみることができる.  $\rho$  の  $G_{F_p}$  への制限を  $\rho_p$  とすると,  $\rho$  の ( $p$  の外) Artin conductor  $N(\rho)$  が次のように定義される (但し  $F$  が代数関数体の時には  $p$  はすべての素点を走らせる.)

$$N(\rho) = \prod_{p \nmid p} p^{n(\rho_p)},$$

$$n(\rho_p) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(G_{p,0} : G_{p,i})} \dim_k(V/V^{G_{p,i}}).$$

ここで  $G_p = \rho_p(G_{F_p})$ ,  $G_{p,i}$  は  $G_p$  の第  $i$  分岐群である. 今  $\mathrm{GL}_k(V)$  は離散群なので  $G_p$  は有限群, よって  $n(\rho_p)$  は有理数である. 特に  $p \nmid p$  の時 (関数体のときは定数体の標数  $\neq p$  の時)  $n(\rho_p)$  は整数になる. また  $n(\rho_p)$  は有限個を除いて 0 なので,  $N(\rho)$  は  $F$  のイデアルになる.

Artin conductor は表現の分岐を測る値として知られている. 具体的には

$$\begin{aligned} \rho \text{ が } p \text{ で不分岐} &\iff n(\rho_p) = 0 \\ \rho \text{ が } p \text{ で tame} &\iff n(\rho_p) = \dim_k(V/V^{G_{p,0}}) \end{aligned}$$

と対応している.

そこでこの Artin conductor を制限した場合に,  $\mathrm{mod} \ p$  ガロア表現の同型類が有限であるかどうかという問題が考えられる. 代数体の場合, このことは Serre 予想 ([Ser87]) の帰結として得られる. すなわち次のことが分かっている.

**定理 3** (Serre 予想の帰結).  $\mathrm{char} \ k = p > 0$  とする. Serre 予想が成り立つとすると, 任意の自然数  $N$  に対し, 半単純かつ odd な連続表現  $\rho: G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathrm{GL}_2(k)$  で  $N(\rho) \mid N$  なるものの同型類は有限個である.

同型類の有限性について, 一般の状況では代数体, 代数関数体の場合には次のことが知られている.

まず代数体  $F$  については次のことが知られている.

**定理 4** ([MT01]).

- (1)  $\text{char } k = 0$  とする．任意の自然数  $d$ ,  $F$  の整イデアル  $\mathfrak{N}$  に対して, 半単純連続表現  $\rho : G_F \rightarrow \text{GL}_d(k)$  で  $N(\rho) \mid \mathfrak{N}$  をみたすものの同型類は有限個である．
- (2)  $\text{char } k = p > 0$  とする．任意の自然数  $d$ ,  $F$  の整イデアル  $\mathfrak{N}$  に対して, 半単純連続表現  $\rho : G_F \rightarrow \text{GL}_d(k)$  で  $\mathfrak{N}(\rho) \mid \mathfrak{N}$  かつ  $\text{Im}(\rho)$  が可解であるものの同型類は有限個である．

$\text{char } k = p > 0$  において, 像が可解であるという条件を外した場合については, 具体的な場合に少し分かっているくらいである．詳しくは [Moo00] を参照して下さい．

次に有限体上の一変数代数関数体の場合については,  $\text{char } k = 0$  の場合,  $\text{char } k = p > 0$  で像が可解な場合について上記 [MT01] の中で示されている．更に代数関数体の場合には, 可解という仮定がない場合にも, ほとんどの場合が分かっている．

**定理 5 (Böckle, Khare [BK]).**  $F$  を有限体上の一変数代数関数体とし,  $p > 2$  を有限体の標数と異なる素数とする．また  $k$  を  $\text{char } k = p$  なる代数閉体とする．このとき任意の自然数  $d$  と  $F$  の正因子  $D$  に対し, 半単純連続表現  $\rho : G_F \rightarrow \text{GL}_d(k)$  で  $N(\rho) \mid D$  なるものの同型類は有限個である．

大域体の場合に関しては以上のような結果があった．それでは局所体の場合にはどうであろうか．最後に今回得られた結果について紹介したい．

$K$  を局所体, すなわち完備離散付値体で剰余体が有限なものとする． $\text{mod } p$  ガロア表現  $\rho : G_K \rightarrow \text{GL}_d(k)$  に対して  $\text{Ker } \rho$  に対応する  $K$  の有限次ガロア拡大を  $L$  とするとき,  $\rho$  の剰余次数  $f(\rho)$  を  $L/K$  の剰余次数と定義する．

**定理 6.**

- (1) 任意の自然数  $d, N, f$  に対して, 半単純連続表現  $\rho : G_K \rightarrow \text{GL}_d(k)$  で Artin conductor  $n(\rho) \leq N$  かつ  $f(\rho) \leq f$  をみたすものの同型類は有限個である．
- (2) 特に  $K$  が  $\mathbb{Q}_p$  の有限次拡大で,  $\text{char } k = p$  とする．このとき任意の自然数  $d, f$  に対し, 半単純連続表現  $\rho : G_K \rightarrow \text{GL}_d(k)$  で  $f(\rho) \leq f$  を満たすものの同型類は有限個である．

局所体のガロア表現に関しては, Artin conductor を制限するという条件だけでは剰余次数を抑えることができず, 不分岐な表現だけで無限個の

同型類が構成できてしまう．そこで  $f(\rho)$  に関する条件が必要になる．また (2) に関しては，一見分岐に関する条件が存在しないように見えるが，実際には与えられた条件で抑えられていることが分かる．

## 参考文献

- [BK] G. Böckle and C. Khare, *Finiteness results for mod  $\ell$  Galois representations over function fields*, preprint.
- [Gos96] D. Goss, *Basic structures of function field arithmetic*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], vol. 35, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [Moo00] H. Moon, *Finiteness results on certain mod  $p$  Galois representations*, J. Number Theory **84** (2000), 156–165.
- [MT01] H. Moon and Y. Taguchi, *Mod  $p$ -Galois representations of solvable image*, Proc. Amer. Math. Soc. **129** (2001), 2529–2534 (electronic).
- [Ser87] J.-P. Serre, *Sur les représentations modulaires de degré 2 de  $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$* , Duke Math. J. **54** (1987), 179–230.