Finiteness of Abelian Fundamental Groups with Restricted Ramification

九州大学大学院数理学府 平之内俊郎

概 要

このノートは論文 [2] の要約である. 先ずエタール基本群の或る商にあたる数論的基本群を導入する. エタール基本群が不分岐被覆を分類するのと同様に, この基本群は与えられた Weil 因子に沿って分岐を制限した被覆を分類する. また代数体の整数環上の数論的スキームに対して, Abel 化した基本群の有限性について論じる.

1 定義

X を連結正規 Noether スキーム, $k(X)$ を X の関数体, $\overline{k(X)}$ をその分離閉包とし, $D = \sum_i a_i \Gamma_i$ を $\mathcal{Q} := \{a, a+ \mid a \in \mathbb{Q}_{\geq 1}\}$ を形式的に係数とする X の Weil 因子とする. 各既約因子 Γ_i の生成点 ξ_i とその上の全ての素点 $\overline{\xi}_i$ に対する a_i 次分岐群

$$\mathrm{Gal}\left(\overline{k(X)}_{\overline{\xi}_i}/k(X)_{\xi_i}\right)^{a_i}$$

の像達で生成される閉正規部分群による $\pi_1(X \smallsetminus D)$ の商を $\pi_1(X, D)$ と定義する. ここで $\overline{k(X)}_{\overline{\xi_i}}/k(X)_{\xi_i}$ は, ξ_i と $\overline{\xi}_i$ に於ける完備化で得られる完備離散付値体の拡大であり, 分岐群として A. Abbes と T. Saito により定義された分岐群 ([1]) を用いている. この分岐群は, 剰余体が完全な完備離散付値体に対して定義されていた古典的な（上付き）分岐群の一般化であり, 1 次分岐群は惰性群, 1+ 次分岐群は暴惰性群にあたる.

基本群 $\pi_1(X, D)$ は次の様に D で分岐を許した或る被覆の成す Galois 圏に付随する基本群とも解釈出来る. 簡単の為, 正規スキーム Y が連結であるとしよう. 有限射 $Y \to X$ が D **分岐被覆** であるとは, $X \smallsetminus D$ 上ではエタールであり, 各 ξ_i 及びその上の全ての素点 η_{ij} に於いて

$$\mathrm{Gal}\left(\widetilde{k(Y)}_{\eta_{ij}}/k(X)_{\xi_i}\right)^{a_i} = 1,$$

なる事を言う. 但し $\widetilde{k(Y)}_{\eta_{ij}}$ は $k(Y)_{\eta_{ij}}$ の $k(X)_{\xi_i}$ 上の Galois 閉包.

エタール被覆の成す圏の充満部分圏として, 上で定義した D 分岐被覆の成す圏を考えた時に, これが Galois 圏となる事が分かり ([2], Theorem 2.5), 付随する基本群が $\pi_1(X, D)$ に他ならない. X 及び $X \smallsetminus D$ のエタール基本群との間には

$$\pi_1(X \smallsetminus D) \twoheadrightarrow \pi_1(X, D) \twoheadrightarrow \pi_1(X).$$

なる関係があり, D の係数を変える事でエタール基本群, 及び馴分岐基本群が得られる:

• 基本群 $\pi_1(X, D)$ では余次元 1 の分岐点を考えていたので, Zariski-Nagata の純正定理から, スキーム X が正則であって, Weil 因子として特に $D = \sum_i 1 \cdot \Gamma_i$ を取れば $\pi_1(X, D) = \pi_1(X)$.
• 一般の X に対して $D = \sum_i (1+) \cdot \Gamma_i$ とすれば, $\pi_1(X, D)$ は馴分岐基本群 $\pi_1^{\mathrm{tame}}(X, D)$ と一致する.

2 有限性

K を代数体, $\mathcal{O}_K$ をその整数環とする. $X = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ を考えた時, K' を K の Hilbert 類体とすれば $\pi_1(X)^{\mathrm{ab}} = \mathrm{Gal}(K'/K)$ であった. 同様にして, K_D を $D \subset \mathcal{O}_K$ を「モデュール」とするシュトラール類体とすれば, $\pi_1(X, D)^{\mathrm{ab}} = \mathrm{Gal}(K_D/K)$ と書け, この群の有限性はイデアル類群を一般化したシュトラール類群の有限性と類体論から導かれる. この様に Abel 化した基本群の有限性は, イデアル類群の有限性と言う整数論に於いて基本的な定理と繋がっている.

より一般的な X に対する次の基本群の有限性に関する結果が [2] の主定理である.

定理 ([2], Theorem 1.1). X を代数体 k の整数環 $\mathcal{O}$ 上正規有限型忠実平坦スキームであって $X \otimes_{\mathcal{O}} \overline{k}$ は連結であると仮定する. また D を $\mathbb{Q}$ 係数 Weil 因子とする. この時 $\pi_1(X, D)^{\mathrm{ab}}$ は有限.

尚, エタール基本群, 及び馴分岐基本群に関しては次の様な有限性に関する結果が知られていた.
• X が上の定理の仮定に加えて $\mathcal{O}$ 上滑らかなスキームである時, $\pi_1(X)^{\mathrm{ab}}$ は有限 (N. M. Katz - S. Lang, 1981).
• 上の定理と同じ仮定で $\pi_1^{\mathrm{tame}}(X, D)^{\mathrm{ab}}$ は有限 (A. Schmidt, 2002).

謝辞

論文 [2] ではページ数の都合で謝辞を入れる事が出来ませんでしたが, 上記定理の証明から論文の書き方まで数知れ無い程のアドバイスを与えて下さった田口雄一郎先生にここで感謝を表わしたいと思います. またプレプリントを読んで $\pi_1(X, D)$ の簡明な定義を教えて下さった斎藤毅先生にも感謝します.

参考文献

[1] A. Abbes and T. Saito, Ramification of local fields with imperfect residue fields, Amer. J. Math. **124** (2002), no. 5, 879–920.

[2] T. Hiranouchi, *Finiteness of abelian fundamental groups with restricted ramification*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **341** (2005), 207–210.