p 進多重ガンマ函数を用いたある不変量について
吉田 敬之 教授 (京都大学) との共同研究

加塩 朋和 (大阪大学)

サマースクールのテーマは"Hilbert 保型形式入門" という事で我々の研究内容とはあまり繋がりが無いのですが, "宵の時間" を使ってお話をさせて頂きました.

0. Introduction. 我々の研究目的は, 吉田氏の結果の p 進への拡張である. 吉田氏は多重 Γ 函数の特殊値によって絶対 CM ピリオドを定義した. そして幾何的な CM ピリオドの値の関係式を予想している. なお絶対 CM ピリオドの記述には新谷公式が重要な役割を担う. 今回我々は p 進多重 Γ 函数を定義し (§1), p 進新谷公式と呼ぶべき式を証明し (§2), 更に p 進絶対 CM ピリオドと呼ぶべき値を定義し (§3), その性質を調べた. 特に吉田氏の結果と同様に p 進ピリオドと呼ばれる値との関係が予想されることは面白い. p 進 Γ 函数とガウス和の関係を示した Gross-Koblitz 公式はこの予想式の特別な場合になる (§4). なお Stark 予想の p 進類似物である Gross 予想や類体の構成などとも関連付けられる (§5).

Notations. p は素数とし $|\ |_\infty$ は $\mathbf{C}$ に入る通常の絶対値, $|\ |_p$ は $\mathbf{C}_p$ に入る p 進付値で $|p|_p = 1/p$ となるものとする. 代数体 K に対して $J_K := \{\sigma : K \hookrightarrow \overline{\mathbf{Q}}\}$ を埋め込み全体の集合とし, この元の一つ $\mathrm{id} : K \hookrightarrow \overline{\mathbf{Q}}$ 及び埋め込み $\overline{\mathbf{Q}} \hookrightarrow \mathbf{C}$, $\overline{\mathbf{Q}} \hookrightarrow \mathbf{C}_p$ は固定されていると考える. すると K 上で $|\ |_\infty, |\ |_p$ が意味を持ち, p 進位相を入れる素イデアル $\mathfrak{p}_K$ が一つ固定される. また $\mathfrak{p}_K^{h_K} = (\Pi_K)$ を満たす生成元 $\Pi_K \in O_K$ を一つ固定する. ただし h_K は類数.

1. p 進多重 Γ 函数. Barnes は多重 Γ 函数: $L\Gamma_r(z,v)$ を多重 ζ 函数: $\zeta_r(s,v,z)$ の微分で定めた. 即ち $z, v_i > 0$, $v = (v_1, \ldots, v_r)$ に対し

(1)
$$\zeta_r(s,v,z) := \sum_{n_1,\ldots,n_r=0}^{\infty} (z + n_1v_1 + \cdots + n_rv_r)^{-s},\ L\Gamma_r(z,v) := \log\left(\frac{\Gamma(z,v)}{\rho(v)}\right) = \zeta_r'(0,v,z).$$

Cassou-Noguès は p 進多重 ζ 函数と呼ぶべき函数: $\zeta_{p,r}(s,v,z)$, $(s \in \mathbf{Z}_p)$ を構成している. Robert の意味で p 進積分を $f : \mathbf{Z}_p^r \to \mathbf{C}_p$ に対して次で定める.

$$(2)\qquad \int_{\mathbf{Z}_p^r} f(x)dx := \lim_{l_1,\ldots,l_r\to\infty} \frac{1}{p^{l_1+\cdots+l_r}} \sum_{x_1=0,\ldots,x_r=0}^{p^{l_1}-1,\ldots,p^{l_r}-1} f(x),\ x = (x_1, \ldots, x_r).$$

この時

$$(3)\qquad \zeta_{p,r}(s,v,z) := \frac{\int_{\mathbf{Z}_p^r} (z + x_1v_1 + \cdots + x_rv_r)^r \langle z + x_1v_1 + \cdots + x_rv_r\rangle^{-s} dx}{(s-1)(s-2)\ldots(s-r)v_1\ldots v_r}.$$

記号 $\langle\ \rangle^{-s}$ は以下の通り. $|z|_p < 1$ の時は $\langle z\rangle := 0$, $|z|_p \geq 1$ の時は $\langle z\rangle$ は $\overline{\mathbf{Q}_p}$ の元で $|\langle z\rangle - 1|_p < 1$ かつ $z/(p^{\mathrm{ord}_p z}\langle z\rangle)$ はその位数が p と素な 1 のべき乗根となるただ一つの元とする. なお $|z|_p < 1$ に対して $(1+z)^s := \sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} z^k$ は意味を持つ. すると

- $0 \leq k \in \mathbf{Z}$ に対して $\zeta_r(-k,v,z) = \zeta_{p,r}(-k,v,z) \in \overline{\mathbf{Q}}$. ただし $z, v_i \in \overline{\mathbf{Q}}^\times$ は $z, v_i > 0$,

$|z-1|_p, |v_i|_p < 1$ を満たすとする.
• $\zeta_{p,r}(s,v,z)$ は $s=0$ で p 進解析的な函数.
従って p 進多重 Γ 函数は次で定めるのが自然である.

$$L\Gamma_{p,r}(z,v) := \zeta'_{p,r}(0,v,z). \tag{4}$$

実際次が示せ, p 進多重 Γ 函数と呼ぶに相応しい.

$$L\Gamma_{p,1}(z,(1)) = \log_p(\Gamma_p(z)) \ (\text{cf. } L\Gamma_1(z,(1)) = \log(\Gamma(z)) - \frac{1}{2}\log(2\pi)). \tag{5}$$

2. 新谷公式の p 進類似. 新谷公式は次の形である.

Theorem. (新谷.) F を次数 n の総実体, $\mathfrak{f}$ をその整イデアル, $C_{\mathfrak{f}}$ は $\mathfrak{f}\infty_1\ldots\infty_n$ を法とするイデアル類群とする. 部分 ζ 函数 $\zeta_F(s,\mathfrak{c}) := \sum_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{c}\text{ , integral ideals}} N(\mathfrak{a})^{-s}$ $(\mathfrak{c}\in C_{\mathfrak{f}})$ に対し

$$\zeta'_F(0,\mathfrak{c}) = \sum_{\sigma\in J_F}\sum_{j\in J}\sum_{z\in R(\mathfrak{c},j)} L\Gamma_{r(j)}(z^\sigma, v_j^\sigma) + \sum_{\sigma\in J_F}\sum_{i\in I} a_i^\sigma \log(b_i^\sigma). \tag{6}$$

詳細は省くが記号は大まかに以下の通り. $v_j = (v_{j,1},\ldots,v_{j,r(j)})$: $r(j)$ 次の横ベクトルで各成分は $O_F^\times$ の元で総正であるもの. $R(\mathfrak{c},j)$: F の有限部分集合. a_i, b_i: F の元. I, J: 添え字の有限集合. ただしこれらは"コーン分解"と呼ばれる操作から定まる値である.

この式を使って吉田氏は新しい不変量を定めた.

Definition. $\sigma\in J_F$ に対して $X^\sigma(\mathfrak{c}) := \sum_{j\in J}\sum_{z\in R(\mathfrak{c},j)} L\Gamma_{r(j)}(z^\sigma, v_j^\sigma) + \sum_{i\in I} a_i^\sigma\log(b_i^\sigma)$.
ただし $X(\mathfrak{c}) := X^{\mathrm{id}}(\mathfrak{c})$ とする.

これらの p 進での対応物は次の様になる.

$$(p)_0 := \begin{cases} \prod_{\text{prime ideals } \mathfrak{p}\subset O_F,\ \mathfrak{p}|(p)} \mathfrak{p} & p\neq 2 \text{ の時} \\ (2)\prod_{\text{prime ideals } \mathfrak{p}\subset O_F,\ \mathfrak{p}|(2)} \mathfrak{p} & p=2 \text{ の時}, \end{cases} \tag{7}$$

と定め, $(p)_0$ は $\mathfrak{f}$ を割ることを仮定しておく. この時 $\mathfrak{c}\in C_{\mathfrak{f}}$ に対して, p 進部分 ζ 函数 $\zeta_{p,F}(s,\mathfrak{c})$ が定義される. これは $s=0$ において p 進解析的函数であり, $0\le k\in\mathbf{Z}$ に対して

$$\zeta_{p,F}(-k,\mathfrak{c}) = \omega(\mathfrak{c})^{-k}\zeta_F(-k,\mathfrak{c}) \tag{8}$$

を満たす. ここで ω は Teichmüller 指標とイデアルノルム写像をつなげた指標. 次の式は p 進新谷公式と呼びたい. 二つの公式の類似性は見事である.

Theorem. (Kashio.)

$$\zeta'_{p,F}(0,\mathfrak{c}) = \sum_{\sigma\in J_F}\sum_{j\in J}\sum_{z\in R(\mathfrak{c},j)} L\Gamma_{p,r(j)}(z^\sigma, v_j^\sigma) + \sum_{\sigma\in J_F}\sum_{i\in I} a_i^\sigma \log_p(b_i^\sigma). \tag{9}$$

ただし記号は新谷公式 (6) 中と同じとする.

吉田氏の定義を真似て次を定める.

Definition. $X_p^\sigma(\mathfrak{c}) := \sum_{j\in J}\sum_{z\in R(\mathfrak{c},j)} L\Gamma_{p,r(j)}(z^\sigma, v_j^\sigma) + \sum_{i\in I} a_i^\sigma \log_p(b_i^\sigma)$, $X_p(\mathfrak{c}) := X_p^{\mathrm{id}}(\mathfrak{c})$.
なお p 進新谷公式から次が導かれる.

Corollary. $(\mathfrak{f},(p)) = 1$ とし χ を $C_\mathfrak{f}$ の指標とする. この時

(10) $$r(\chi) := \#\{\mathfrak{p}|(p),\ \chi(\mathfrak{p}) = 1\} \geq 2 \text{ であれば } \mathrm{ord}_{s=0} L_p'(s,\chi\omega) \geq 2.$$

ただし $L_p'(s,\chi\omega) := \sum_{\mathfrak{c}\in c_{\mathfrak{f}(p)_0}} \chi(\mathfrak{c})\zeta_{p,F}(s,\mathfrak{c})$ は p 進 L 函数.

3. p 進絶対 CM ピリオド. まずは元となる吉田氏の予想式を述べる.

Definition. K は CM 体で K/F はアーベル拡大とする. $\tau \in G := \mathrm{Gal}(K/F)$ に対して

(11) $$g_{K/F}(\mathrm{id},\tau) := \pi^{-\mu(\tau)/2} \exp\left(\frac{1}{|G|}\sum_{\chi\in\hat{G}_-} \frac{\chi(\tau)\sum_{\mathfrak{c}\in C_{\mathfrak{f}_\chi}} \chi(\mathfrak{c})X(\mathfrak{c})}{L(0,\chi)}\right),$$

と定義し絶対 CM ピリオド記号と名付ける. ただし $\hat{G}_-$ は G の奇指標全体, $\mathfrak{f}_\chi$ は指標 χ の法とし, $\tau = \mathrm{id}, \rho$ (複素共役), その他に対して $\mu(\tau) := 1, -1, 0$ と定めた.

Conjecture. (吉田) $\tau \in G := \mathrm{Gal}(K/F)$ に対し

(12) $$p_K(\mathrm{id},\tau) \equiv g_{K/F}(\mathrm{id},\tau) \mod \overline{\mathbf{Q}}^\times.$$

ここで p_K は志村氏の CM ピリオド記号であり, これは K による虚数乗法を持つアーベル多様体の幾何的ピリオドを分解して定めたものである.

これに習って (対数)p 進絶対 CM ピリオド: $lg_{p,K/F}$ を定義しよう.

Definition. $\tau \in G := \mathrm{Gal}(K/F)$ に対し

(13) $$lg_{p,K/F}(\mathrm{id},\tau) := \frac{-\mu(\tau)}{2h_F}\log_p(\Pi_F) + \frac{1}{|G|}\sum_{\chi\in\hat{G}_-} \frac{\chi(\tau)\sum_{\mathfrak{c}\in C_{\mathfrak{f}_{p,\chi}}} \chi(\mathfrak{c})X_p(\mathfrak{c})}{L(0,\chi)}.$$

これは modulo $\mathbf{Q}\log_p(O_F^\times)$ で一意に定義される値である. ただし $\mathfrak{f}_{p,\chi} := \mathfrak{f}_\chi \mathfrak{p}_F$.

4. 主予想. 最初に"$\mathfrak{p}_F$ が K/F で完全分解する"という条件下での予想式を示す. これは Gross-Koblitz 公式の一般化を与えている.

Conjecture. (加塩-吉田.) F, K は総実体と CM 体の組で K/F がアーベル拡大であるものとし, $\mathfrak{p}_F$ は K で完全分解とすると

(14) $$\frac{1}{2h_K}\log_p\left(\left(\frac{\Pi_K^\rho}{\Pi_K}\right)^{\tau^{-1}}\right) \equiv lg_{p,K/F}(\mathrm{id},\tau) \mod \mathbf{Q}\log_p(O_F^\times).$$

Remark. 実際はこの条件において我々の予想はより精密な形を持つ. すなわち両辺の差 $\in \mathbf{Q}\log_p(O_F^\times)$ の部分まで予想できる.

Remark. この式の左辺は CM ピリオドの p 進類似物である p 進ピリオドによって表される. 実際 $p_{p,K}$ を p 進ピリオドを CM ピリオド記号と同様に分解して定めたものとする (値域は B_{cris} と書かれるある巨大な環である). この時 $\tau \in J_K$ に対して

(15) $$\log_p\left(p_{p,K}(\mathrm{id},\tau)^{1-\varphi_{\mathrm{cris}}^{f_{\mathfrak{p}_K}}}\right) = \frac{1}{2h_K}\log_p\left(\left(\frac{\Pi_K^\rho}{\Pi_K}\right)^{\tau^{-1}}\right).$$

ただし $f_{\text{素イデアル}}$ は素イデアルの次数を表し $\varphi_{\rm cris}$ は $B_{\rm cris}$ へ作用する絶対フロベニウスである．よって次の形への拡張を期待する．$\mathfrak{p}_F$ が K で完全分解しない時は

$$\log_p\left(p_{p,K}(\mathrm{id},\tau)^{1-\varphi_{\rm cris}^{f_{\mathfrak{p}_F}}}\right) \equiv lg_{p,K/F}(\mathrm{id},\tau) \mod \mathbf{Q}\log_p(O_F^\times)\ ? \tag{16}$$

5. Stark 予想, Gross 予想, 及び類体構成について．

Gross は Stark 予想の p 進類似を予想している．実は我々の予想はこの Gross 予想より真に強いことが示せる．我々の予想を含め, これらの予想の直接の応用として類体の構成が挙げられる．以下簡単に各予想を説明する．まず K/F をガロア拡大, $G := \mathrm{Gal}(K/F)$, S は F の素点からなる有限集合で $|S| \geq 2$ であり更に無限素点及び K/F で分岐している素点は全て含んでいるものとする．さらに K/F で完全分解している素点 $v_0 \in S$ を持つと仮定する．この時 Stark 予想は:

Conjecture. 次を満たす元 $\epsilon \in K$ が存在する．

$$\epsilon \text{ は } \begin{cases} S\text{-unit} & |S| = 2 \text{ の時}, \\ v_0\text{-unit} & |S| > 2 \text{ の時}, \end{cases} \tag{17}$$

であり v_0 の上にある K の素点 ω と $\sigma \in G$ に対し

$$\log(\| \epsilon^\sigma \|_\omega) = -w_K \zeta'_S(0,\sigma). \tag{18}$$

ここで $w_K := \#\{$ roots of unity $\in K\}$ とし $\zeta_S(s,\sigma) := \sum_{\mathfrak{a}} N(\mathfrak{a})^{-s}$, ただし $\mathfrak{a}$ は各有限素点 $\mathfrak{p} \in S$ に対し $(\mathfrak{a},\mathfrak{p}) = 1$ で, アルチン写像による像が σ となる F の整イデアル全体を走る．また ω: 複素, 実, 有限素点に対して $\| x \|_\omega := |x|_\infty^2, |x|_\infty, N(\omega)^{-\mathrm{ord}_\omega(x)}$ と定義する．

次に以上に加え, F は総実で K は CM 体, S は (p) の上にある素点全てを含み完全分解してる素点 $v_0 = \mathfrak{p}_F$ と仮定する．この時 v_0-unit $\epsilon \in K$ が存在しある整数 M に対し

$$\log(\| \epsilon^\sigma \|_{\mathfrak{p}_K}) = -M \zeta'_S(0,\sigma). \tag{19}$$

この時 Stark 予想は $M = w_K$ を言うのみである．

Conjecture. (Gross.) $\sigma \in G$ に対して

$$\log_p\left(N_{K_{\mathfrak{p}_K}/\mathbf{Q}_p}(\epsilon^\sigma)\right) = -M \zeta'_{p,S}(0,\sigma). \tag{20}$$

ただし $\zeta_{p,S}(s,\sigma)$ は $\zeta_S(s,\sigma)$ の p 進類似であり $K_{\mathfrak{p}_K}$ は K の $\mathfrak{p}_K$ での完備化である．

Theorem. (加塩-吉田.) 我々の予想が成り立つとき, Gross の予想も正しい．更に Gross 予想と我々の予想が同値であるのは $r(\chi) := \#\{\mathfrak{p}|(p), \chi(\mathfrak{p}) = 1\} = 1$ かつ $K_{\mathfrak{p}_K} = \mathbf{Q}_p$ の時に限る．特に $r(\chi) > 1$ であれば Gross 予想は $L'_p(0,\chi\omega) = 0$ を言うのみで (これは既に p 進新谷公式の系 (10) として示した), $X_p(\mathfrak{c})$, $lg_{p,K/F}(\mathrm{id},\tau)$ などの値については何も言及していない.

最後にこれらの予想を"類体の構成"について比較してみる．ここでの問題は総実体 F を固定した時, どのようなアーベル拡大 K の構成に対して利用できるかである．
1. 我々の予想式 (14) は CM 体 K の元を p 進解析函数の特殊値で表している．よって数値計算によってその元の最小多項式を求めることができる．つまり任意の CM 体が構成可能.
2. Stark 予想. 同様の方法により F 上唯一つの実素点が分解するような体 K が構成できる．更にそれらの合成体の部分体を認めると, こちらも任意の CM 体が構成できる．しかし体の合成を使うことにより得られる情報は複雑化してしまう．
3. Gross 予想. この予想が類体の構成に利用できるのは"素数 p を O_F で分解した時現れる素イデアルの内, 唯一つが K で完全分解している"という条件が必要十分である．よって $F := \mathbf{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{11})$, $K := \mathbf{Q}(\sqrt{14}, \sqrt{31}, \sqrt{6+\sqrt{5}}i, \sqrt{5+\sqrt{11}}i)$ と置くと K は構成できない．K は CM 体であるので, もちろん我々の予想からは構成できる．

References.

[Gr] B. H. Gross, p-adic L-series at s=0, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 28(1981), 979-994.
[GK] B. H. Gross, N. Koblitz, Gauss sums and the p-adic Γ-function, Ann. Math., 109(1979), 569-581.
[Sh] 新谷卓郎, 代数体の L-函数の特殊値について, 数学 29(1977), 204-216.
[St] H. M. Stark, L-functions at s=1, I〜IV, Adv. Math.
[Yo] H. Yoshida, Absolute CM-Periods, Math. surveys and Monographs vol. 106, AMS.
[Ka1] 加塩朋和, p-adic analogue of Shintani's formula, 数理解析研究所講究録 1324, 「代数的整数論とその周辺」, 2003 年, pp47-57.
[Ka2] 加塩朋和, On a p-adic analogue of Shintani's formula, J. Math. Kyoto Univ. 45(2005), no. 1, 99-128.
[KY1] 加塩朋和, 吉田敬之, On the p-adic absolute CM-Period symbol, 数理解析研究所講究録 1451, 「代数的整数論とその周辺」, 2005 年, pp9-18.
[KY2] 加塩朋和, 吉田敬之, On the p-adic absolute CM-Period symbol, Algebra and Number Theory: Proceedings of the Silver Jubilee Conference Univ. of Hyderabad, New Delhi, Hindustan Book Agency, 2005, 359-399.
[KY3] 加塩朋和, 吉田敬之, On p-adic absolute CM-Periods, Proceedings of the 7-th Autumn Workshop on Number Theory, "Differencial Operators on Modukar Forms and Application", 2005, pp161-176.
[KY4] 加塩朋和, 吉田敬之, p-adic absolute CM-Periods, Proceedings of the 8-th Autumn Workshop on Number Theory, 「周期と保型形式」, 掲載予定.
[KY5] 加塩朋和, 吉田敬之, p 進多重ガンマ関数を用いた類体構成, 数理解析研究所講究録, 「代数的整数論とその周辺」, 掲載予定.