Doi-Naganuma lift およびそれに関連する話題

桂田　英典
室蘭工業大学工学部
(e-mail: hidenori@mmm.muroran-it.ac.jp)

1　序文

K を２次体, χ を $K/\mathbf{Q}$ に対応する Kronecker 指標とする．このとき，K の Dedekind zeta 関数 $\zeta_K(s)$ は次のようにあらわされる:

$$\zeta_K(s) = \zeta(s)L(s,\chi).$$

ここで，$\zeta(s)$ は Riemann の zeta 関数，$L(s,\chi)$ は χ に付随する Dirichlet L 関数である．このとき，保型形式に付随する L 関数においてこの類似を考えることは自然であり興味深いことである．$F/\mathbf{Q}$ を実２次体，$\mathfrak{O}_F$ をその整数環とし, χ をこの２次拡大に対応する導手が D の Kronecker 指標とする．このとき, K. Doi と N. Naganuma は, $SL_2(\mathbf{Z})$ に関する primitive form f に対して, $SL_2(\mathfrak{O}_F)$ に関する Hecke 固有形式 $\hat{f}$ でその L 関数 $L(s,\hat{f})$ が

$$L(s,\hat{f}) = L(s,f)L(s,f,\chi)$$

と表されるものが存在することを (F の狭義類数が 1 という条件のもとで) 示した ([Doi-Naganuma2].) ここで, $L(s,f)$ は f の L 関数，$L(s,f,\chi)$ はそれの指標 χ による捻りを表す．また, Naganuma は $\Gamma_0(D)$ に関する指標 χ の primitive form f に対しても同様な $\hat{f}$ が存在することを示した ([Naganuma].) それ故, このような $\hat{f}$ を Doi-Naganuma lift と総称する．Doi-Naganuma lift は保型形式の base change lift の原型であり，その後多くの発展がなされている．

この報告では Doi-Naganuma lift 及びそれに関連する話題について述べる．内容は以下のとおりである．まず，第２節で Doi-Naganuma lift の幾何学的背景を説明する．次に，第３節で Doi-Naganuma lift の定式化を行い，証明の概要を述べ，第４節で Doi-Naganuma lift の線形化について

述べる．さらに，第5節でAsaiのzeta関数を導入し，これの極の様子によりDoi-Naganuma liftの分類を行う．最後に，第6節でDoi-Naganuma liftとnon-Doi-Naganuma liftの合同に関するDoi-Hida-Ishiiの予想について述べる．本稿は今野拓也氏の報告[今野]の前座とでも言うべきものであるから，Hilbert modular formに詳しい方は6節を除いて読み飛ばしていただきたい．

講演の機会を与えてくださり，またサマースクールの運営に尽力された浜畑芳紀氏，青木宏樹氏に感謝いたします．また，初稿を精読して適切な御意見をお寄せ下さった前田芳孝氏に感謝いたします．

2 幾何学的背景

この節では，Doi-Naganuma liftの最初の例が示された論文[Doi-Naganuma1]により,その幾何学的背景を簡単に説明する．従って，保型形式の正確な定義等はこの節では省略する．

$F/\mathbf{Q}$を実2次体，$\mathfrak{O}$をFの整数環, χを$F/\mathbf{Q}$に対応する導手がDのKronecker指標とする．BをF上のquaternion algebraで1つの無限素点で分解するものとする．すなわち，

$$B \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R} \cong M_2(\mathbf{R}) \times \mathbf{K}$$

とする．ここで$\mathbf{K}$はHamilton quaternion algebraである．RをBの極大整環とし，Fのideal $\mathfrak{A}$に対して$\Gamma(R,\mathfrak{A}) = \{\gamma \in R^\times \mid N_{B/F}(\gamma) >> 0, \gamma - 1 \in \mathfrak{A}R\}$とする．$\Gamma(R,\mathfrak{A})$は複素上半平面$\mathbf{H}$に作用し，$\Gamma(R,\mathfrak{A})$に関する重さ$k$の尖点形式の空間$S_k(\Gamma(R,\mathfrak{A}))$が定義される．また，Hecke環が$S_k(\Gamma(R,\mathfrak{A}))$上に作用し，その同時固有関数$g$に対してL関数$L(s,g)$が定義される．また，商空間$\mathbf{H}/\Gamma(R,\mathfrak{A})$はcompact Riemann面である．$C_F(\mathfrak{A})$を$\mathfrak{A}$で定義される$F$の最大狭義合同類体とすると，canonical modelの理論[Shimura]により$\mathbf{H}/\Gamma(R,\mathfrak{A})$は$C_F(\mathfrak{A})$上定義されたmodel Aを持つ．以下，簡単のためFの狭義類数は1とする．このとき，$\mathbf{H}/\Gamma(R,\mathfrak{A})$は$F$上にmodel Aを持つ．さらに，

定理 2.1. ([Doi-Naganuma1]) Bの判別式$D(B/F)$がGalois群$Gal(F/\mathbf{Q})$の作用で不変であるとすると，Aは$\mathbf{Q}$上定義されたモデルA'を持つ

このとき，AのHasse zeta関数を$\zeta_A(s)$とすると，

$$\zeta_A(s) = \zeta_{A'}(s)\zeta_{A'}(s,\chi)$$

となる．ここで，$\zeta_{A'}(s)$はA'のHasse zeta関数で，$\zeta_{A'}(s,\chi)$はそのχによる捻りである．

さて，$\mathbf{H}/\Gamma(R,\mathfrak{A})$ の種数は 1 であるとする．このとき，定数倍を除いてただひとつ定まる $S_2(\Gamma(R,\mathfrak{A}))$ の Hecke 固有形式 g が存在して

$$\zeta_A(s) = L(s,g)$$

となる．A' は $\mathbf{Q}$ 上の楕円曲線とは限らないが，それでも $\mathbf{Q}$ 上のある indefinite quaternion algebra B' とその整環の単数群 Γ' が存在して

$$\pi : \mathbf{H}/\Gamma' \longrightarrow A' \ (\text{一意化写像})$$

となることが期待される．これを仮定すると，Γ' に関する重さ 2 のある保型形式 f が存在して，

$$L(s,g) = L(s,f)L(s,f,\chi)$$

となる．この考察により，逆に $B'^{\times}$ の保型形式 f から出発して上の関係を満たす $B^{\times}$ 上の保型形式を見出す問題が [Doi-Naganuma1], [Doi-Naganuma2] において提出された．すなわち

問題 2.1. B' を $\mathbf{Q}$ 上の indefinite quaternion algebra，B' の整環の単数群 Γ' に関する重さ k の Hecke 固有形式 f に対して，F 上のある quaternion algebra とその整環の単数群に関する重さ k の Hecke 固有形式 g で

$$L(s,g) = L(s,f)L(s,f,\chi)$$

となるものを見出せ．

注意. 上において

$$L(s,g) = \sum_{\mathfrak{A}} \lambda_{\mathfrak{A}} N(\mathfrak{A})^{-s},\ L(s,f) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m m^{-s}$$

とおくと，すべての素 ideal $\mathfrak{P}$ に対して

$$(*) \quad \lambda_{\mathfrak{P}} = \begin{cases} a_p, & \mathfrak{P}\mathfrak{P}' = (p), \chi(p) = 1 \text{ のとき}, \\ a_p^2 - 2p^{k-1} & \mathfrak{P} = (p) \text{ のとき} \end{cases}$$

となる．

例. $F = \mathbf{Q}(\sqrt{2})$ とし，F 上の quaternion algebra B で，$D(B/F) = (\sqrt{2})(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})$ かつ，$B \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R} \cong M_2(\mathbf{R}) \times \mathbf{K}$ となるものをとり，ひとつの極大整環に対して $\Gamma = \Gamma(R,\mathfrak{O}_F)$ とおくと，$\dim_{\mathbf{C}} S_2(\Gamma) = 1$ であり，$\mathbf{H}/\Gamma$ の種数は 1 である．g を $S_2(\Gamma)$ の生成元とし，F の ideal $\mathfrak{A}$ に対して $\lambda_{\mathfrak{A}}$ を $\mathfrak{A}$ に対する Hecke 作用素 $T(\mathfrak{A})$ の固有値とする．一方，$\mathbf{Q}$ 上

の indefinite quaternion algebra B' で $D(B'/\mathbf{Q}) = (2)(7)$ となるものをとり，ひとつの極大整環 R' に対して $\Gamma' = \Gamma(R, \mathfrak{O}_F)$ とおくと前と同様に $\dim_{\mathbf{C}} S_2(\Gamma') = 1$ であり，$\mathbf{H}/\Gamma'$ の種数は 1 である．f を $S_2(\Gamma')$ の生成元とし，$m \in \mathbf{Z}_{>0}$ に対する Hecke 作用素 $T(m)$ の固有値を a_m とすると，

([**Doi-Naganuma1**]) $p = 3, 5, 11, 13, 17, 23, 31, 41, 47, 71, 73, 79$ について (*) が成り立つ．

一方，Shimizu[Shimizu] によれば，F 上の quaternion algebra B の square free level の整環に付随する zeta 関数は，判別式が (1) となる F 上の quaternion algebra のある整環に付随する zeta 関数となることが知られている．$K = \mathbf{Q}$ または F とするとき，K 上の indefinite quaternion algebra で判別式が (1) であるものは $M_2(K)$ と同型であるので，問題 2.1 において Γ' を $GL_2(\mathbf{Q})$ の数論的部分群と仮定してよい．また，$B = M_2(F)$ とし単数群として Hilbert modular 群をとることは自然であろう．かくして，問題 2.1 は次のように言い換えられる．

問題 2.2. $GL_2(\mathbf{Q})$ の数論的部分群 Γ' に関する重さ k の Hecke 固有形式 f に対して，$GL_2(F)$ のある数論的部分群 Γ に関する重さ k の Hecke 固有形式 g で

$$L(s, g) = L(s, f)L(s, f, \chi)$$

となるものを見出せ．

3 Doi-Naganuma lift

この節では前節の問題 2.1 において $\Gamma' = SL_2(\mathbf{Z})$ および $\Gamma_0(D)$ の場合を主として考察しよう．F を m 次総実代数体，$\mathfrak{O} = \mathfrak{O}_F$ をその整数環，$U = U_F$ をその単数群とする．また，$\mathfrak{d}$ を差積とする．F の元 a が総正のとき $a >> 0$ と書く．F の部分集合 S に対して S_+ で総正な S の元からなる集合を表す．また $\mathbf{a}$ および $\mathbf{h}$ でそれぞれ F の無限素点および有限素点の全体を表す．$GL_2(\mathbf{R})_+ = \{\gamma \in GL_2(\mathbf{R}) \mid \det\gamma > 0\}$ とおく．また，F の部分環 S に対して $GL_2^+(S) = \{\gamma \in GL_2(S) \mid \det\gamma >> 0\}$ とおく．$\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_m) \in GL_2(\mathbf{R})_+^m$ と $\mathbf{H}$ の m 個の 直積 $\mathbf{H}^m$ の元 $z = (z_1, ..., z_m)$ に対して $\gamma(z) = (\gamma_1(z_1), ..., \gamma_m(z_m))$ と定めることにより，$GL_2(\mathbf{R})_+^m$ の $\mathbf{H}^m$ への作用を定義する．また，$\kappa = (k_1, ..., k_m) \in \mathbf{Z}^m$ に対して $J_\kappa(\gamma, z) = \prod_{i=1}^m \det\gamma_i^{-k_i/2} j(\gamma_i, z_i)^{k_i}$ とおく．ここで，$\gamma_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix}$ に対して $j(\gamma_i, z_i) = c_i z_i + d_i$ と定義する．F の共役を $F^{(1)}, ..., F^{(m)}$ と

し，$\alpha \in F$ の共役を $\alpha^{(1)}, ..., \alpha^{(m)}$ とする．また，F の元を成分とする行列 $a = (a_{ij})$ に対して $a^{(l)} = (a_{ij}^{(l)})$ $(l = 1, ..., m)$ とおく．このとき，$GL_2^+(F) \ni \gamma \mapsto (\gamma^{(1)}, ..., \gamma^{(m)}) \in GL_2(\mathbf{R})_+^m$ により，$GL_2(F)^+$ を $GL_2(\mathbf{R})_+^m$ の部分群とみなし，$\gamma \in SL_2(\mathfrak{O})$ と $\mathbf{H}^m$ の元 $z = (z_1, ..., z_m)$ に対して $\gamma(z) = (\gamma^{(1)}(z_1), ..., \gamma^{(m)}(z_m))$ と定めることにより，$SL_2(\mathfrak{O})$ の $\mathbf{H}^m$ への作用を定義する． また，$\kappa = (k_1, ..., k_m) \in \mathbf{Z}^m$ と $\mathbf{H}^m$ 上の関数 $f(z)$ に対して $(f|_\kappa \gamma)(z) = \prod_{j=1}^{m} j(\gamma^{(j)}, z_j)^{-k_j} f(\gamma(z))$ と定義する．$\mathfrak{N}$ を $\mathfrak{O}$ の ideal とするとき，階数 $\mathfrak{N}$ の主合同部分群 $\Gamma(\mathfrak{N}) = \{\gamma \in SL_2(\mathfrak{O}) | \gamma \equiv 1 \bmod \mathfrak{N}\}$ が定義される．$SL_2(\mathfrak{O})$ の部分群 Γ が合同部分群であるとは Γ がある主合同部分群 $\Gamma(\mathfrak{N})$ を含むときをいう．$\Gamma(\mathfrak{N})$ や $\Gamma_0(\mathfrak{N}) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathfrak{O}) \mid c \equiv 0 \bmod \mathfrak{N}\}$ は合同部分群である．Γ を ある主合同部分群 $\Gamma(\mathfrak{N})$ を含む $SL_2(\mathfrak{O})$ の部分群とし，χ を $\Gamma(\mathfrak{N})$ 上自明な Γ の指標とする．$\mathbf{H}^m$ 上の正則関数 $f(z)$ は,

i) $(f|_\kappa \gamma)(z) = \chi(\gamma) f(z) \quad (\gamma \in \Gamma, z \in \mathbf{H}^m)$,

ii) すべての $\alpha \in SL_2(F)$ と $\epsilon_1, ..., \epsilon_m > 0$ に対して $(f|_\kappa \alpha)(z)$ は $\{z = (x_1 + iy_1, ..., x_m + iy_m) \in \mathfrak{H}^m \mid y_l - \epsilon_l > 0 \ (\ l = 1, ..., m)\}$ で有界,

という条件をみたすとき，重さ κ, 指標 χ の Γ に関する Hilbert modular form という．Koecher の原理より，$F \neq \mathbf{Q}$ のとき，条件 ii) は自動的に成立する．特に $\kappa = (k, ..., k)$ のとき，単に重さ k であるともいう．$\mathfrak{O}$ の ideal $\mathfrak{N}$ に対して $\mathcal{L}(\mathfrak{N}) = \{a \in \mathfrak{N}^{-1}\mathfrak{d}^{-1} \mid \ a$ は総正または $0\}$ とおく．Γ を上のとおりとするとき，f が重さ κ の Γ に関する Hilbert modular form ならば すべての $\alpha \in SL_2(F)$ に対して

$$(f|_\kappa \alpha)(z) = \sum_{a \in \mathcal{L}(\mathfrak{N})} c_\alpha(a) \mathbf{e}(\sum_{l=1}^{m} a^{(l)} z_l)$$

と Fourier 展開される．ここで $\mathbf{e}(x) = \exp(2\pi i x)$ である． すべての $\alpha \in SL_2(F)$ に対して $c_\alpha(0) = 0$ をみたすとき f を Hilbert 尖点形式という．$M_\kappa(\Gamma, \chi)$ で重さ κ の Γ に関する Hilbert modular form の空間を表し，$S_\kappa(\Gamma, \chi)$ で重さ κ の Γ に関する Hilbert 尖点形式の空間を表す．χ が自明指標のときはこれらを単に $M_\kappa(\Gamma), S_\kappa(\Gamma)$ と書く．特に N を整数とし，ψ を N を法とする Dirichlet 指標とするとき，$SL_2(\mathbf{Z})$ の合同部分群 $\Gamma_0(N)$ の指標 $\tilde{\psi}$ が $\tilde{\psi} : \Gamma_0(N) \ni \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \psi(d)$ により定義される．このとき $S_k(\Gamma_0(N), \tilde{\psi})$ を $S_k(\Gamma_0(N), \psi)$ と書く．

さて，$G = SL_2(F)$ とし G_A をその adele 化としたとき，G_A 上の保型

形式の定義を復習しよう.[1] さらに, $G_\infty = \prod_{v\in\mathbf{h}} SL_2(F_v), G_\mathbf{h} = \{(x_v) \in G_A \mid x_v = 1\ (v \in \mathbf{a})\}, K_f = \prod_{v\in\mathbf{h}} SL_2(\mathfrak{O}_v), K_\infty = \prod_{v\in\mathbf{a}} SO_2(F_v)$ とおく. ここで, $\mathfrak{O}_v$ および F_v はそれぞれ $\mathfrak{O}$ および F の v における完備化である. しばらくの間, 複素上半平面の直積 $\mathbf{H}^m$ を $\mathbf{a}$ を添数集合とする直積 $\mathbf{H}^\mathbf{a}$ とみなす. このとき, $u = (u_v) \in G_\infty, z = (z_v) \in \mathbf{H}^\mathbf{a}$ と $\kappa = (k_v) \in \mathbf{Z}^\mathbf{a}$ について $J_\kappa(u, z) = \prod_{v\in\mathbf{a}} j(u_v, z_v)^{k_v}$ とおく. $\mathfrak{O}$ の ideal $\mathfrak{N}$ に対して

$$C_\mathfrak{N} = \{(a_v) \in K_f | a_v \equiv 1 \bmod \mathfrak{N}\mathfrak{O}_v,\ v \in \mathbf{h}\}$$

とおく. C を K_f の compact 開部分群で, C がある $C_\mathfrak{N}$ を含むものとする. このとき $f : G_A \longrightarrow \mathbf{C}$ が C に関する重さ κ の G_A 上の保型形式であるとは次の条件 (1) を満たすときをいう.

(1) 任意の $\gamma \in G, g \in G_A, u_\infty \in K_\infty, u_f \in C$ に対して

$$f(\gamma g u_\infty u_f) = f(g) J_\kappa(u_\infty, \mathbf{i})^{-1}.$$

ここで $\mathbf{i} = (i, \cdots, i) \in \mathbf{H}^\mathbf{a}$ である.

f が (1) の条件を満たすとき, 任意の $u \in K_f$ に対してある関数 $f_u : \mathbf{H}^\mathbf{a} \longrightarrow \mathbf{C}$ がただひとつ存在して, 任意の $y \in G_\infty$ に対して

$$f(uy) = f_u(y(\mathbf{i})) J_\kappa(y, \mathbf{i})^{-1}$$

となる. このとき f が G_A 上の正則保型形式であるとは次の条件 (2) を満たすときをいう.

(2) 任意の $u \in G_\mathbf{h}$ に対して $SL_2(\mathfrak{O})$ のある合同部分群 Γ が存在して $f_u \in M_\kappa(\Gamma)$.

さらに, f が G_A 上の尖点形式であるとは次の条件 (3) を満たすときをいう.

(3) 任意の $u \in G_\mathbf{h}$ に対して $SL_2(\mathfrak{O})$ のある合同部分群 Γ が存在して $f_u \in S_\kappa(\Gamma)$.

C に関する重さ k の G_A 上の正則保型形式全体および尖点形式全体からなる $\mathbf{C}$-ベクトル空間をそれぞれ $\mathcal{M}_\kappa(C)$ および $\mathcal{S}_\kappa(C)$ で表す. f が G_A 上の正則保型形式であれば, 任意の $u \in G_\mathbf{h}$ に対して $f_u \in M_\kappa(G \cap uCu^{-1})$ である.

$\mathcal{M}_\kappa(C)$ および $\mathcal{S}_\kappa(C)$ は有限次元 $\mathbf{C}$ ベクトル空間となる. このとき強近似定理より

$$G_A = GK_f$$

[1] ここでは他の稿([高瀬],[今野])とは違い, $(GL_2(K)_A$ 上ではなく$)SL_2(K)_A$ 上の保型形式を扱う. 違いについては脚注で簡単にふれる.

であり，任意の $u \in G_{\mathbf{h}}$ に対して写像

$$\Phi : \mathcal{M}_\kappa(C) \ni f \mapsto f_u \in M_\kappa(G \cap uCu^{-1})$$

は同型写像になる.[2] 特に $\mathcal{S}_\kappa(C_{\mathfrak{O}})$ は $S_\kappa(SL_2(\mathfrak{O}))$ と同型になる．[3]

次に，Hecke 環とその $\mathcal{M}_\kappa(C)$ への作用（Hecke 作用素）の定義をする．以下，簡単のために $C = C_{\mathfrak{O}}$ とする．$\tilde{C}_{\mathfrak{O}} = \prod_{v \in \mathbf{h}}(SL_2(F_v) \cap M_2(\mathfrak{O}_v)), \tilde{W} = G_\infty \times \tilde{C}_{\mathfrak{O}}, W = G_\infty \times C_{\mathfrak{O}}$ とおき，

$$R(W, \tilde{W}) = \{\sum_{y \in \tilde{W}} c_y WyW \ (y \in \tilde{W}, c_y \in \mathbf{C})\}$$

とおく，ここで和 $\sum_{y \in \tilde{W}} c_y WyW$ は有限形式和である．$R(W, \tilde{W})$ にしかるべき積が定義され，これにより，$R(W, \tilde{W})$ は単位元を持つ可換環になる．これを，Hecke 対 $(W, \tilde{W})$ に付随する Hecke 環という．さて，$y \in \tilde{W}$ に対して

$$WyW = \sqcup_j Wy_j \quad (y_j \in G_{\mathbf{h}} \cap \tilde{W})$$

と表すことができる．このとき $f \in \mathcal{M}_\kappa(C_{\mathfrak{O}})$ に対して，G_A 上の関数 $f|WyW$ を

$$(f|WyW)(x) = \sum_j f(xy_j^{-1})$$

で定義する．このとき $f|WyW \in \mathcal{M}_\kappa(C_{\mathfrak{O}})$ であることが容易にわかり，これにより $R(W, \tilde{W})$ の元の $\mathcal{M}_\kappa(C_{\mathfrak{O}})$ への作用が定義される．これを Hecke 作用素という．$R(W, \tilde{W})$ の同時固有関数を Hecke 固有形式という．$\mathcal{M}_\kappa(C_{\mathfrak{O}})$ は Hecke 固有形式からなる基底を持つ．$f \in \mathcal{M}_\kappa(C_{\mathfrak{O}})$ を Hecke 固有形式とする．$\mathfrak{O}$ の ideal $\mathfrak{A}$ に対して $R(W, \tilde{W})$ の元 $T(\mathfrak{A})$ を

$$T(\mathfrak{A}) = \sum_{\substack{WyW \in W \backslash \tilde{W}/W \\ \det y\mathfrak{O} = \mathfrak{A}}} WyW$$

と定義すると，ある $\lambda_{\mathfrak{A}} = \lambda_{f,\mathfrak{A}} \in \mathbf{C}$ が存在して，

$$f|T(\mathfrak{A}) = \lambda_{\mathfrak{A}} f$$

と表される．このとき，F の類指標 χ に対して，χ で捻った f の L 関数 $L(s, f, \chi)$ を

$$L(s, f) = \prod_{\mathfrak{P}}(1 - \chi(\mathfrak{P})\lambda_{\mathfrak{P}} N(\mathfrak{P})^{-s} + \chi(\mathfrak{P})^2 N(\mathfrak{P})^{-2s+k-1})^{-1}$$

[2] これに対して，$GL_2(K)_A$ 上の正則保型形式の空間は類数個の（古典的な意味での）modular forms の空間の直積になる．

[3] 従って，ここだけでいうと adele 化する利点は見えてこない．しかし，以下に述べる Hecke 理論をスムーズに展開するためには adele 化が欠かせない．

で定義する．ここで $\mathfrak{P}$ は $\mathfrak{O}$ のすべての素 ideal をわたる．χ が主指標のとき $L(s,f,\chi)$ を単に $L(s,f)$ と書く．

注意. $f \in M_\kappa(SL_2(\mathfrak{O}))$ に対して $T(\mathfrak{A})$ の作用を

$$f|T(\mathfrak{A}) = \Phi(\Phi^{-1}(f)|T(\mathfrak{A}))$$

で定義する．F の狭義類数を 1 とすると，$M_\kappa(SL_2(\mathfrak{O}))$ 上に Hecke 作用素が $M_k(SL_2(\mathbf{Z}))$ 上におけるのと同様に古典的な方法で定義され，それが本質的に上に述べた作用と一致する．

定理 3.1. F を実 2 次体とし，χ を $F/\mathbf{Q}$ に対応する Kronecker 指標とする．このとき，Hecke 固有形式 $f \in S_k(SL_2(\mathbf{Z}))$ に対してある Hecke 固有形式 $\hat{f} \in \mathcal{S}_{k,k}(C_{\mathfrak{O}})$ が存在して

$$L(s,\hat{f}) = L(s,f)L(s,f,\chi)$$

を満たす.

以下，狭義類数 1 の仮定の下で，[Doi-Naganuma2] に従い，定理 3.1 の証明の概略を与えよう．F の狭義類数を 1 とするとき，$f \in \mathcal{S}_{k,k}(C_{\mathfrak{O}})$ に対応する $S_{k,k}(SL_2(\mathfrak{O}))$ の元を同じ f で表すことにすると，f は

$$f(z) = \sum_{\mathfrak{A}} \sum_{\substack{\alpha \in \mathfrak{A}\mathfrak{d}^{-1} \\ \alpha >> 0}} a(\mathfrak{A})\mathbf{e}(\mathrm{tr}(\alpha z))$$

と Fourier 展開される．ここで，$\alpha \in F$ に対して $\mathrm{tr}(\alpha z) = \sum_{i=1}^m \alpha^{(i)} z_i$ である．このとき，

$$L(s,f) = \sum_{\mathfrak{A}} a(\mathfrak{A})N(\mathfrak{A})^{-s}$$

である．

$\mathfrak{P}_\infty^{(1)}, \mathfrak{P}_\infty^{(2)}$ を F の無限因子とする． 整数 m に対して，導手が $\mathfrak{P}_\infty^{(1)}\mathfrak{P}_\infty^{(2)}$ の F の量指標 ξ_m で，すべての ideal (α) に対して

$$\xi_m((\alpha)) = |\alpha/\alpha'|^{m\pi i/\log\epsilon_0}$$

を満たすものをとる．[4] ここで，α' は α の共役であり，ϵ_0 は F の基本単数で $\epsilon_0 > 1$ となるものである．$\xi_m((\alpha))$ は $\alpha \bmod U_+$ のみによるので，このときに $\xi_m((\alpha))$ を単に $\xi_m(\alpha)$ と書く． さて，$f(z) = \sum_{m=1}^\infty a_m \mathbf{e}(mz) \quad \in$

[4] ここでの量指標の定義は古典的なものである．これのアデール的言い換え（すなわち，$F_A^\times$ の連続指標で，$F^\times$ で自明となるもの) は容易である．

$S_k(SL_2(\mathbf{Z}))$ を定理 3.1 における Hecke 固有形式とする．F の素 ideal $\mathfrak{P}$ に対して $c_{\mathfrak{P}}$ を以下のように定義する．

$$c_{\mathfrak{P}} = \begin{cases} a_p, & \mathfrak{P}\mathfrak{P}' = (p) \quad \text{のとき}, \\ a_p^2 - 2p^{k-1}, & \mathfrak{P} = (p) \text{ のとき} \end{cases}$$

とおく．ここで，$\mathfrak{P}'$ は $\mathfrak{P}$ の共役である．このとき，

$$D(s,f,\chi) = \prod_{\mathfrak{P}} (1 - c_{\mathfrak{P}} N(\mathfrak{P})^{-s} + N(\mathfrak{P})^{-2s+k-1})^{-1}$$

とおくと，

$$D(s,f,\chi) = L(s,f)L(s,f,\chi)$$

と表される．問題は

$$L(s,\hat{f}) = D(s,f,\chi)$$

となる $\hat{f} \in S_{k,k}(SL_2(\mathfrak{O}))$ があるかどうかである．これをみるために，ξ_m に対して

$$D(s,f,\chi,\xi_m) = \prod_{\mathfrak{P}} (1 - \xi_m(\mathfrak{P}) c_{\mathfrak{P}} N(\mathfrak{P})^{-s} + \xi_m(\mathfrak{P})^2 N(\mathfrak{P})^{-2s+k-1})^{-1},$$

$$D^*(s,f,\chi,\xi_m) = (2\pi)^{-2s}\Gamma(s+im\kappa)\Gamma(s-im\kappa)D(s,f,\chi,\xi_m)$$

とおく．ここで，$\kappa = \frac{\pi}{\log \epsilon_0}$ である．

定理 3.2. $D^*(s,f,\chi,\xi_m)$ は全平面に正則関数に解析接続され次の関数等式を満たす：

$$D^*(s,f,\chi,\xi_m) = D^{k-2s} D^*(k-s,f,\chi,\xi_{-m}).$$

ここに，D は F の判別式である．

定理 3.2 の証明の概略を説明するために，量指標 ξ_m に対して，次のような $\mathbf{H}$ 上の関数 $g(z) = g(z,\xi_m)$ を定義する．

$$g(z,\xi_m) = \sum_{\substack{\mu \in \mathfrak{O}/U_+, \mu \neq 0 \\ z = x+iy}} \xi_m(\mu) y^{1/2} K_{im\kappa}(2\pi |N(\mu)| y) \mathbf{e}(N(\mu)x)$$

とおく．ここで $N(\nu)$ は ν のノルムであり，$K_\nu(y)$ は [Maaß] における Bessel 関数で以下のように定義される:

$$K_\nu(y) = 1/2 \int_0^\infty \exp(-y/2(t+t^{-1})) t^{\nu-1} dt.$$

このとき，次のことが成り立つ．

(1) $z=x+iy$ とするとき，$g(z)$ は x,y について実解析的で，ある正の定数 k_1,k_2 が存在して，$y\longrightarrow\infty$ (resp. $y\longrightarrow 0$) のとき x に関して一様に

$$g(z)=O(y^{k_1})\quad (resp.\ g(z)=O(y^{-k_2}))$$

(2) 任意の $\gamma\in\Gamma_0(D)$ に対して

$$g(\gamma(z))=\chi(D)g(z).$$

(3)

$$g(-1/Dz)=g(z).$$

さらに，次のような Eisenstein 級数 $G_k(s,z,\chi)$ を定義する．

$$G_k(s,z,\chi)=\sum_{\substack{\mathbf{Z}\ni c,d,(c,d)\neq(0,0)\\ c\equiv 0\ (D)}}\chi(d)\frac{y^{s+1/2}(cz+d)^k}{|cz+d|^{2s+1}}.$$

このとき，Rankin-Selberg 法により次のことを示すことができる．

補題 3.3. 次が成り立つ．

$$\int_{\mathbf{H}/\Gamma_0(D)}y^{s-3/2}f(z)\overline{g(z,\xi_m)}G_k(s,z,\chi)dxdy=\frac{2\pi^{s+1/2}}{\Gamma(s+1/2)}D^*(s,f,\chi,\xi_m).$$

定理 3.2 は補題 3.3 と $G_k(s,z,\chi)$ の解析的性質より証明される．

次に，Hilbert modular form に関する Weil の逆定理を紹介する．[5] 以下しばらくの間，F は一般の n 次総実代数体とする． また，$\mathfrak{P}_\infty^{(i)}$ $(i=1,...,n)$ を F の無限因子とする．埋め込み $\iota:F\ni\alpha\mapsto(\alpha^{(1)},....,\alpha^{(n)})\in\mathbf{R}^n$ により，$F\otimes_{\mathbf{Q}}\mathbf{R}$ を $\mathbf{R}^n$ と同一視する．この同一視の下で，F の総正単数群 U_+ は $\mathbf{R}_+^n$ の部分集合とみなせる．単数定理より $\mathbf{Z}^{n-1}$ から U_+ への同型 ϵ が存在する．ϵ は $\mathbf{R}^{n-1}$ から $\mathbf{R}^n$ の中への同型に拡張される．このとき，ある実数 $c_{\nu\lambda}$ $(\nu=1,....,n,\lambda=1,...,n-1)$ が存在して任意の $r=(r_1,...,r_{n-1})\in\mathbf{R}^{n-1}$ に対して

$$\epsilon(r_1,...,r_{n-1})=(\exp(\sum_{\lambda=1}^{n-1}c_{\nu\lambda}r_\lambda))_{1\leq\nu\leq n}$$

となる．ここで

$$\sum_{\nu=1}^{n}c_{\nu\lambda}=0\ (\lambda=1,...,n-1)$$

[5] ここでは，簡単な場合に限って述べる．一般の場合については [高瀬] を参照のこと．

となることに注意する．さて，整数の組 $m=(m_1,...,m_{n-1})\in\mathbf{Z}^{n-1}$ に対して

$$\sum_{\nu=1}^{n} c_{\nu\lambda}\alpha_\nu(m)=2\pi m_\lambda \qquad (\lambda=1,...,n-1),$$

$$\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu(m)=0$$

を満たす複素数 $\alpha_\nu(m)$ をとり，関数 $\tilde{\xi}_m:\mathbf{R}_+^n\longrightarrow\mathbf{C}^\times$ を

$$\tilde{\xi}_m(x)=\prod_{\nu=1}^{n}x_\nu^{\alpha_\nu(m)} \qquad (x=(x_1,...,x_n)\in\mathbf{R}_+^n)$$

で定義し，導手が $\prod_{i=1}^n\mathfrak{P}_\infty^{(i)}$ となる F の量指標 ξ_m で

$$\xi_m((\alpha))=\tilde{\xi}_m(\iota(\alpha)) \qquad (\alpha\in F)$$

を満たすものをとる．$\xi_m((\alpha))$ は $\alpha \bmod U_+$ のみによるので，このときに $\xi_m((\alpha))$ を単に $\xi_m(\alpha)$ と書く．

注意. F が実 2 次体のとき $\alpha_1(m)=\frac{m\pi i}{\log\epsilon_0},\alpha_2(m)=-\alpha_1(m)$ とおくと前に定義した ξ_m は $\tilde{\xi}_m$ を用いて次のように表される．

$$\xi_m((\alpha))=\tilde{\xi}_m((|\alpha|,|\alpha'|)).$$

さて，数列 $\{c(\mu)\}_{\mu\in\mathfrak{O}_+/U_+}$ は次の条件を満たすとする．

(1) $c(\mu)$ は $\mu \bmod U_+$ のみによる．

(2)　ある定数 M,λ が存在してすべての μ に対して

$$|c(\mu)|\leq MN_{F/\mathbf{Q}}(\mu)^\lambda.$$

このとき Dirichlet 級数 $\phi(s,\xi_m)$ を

$$\phi(s,\xi_m)=\sum_{\mu\in\mathfrak{O}_+/U_+}\xi_m(\mu)c(\mu)N(\mu)^{-s}$$

とおく．これは $\mathrm{Re}(s)>\lambda$ で広義一様絶対収束する．また，$\phi^*(s,\xi_m)=(2\pi)^{-ns}\prod_{\nu=1}^n\Gamma(s+\alpha_\nu(m))\phi(s,\xi_m)$ とおく．さらに，$\mathbf{H}^n$ 上の関数 $h(z)=h(z_1,...,z_n)$ を

$$h(z)=\sum_{\mu\in\mathfrak{O}_+/U_+}c(\mu)\sum_{\gamma\in U_+}\mathbf{e}(\mathrm{tr}(\mu\gamma z))$$

で定義する．次の定理は Weil による．

定理 3.4. k を正の整数とし，$\mathfrak{d}=(\delta)$ を F の共役差積とするとき，次の (A),(B) は同値である．

(A) すべての $m\in\mathbf{Z}^{n-1}$ に対して $\phi^*(s,\xi_m)$ は全 s 平面に正則関数に解析接続され，関数等式

$$\phi^*(s,\xi_m)=N_{F/\mathbf{Q}}(\delta)^{k/2-s}\xi_m(\delta)\phi^*(k-s,\xi_{-m})$$

を満たす．さらに，すべての帯状領域 $\sigma'\le\mathrm{Re}(s)\le\sigma''$ で $\phi^*(s,\xi_m)$ は有界である．

(B) $h(z)$ は次の関数等式を満たす.

$$h(z)=(-1)^{nk/2}N_{F/\mathbf{Q}}(\delta)^{-k/2}(z_1\cdots z_n)^{-k}h(-1/\delta^{(1)}z_1,\cdots,-1/\delta^{(n)}z_n).$$

定理 3.1 の証明 f を $S_k(SL_2(\mathbf{Z}))$ の Hecke 固有形式とする．$D(s,f,\chi)$ を

$$D(s,f,\chi)=\sum_{\nu\in\mathfrak{O}_+/U_+}c(\nu)N(\nu)^{-s}$$

と表し，この $\{c(\nu)\ (\nu\in\mathfrak{O}_+/U_+)\}$ に対して，定理 3.4 の $h(z)$ をとると，定理 3.2, および定理 3.4 より，

$$h(z)=D^{-k}(z_1z_2)^{-k}h(-1/Dz_1,-1/Dz_2)$$

となる．このとき，$\hat{f}(z)=h(z_1/\epsilon_0\sqrt{D},-z_2/\epsilon_0'\sqrt{D})$ とおくと，$\hat{f}\in S_{k,k}(SL_2(\mathfrak{O}))$ であり，定理 3.1 の条件を満たす.

以上， 狭義類数 1 の仮定の下で, 逆定理を用いた lift の存在の証明の概略を述べた．一般的な場合を上の方針で示すためには，問題を保型表現の持ち上げとして定式化し，それを証明するのが自然である．この方針のもとで，H. Jacquet[Jacquet] は定理 3.1 を証明した． この詳細および trace formula を用いた定式化および証明 (H. Saito [Saito], R. Langlands [Langlands]) については今野氏の報告 [今野] を参照のこと．

次に，いわゆる Neben type の場合の Do-Naganuma lift を考えよう．D を $D\equiv 1 \bmod 4$ を満たす平方因子をもたない自然数とし， ψ_D を D を法とする原始的 2 次指標とする．$f(z)=\sum_{m=1}^{\infty}a_m\mathbf{e}(mz)\in S_k(\Gamma_0(D),\psi_D)$ に対して

$$f_\rho(z)=\sum_{m=1}^{\infty}\overline{a_m}\mathbf{e}(mz)$$

とおく．$f_\rho(z)$ もまた $S_k(\Gamma_0(D),\psi_D)$ に属する．このとき，

$$L(s,f_\rho)=\frac{L(s,f,\psi_D)}{\prod_{p|D}(1-\overline{a_p}p^{-s})}$$

である.

定理 3.5. $F = \mathbf{Q}(\sqrt{D})$ を D を判別式とする実 2 次体とし，ψ_D をこの拡大に対応する Kronecker 指標とする．Hecke 固有形式 $f \in S_k(\Gamma_0(D), \psi_D)$ に対してある Hecke 固有形式 $\hat{f} \in \mathcal{S}_{k,k}(C_{\mathfrak{D}_F})$ が存在して

$$L(s, \hat{f}) = L(s, f)L(s, f_\rho)$$

を満たす.

定理 3.5 の証明は狭義類数が 1 のときは，定理 3.1 の場合とほぼ同様である．[Naganuma] においては D が $D \equiv 1 \bmod 4$ となる素数のときのみを扱っているが, Asai は [Asai2] において平方因子をもたない level をもつ Neben type の場合に拡張した．類数が一般のときは定理 3.1 の証明の後に述べたような方針で証明される.

さて，Neben type のときの lift において対応する L 関数は $L(s, f)$ と $L(s, f, \psi_D)$ の積ではなく，$L(s, f, \psi_D)$ を $L(s, f_\rho)$ に置き換える必要があった．そこで，定理 3.1, 3.5 を統一的に扱うために保型形式の指標による捻りを考える．すなわち，$f(z) = \sum_{m=1}^\infty a_m \mathbf{e}(mz) \in S_k(\Gamma_0(N), \psi)$ と D を法とする Dirichlet 指標 χ に対して，$f \otimes \chi$ を

$$(f \otimes \chi)(z) = \sum_{m=1}^\infty \chi(m) a_m \mathbf{e}(mz)$$

で定義する．よく知られているように，$f \otimes \chi \in S_k(\Gamma_0(L), \psi\chi^2)$ である．ここで $L = \mathrm{LCM}(N, D^2)$ である．また，f が Hecke 固有形式なら f も Hecke 固有形式であるが，f が new form であっても，$f \otimes \chi$ は必ずしもそうではない．そこで，$f \otimes \chi$ に付随する new form を $\widetilde{f \otimes \chi}$ で表す. $f \in S_k(SL_2(\mathbf{Z}))$ のときは $f \otimes \psi_D$ は $S_k(\Gamma_0(D^2))$ における new form で $L(s, f \otimes \psi_D) = L(s, f, \psi_D)$ である．一方，$f \in S_k(\Gamma_0(D), \psi_D)$ のときは $f \otimes \psi_D$ は $S_k(\Gamma_0(D^2))$ における new form ではなく，$\widetilde{f \otimes \psi_D} = f_\rho$ である．以上により，定理 3.1, 3.5 は次の形にまとめられる.

定理 3.6. $S = S_k(SL_2(\mathbf{Z}))$ または $S_k(\Gamma_0(D), \psi_D)$ とする． Hecke 固有形式 $f \in S$ に対してある Hecke 固有形式 $\hat{f} \in \mathcal{S}_{k,k}(C_{\mathfrak{D}})$ が存在して

$$L(s, \hat{f}) = L(s, f)L(s, \widetilde{f \otimes \psi_D})$$

を満たす.

今まで，$\mathcal{S}_{k,k}(C_{\mathfrak{D}})$ への 2 種類の lift を考えてきたが，これ以外に lift がないかどうか考えて見よう．すなわち,

”F を実２次体，D を F の判別式とし，ψ_D を F に対応する Kronecker 指標とする．また，N を正の整数，χ を N を法とする Dirichlet 指標とし，$f \in S_l(\Gamma_0(N), \chi)$ を new form とする．このとき，ある $g \in \mathcal{S}_{k,k}(C_{\mathfrak{D}})$ が存在して

$$L(s,g) = L(s,f)L(s,\widetilde{f \otimes \psi_D})$$

となるならば，$f \in S_k(SL_2(\mathbf{Z}))$ または $f \in S_k(\Gamma_0(D), \psi_D)$ であるか？”

これは一般には成り立たない．実際，Hecke 固有形式 $f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \mathbf{e}(mz) \in S_k(SL_2(\mathbf{Z}))$ に対して，$g = f \otimes \psi_D$ は上に述べたように，$S_k(\Gamma_0(D^2))$ の new form で $\widetilde{g \otimes \psi_D} = f$ であるから，

$$L(s,\hat{f}) = L(s,g)L(s,\widetilde{g \otimes \psi_D})$$

となる．しかし，このような”捻り”を除けば本質的には $f \in S_k(SL_2(\mathbf{Z}))$ または $f \in S_k(\Gamma_0(D), \psi_D)$ であることがわかる．正確に述べる次のとおりである．証明はたとえば [Ghate] を参照のこと．

定理 3.7. F を実２次体，D を F の判別式とし，ψ_D を F に対応する Kronecker 指標とする．また，N を正の整数，ψ を N を法とする Dirichlet 指標とし，$f \in S_l(\Gamma_0(N), \psi)$ を new form とする．このとき，ある $g \in \mathcal{S}_{k,k}(C_{\mathfrak{D}})$ が存在して

$$L(s,g) = L(s,f)L(s,\widetilde{f \otimes \psi_D})$$

となるとする．このとき，$l = k$ かつ，$\psi = 1$ または $\psi = \psi_D$ である．さらに次が成り立つ．

(1) $\psi = 1$ のとき，$S_k(SL_2(\mathbf{Z}))$ に属する primitive form h が存在して $f = \widetilde{h \otimes \psi_D}$ または $f = \widetilde{h \otimes \psi_{D_1}}$ となる．ここで D_1 は D の約数で，D_1 および D/D_1 がともに基本判別式となるもの．

(2) $\psi = \psi_D$ のとき，$S_k(\Gamma_0(D), \psi_D)$ に属する primitive form h が存在して $f = \widetilde{h \otimes \psi_D}$ となる．

4 Doi-Naganuma lift の線形化

定理 3.1, 3.5 の対応は，Hecke 固有形式の間の対応であったが，これを線形化することを考える．そのために，Zagier は [Zagier1] において次のような関数を考えた．D を実２次体 F の判別式とし $\mathfrak{d}$ を差積とする．さらに F の狭義類数は 1 であると仮定する．このとき，$m \in \mathbf{Z}_{>0}$ に対して

$(z_1, z_2) \in \mathbf{H}^2$ の関数 $\omega_m(z_1, z_2)$ を

$$\omega_m(z_1, z_2) = \sum_{\substack{a,b\in\mathbf{Z},\lambda\in\mathfrak{d}^{-1} \\ N(\lambda)-ab=m/D}} (az_1z_2 + \lambda^{(1)}z_1 + \lambda^{(2)}z_2 + b)^{-k}$$

と定義する．このとき，$\omega_m(z_1, z_2)$ が $\mathcal{S}_{k,k}(SL_2(\mathfrak{O}))$ に属することが証明される．さらに，$(z_1, z_2, \tau) \in \mathbf{H}^2 \times \mathbf{H}$ の関数 $\Omega(z_1, z_2, \tau)$ を

$$\Omega(z_1, z_2, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} m^{k-1}\omega_m(z_1, z_2)\mathbf{e}(m\tau)$$

と定義する．これは，(z_1, z_2) の関数として $S_{k,k}(SL_2(\mathfrak{O}))$ に属するが，同時に τ の関数として $S_k(\Gamma_0(D), \psi_D)$ に属することが証明される．それ故，

$$I : S_k(\Gamma_0(D), \psi_D) \ni f \mapsto < f, \Omega(z_1, z_2, *) >_{\Gamma_0(D)} \in S_{k,k}(SL_2(\mathfrak{O}))$$

なる $\mathbf{C}$-線形写像が定義できる．ここで，$< *, * >$ は $S_k(\Gamma_0(D), \psi_D)$ における Petersson inner product である．

定理 4.1. I は Hecke 作用素と両立し，さらに Hecke 固有形式 f に対して $I(f)$ は f の Doi-Naganuma lift である．

注意. T. Oda は [Oda] においてある 2 次空間に付随する theta 対応を考えることにより上の写像 I が自然に得られることを示した．

5 Asai zeta 関数

次に Doi-Naganuma lift が $SL_2(\mathbf{Z})$ に関する primitive form からの lift であるか，または,$\Gamma_0(D)$ に関する指標 ψ_D の primitive form からの lift であるかを判定する T. Asai の結果 [Asai1] を紹介する．（ただし，原論文とは多少証明方針を変えている．）F, χ 等は定理 3.1 のとおりとする．$g(z) \in \mathcal{S}_{k,k}(C_{\mathfrak{O}})$ を Hecke 固有形式とする．各素 ideal $\mathfrak{P}$ に対して $\lambda_{\mathfrak{P}} = \lambda_{g,\mathfrak{P}}$ を第 3 節に述べた Hecke 作用素 $T(\mathfrak{P})$ の固有値とし，$\alpha_{\mathfrak{P}}, \beta_{\mathfrak{P}}$ を $\alpha_{\mathfrak{P}} + \beta_{\mathfrak{P}} = \lambda_{\mathfrak{P}}, \alpha_{\mathfrak{P}}\beta_{\mathfrak{P}} = N(\mathfrak{P})^{k-1}$ を満たす複素数とする．このとき，第 3 節における L 関数 $L(s, g)$ は

$$L(s, g) = \prod_{\mathfrak{P}}\{(1 - \alpha_{\mathfrak{P}}N(\mathfrak{P})^{-s})(1 - \beta_{\mathfrak{P}}N(\mathfrak{P})^{-s})\}^{-1}$$

と表される．さて，各素数 p に対して $G_p(s, g)$ および $G_p(s, g, \chi)$ を

$$G_p(s, g) = \begin{cases} \{(1 - \alpha_{\mathfrak{P}_1}\alpha_{\mathfrak{P}_2}p^{-s})(1 - \alpha_{\mathfrak{P}_1}\beta_{\mathfrak{P}_2}p^{-s}) & \\ \times(1 - \beta_{\mathfrak{P}_1}\alpha_{\mathfrak{P}_2}p^{-s})(1 - \beta_{\mathfrak{P}_1}\beta_{\mathfrak{P}_2}p^{-s})\}^{-1}, & \chi(p) = 1, p = \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2 \\ \{(1 - \alpha_{\mathfrak{P}}p^{-s})(1 - \beta_{\mathfrak{P}}p^{-s})(1 - p^{2k-2-2s})\}^{-1}, & \chi(p) = -1, p = \mathfrak{P} \\ \{(1 - \alpha_{\mathfrak{P}}^2p^{-s})(1 - \beta_{\mathfrak{P}}^2p^{-s})(1 - p^{k-1-s})\}^{-1}, & \chi(p) = 0, p = \mathfrak{P}^2, \end{cases}$$

$$G_p(s,g,\chi)=\begin{cases}\{(1-\alpha_{\mathfrak{P}_1}\alpha_{\mathfrak{P}_2}p^{-s})(1-\alpha_{\mathfrak{P}_1}\beta_{\mathfrak{P}_2}p^{-s}) & \\ \times(1-\beta_{\mathfrak{P}_1}\alpha_{\mathfrak{P}_2}p^{-s})(1-\beta_{\mathfrak{P}_1}\beta_{\mathfrak{P}_2}p^{-s})\}^{-1}, & \chi(p)=1, p=\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\\ \{(1+\alpha_{\mathfrak{P}}p^{-s})(1+\beta_{\mathfrak{P}}p^{-s})(1-p^{2k-2-2s})\}^{-1}, & \chi(p)=-1, p=\mathfrak{P}\\ (1-p^{k-1-s})^{-1}, & \chi(p)=0, p=\mathfrak{P}^2\end{cases}$$

とおき，$G(s,g)$ および $G(s,g,\chi)$ を

$$G(s,g)=\prod_p G_p(s,g),\quad G(s,g,\chi)=\prod_p G_p(s,g,\chi)$$

で定義する．これらを Asai zeta 関数という これらは全平面に有理型関数に解析接続され，$s=k$ で高々 1 位の極を持つ．F の狭義類数は 1 とするとき，$G(s,g)$ および $G(s,g,\chi)$ は g の Fourier 係数を用いて以下のように表される．すなわち，$\mathfrak{d}$ を F の差積とし，$\mathfrak{d}=(d), d\in F$ とおくとき，$g(z)=\sum_{\mu\in\mathfrak{O}+/U+}C(\mu)\sum_{\epsilon\in U_+}\mathbf{e}(\mathrm{tr}(\epsilon\mu z/d)\in S_{k,k}(SL_2(\mathfrak{O}))$ に対して，$G(s,g)$ および $G(s,g,\chi)$ は

$$G(s,g)=\zeta(2s-2k+2)\sum_{m=1}^{\infty}C(m)m^{-s},$$

$$G(s,g,\chi)=\zeta(2s-2k+2)\prod_{p|D}(1+p^{-s+k-1})\sum_{m=1}^{\infty}\chi(m)C(m)m^{-s}$$

と表される．

Doi-Naganuma lift の Asai zeta 関数の極の 様子を見るために，重さ k の 1 変数保型形式の symmetric square L 関数の $s=k$ での値を考えよう．N を自然数とし，ψ_N を N を法とする原始的 2 次指標とする．primitive form $f(z)=\sum_{m=1}^{\infty}a_m\mathbf{e}(mz)\in S_k(\Gamma_0(N),\psi_N)$ と Dirichlet 指標 χ に対して，χ で捻った symmetric square L 関数 $L^{sym}(s,f,\chi)$ を

$$L^{sym}(s,f,\chi)=\prod_p\{(1-\chi(p)\alpha_p^2p^{-s})(1-\chi(p)\beta_p^2p^{-s})(1-\chi(p)\alpha_p\beta_pp^{-s})\}^{-1}$$

で定義する．ここで各素数 p に対して α_p,β_p は $\alpha_p+\beta_p=a_p,\alpha_p\beta_p=p^{k-1}\chi(p)$ を満たす複素数とする．χ が主指標のときはこれを単に $L^{sym}(s,f)$ と書く．また，primitive form $g(z)\in\mathcal{S}_{k,k}(C_{\mathfrak{O}})$ に対しても同様に，g の symmetric square L 関数 $L^{sym}(s,g)$ を

$$L^{sym}(s,g)$$

$$=\prod_{\mathfrak{P}}\{(1-\alpha_{\mathfrak{P}}^2N(\mathfrak{P})^{-s})(1-\beta_{\mathfrak{P}}^2N(\mathfrak{P})^{-s})(1-\alpha_{\mathfrak{P}}\beta_{\mathfrak{P}}N(\mathfrak{P})^{-s})\}^{-1}$$

で定義する．ここで各素 ideal $\mathfrak{P}$ に対して $\alpha_{\mathfrak{P}}, \beta_{\mathfrak{P}}$ はこの節の最初に述べたものとする．このとき，次が成り立つ．証明については例えば [Zagier2] 参照のこと．

定理 5.1. (1) $f(z)$ を $S_k(SL_2(\mathbf{Z}))$ の primitive form とすると $L^{sym}(s,f)$ は全平面の正則関数に解析接続される．また，

$$\frac{L^{sym}(k,f)}{<f,f>\pi^{k+1}} = \frac{2^{2k-1}}{\Gamma(k)}$$

であり，特に $L^{sym}(k,f) \neq 0$ である．

(2) $f(z)$ を $S_k(\Gamma_0(D), \psi_D)$ に属する primitive form とする．$\tilde{L}^{sym}(s,f,\psi_D) = L^{sym}(s,f,\psi_D)/\prod_{p|D}(1-p^{-s+k-1})$ とおくと，$\tilde{L}^{sym}(s,f,\psi_D)$ は全平面上の正則関数に解析接続される．また，

$$\frac{\tilde{L}^{sym}(k,f,\psi_D)}{<f,f>\pi^{k+1}} = \frac{2^{2k-1}}{D\Gamma(k)}$$

であり，特に $\tilde{L}^{sym}(k,f,\psi_D) \neq 0$ である．

(3) $F = \mathbf{Q}(\sqrt{D})$ を D を判別式とする実 2 次体とし， $g(z)$ を $\mathcal{S}_{k,k}(C_{\mathfrak{O}})$ における primitive form とする．このとき，$L^{sym}(s,g)$ は全平面上の正則関数に解析接続される．また，

$$\frac{L^{sym}(k,g)}{<g,g>\pi^{2k+2}} = \frac{2^{4k-1}}{D^{k+1}}$$

であり，特に $L^{sym}(k,g) \neq 0$ である．

また，次のことも成り立つ．

定理 5.2. (1) $f(z)$ を $S_k(SL_2(\mathbf{Z}))$ に属する primitive form とすると, 任意の原始的偶 2 次指標 χ に対して $L^{sym}(s,f,\chi)$ は全平面上の正則関数に解析接続される．また，$L^{sym}(k,f,\chi) \neq 0$ である．

(2) $f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \mathbf{e}(mz)$ を $S_k(\Gamma_0(D), \psi_D)$ に属する primitive form とする． このとき，$\tilde{L}^{sym}(s,f) = L^{sym}(s,f)/\prod_{p|D}(1-\overline{a_p}^2 p^{-s})$ とおくと，$\tilde{L}^{sym}(s,f)$ は全平面上の正則関数に解析接続される．また，$\tilde{L}^{sym}(k,f) \neq 0$ である．

証明. 正則性については例えば [Zagier2] を参照のこと．(1) の後半を証明するために F を χ に対応する実 2 次体とし，$\hat{f}$ を f の $S_k(SL_2(\mathfrak{O}_F))$ への Doi-Naganuma lift とする．このとき $L^{sym}(k,f,\chi) \neq 0$ は次の等式と定理 5.1 (1), (3) より従う：

$$L^{sym}(k,\hat{f}) = L^{sym}(k,f)L^{sym}(k,f,\chi).$$

同様にして，F を ψ_D に対応する実２次体とし，$\hat{f}$ を $f \in S_k(\Gamma_0(D), \psi_D)$ の $\mathcal{S}_{k,k}(C_{\mathfrak{D}})$ への Doi-Naganuma lift とする．このとき $\tilde{L}^{sym}(k, f) \neq 0$ は次の等式と定理 5.1 (2), (3) より従う：

$$L^{sym}(k, \hat{f}) = \tilde{L}^{sym}(k, f)\tilde{L}^{sym}(k, f, \psi_D).$$

さて，１変数の Hecke 固有形式の symmetric square L 関数とその Doi-Naganuma lift の Asai zeta 関数のオイラー積を比較することにより次がわかる．

定理 5.3. (1) $f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \mathbf{e}(mz)$ を $S_k(SL_2(\mathbf{Z}))$ に属する Hecke 固有形式とし，$\hat{f} \in \mathcal{S}_{k,k}(C_{\mathfrak{D}})$ をその Doi-Naganuma lift とする．このとき，

$$G(s, \hat{f}) = L^{sym}(s, f)L(s-k+1, \psi_D),$$

$$G(s, \hat{f}, \psi_D) = L^{sym}(s, f, \psi_D)\zeta(s-k+1)$$

となる．

(2) $f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \mathbf{e}(mz)$ を $S_k(\Gamma_0(D), \psi_D)$ に属する Hecke 固有形式とし，$\hat{f} \in \mathcal{S}_{k,k}(C_{\mathfrak{D}})$ をその Doi-Naganuma lift とする．このとき，

$$G(s, \hat{f}) = \tilde{L}^{sym}(s, f)\zeta(s-k+1),$$

$$G(s, \hat{f}, \psi_D) = \tilde{L}^{sym}(s, f, \psi_D)L(s-k+1, \psi_D)$$

となる．

系. (1) $f(z)$ を $S_k(SL_2(\mathbf{Z}))$ に属する Hecke 固有形式とする．このとき，$G(s, \hat{f})$ は s の正則関数であり，$G(s, \hat{f}, \psi_D)$ は $s = k$ で１位の極を持つ．

(2) $f(z)$ を $S_k(\Gamma_0(D), \psi_D)$ に属する Hecke 固有形式とする．このとき，$G(s, \hat{f}, \psi_D)$ は s の正則関数であり，$G(s, \hat{f})$ は $s = k$ で１位の極を持つ．

さて，$S = S_k(SL_2(\mathbf{Z}))$ または $S_k(\Gamma_0(D), \psi_D)$ とし，$f \in S$ の $F = \mathbf{Q}(\sqrt{D})$ への Doi-Naganuma lift を $\hat{f}$ で表す.

$$\hat{S} := < \hat{f} \in \mathcal{S}_{k,k}(C_{\mathfrak{D}}) \mid f \in S, \text{ Hecke 固有形式} >_{\mathbf{C}}$$

とおく，上の系より，

$$\hat{S}_k(SL_2(\mathbf{Z})) \cap \hat{S}_k(\Gamma_0(D), \psi_D) = \{0\}$$

であり，$\mathcal{S}_{k,k}(C_{\mathfrak{D}})$ は

$$\mathcal{S}_{k,k}(C_{\mathfrak{D}}) = \hat{S}_k(SL_2(\mathbf{Z})) \perp \hat{S}_k(\Gamma_0(D), \psi_D) \perp \mathcal{N}$$

と Petersson 内積に関して直交分解される．ここで，$\mathcal{N}$ は $\hat{S}_k(SL_2(\mathbf{Z})) \perp \hat{S}_k(\Gamma_0(D), \psi_D)$ の $\mathcal{S}_{k,k}(C_{\mathfrak{D}})$ における直交補空間である．

6 Doi-Naganuma lift とnon-Doi-Naganuma lift の合同

よく知られているように重さ 12 の $SL_2(\mathbf{Z})$ に関する Eisenstein 級数 $E_{12}(z)$ と Ramanujan delta 関数 $\Delta(z)$ の Fourier 係数との間に 691 を法とする合同関係がある． ここで，$E_{12}(z)$ と $\Delta(z)$ はともに Hecke 固有形式で上の合同は Hecke 固有値の合同とも見なせることに注意する．また，691 は $\zeta(-11)$ の分子であることに注意する．このような 2 つの 1 変数 Hecke 固有形式の Hecke 固有値の合同とこれらに付随する L-関数の特殊値の関係については今まで多くの重要な研究がなされている．ここでは，このようなことを Hilbert modular form のときに考えてみる．すなわち，次の問題を考えてみる．

問題 6.1. f を $S_k(SL_2(\mathbf{Z}))$ または $S_k(\Gamma_0(D), \psi_D)$ における Hecke 固有形式とする．このとき，f の Doi-Naganuma lift と $\mathcal{N}$ におけるある Hecke 固有形式の Hecke 固有値の間に素 ideal を法とする合同関係があるか? もし，あるとすればその素 ideal を特徴付けよ．

この問題を考えるためにまず次のことに注意する．証明は例えば [Zagier2] を参照のこと．

命題 6.1 f を $S_k(SL_2(\mathbf{Z}))$ または $S_k(\Gamma_0(D), \psi_D)$ における Hecke 固有形式，$\mathbf{Q}(f)$ を f の Hecke 体とする．

(1) $f \in S_k(SL_2(\mathbf{Z}))$ のとき任意の 2 次偶指標 ψ_D に対して

$$\frac{L^{sym}(k, f, \psi_D)}{\pi^{k+1} < f, f >} \in \mathbf{Q}(f).$$

(2) $f \in S_k(\Gamma_0(D), \psi_D)$ のとき

$$\frac{\tilde{L}^{sym}(k, f)}{\pi^{k+1} < f, f >} \in \mathbf{Q}(f).$$

さて，$D, \psi_D, \mathcal{N}$ は前節の最後に述べたものとする．このとき，命題 6.1 の特殊値の分子に関して Doi-Hida-Ishii は次の予想を提出した．[6]

予想. (cf. [Doi-Hida-Ishii]) $\mathcal{N}$ があるひとつの固有形式の Galois 共役で生成されていると仮定する．

[6] ここでは，かなり大雑把な形で述べている．精密な定式化については原論文を参照されたい．

(1) $f \in S_k(SL_2(\mathbf{Z}))$ とし，$\mathbf{Q}(f)$ の素 ideal $\mathfrak{P}$ が $6D$ を割らないとする．このとき

$\mathfrak{P}$ が $\dfrac{L^{sym}(k,f,\psi_D)}{\pi^{k+1} < f,f >}$ の分子を割る

$\Longleftrightarrow$

ある Hecke 固有形式 $g \in \mathcal{N}$ が存在して，すべての $\mathbf{Q}(\sqrt{D})$ の ideal $\mathfrak{A}$ に対して

$$\lambda_{\hat{f},\mathfrak{A}} \equiv \lambda_{g,\mathfrak{A}} \bmod \tilde{\mathfrak{P}}.$$

ここで $\tilde{\mathfrak{P}}$ は $\mathfrak{P}$ を割る $\mathbf{Q}(f)\mathbf{Q}(g)$ の素 ideal である．

(2) $f \in S_k(\Gamma_0(D),\psi_D)$ とし，$\mathbf{Q}(f)$ の素 ideal $\mathfrak{P}$ が $6D$ を割らないとする．このとき

$\mathfrak{P}$ が $\dfrac{\tilde{L}^{sym}(k,f)}{\pi^{k+1} < f,f >}$ の分子を割る

$\Longleftrightarrow$

ある Hecke 固有形式 $g \in \mathcal{N}$ が存在して，すべての $\mathbf{Q}(\sqrt{D})$ の ideal $\mathfrak{A}$ に対して

$$\lambda_{\hat{f},\mathfrak{A}} \equiv \lambda_{g,\mathfrak{A}} \bmod \tilde{\mathfrak{P}}.$$

ここで $\tilde{\mathfrak{P}}$ は $\mathfrak{P}$ を割る $\mathbf{Q}(f)\mathbf{Q}(g)$ の素 ideal である．

注意 [Doi-Hida-Ishii] には上の予想の多数の数値例がある．Urban は [Urban] において，ある条件の下で $\Longrightarrow$ が成り立つことを示した．また，[Katsurada] においてはこれとは異なる条件のもとで $\Longrightarrow$ が成り立つことを示し, 数値例を多量に作る具体的方法についても述べている．

参考文献

[Asai1] T. Asai, On certain Dirichlet series associated with Hilbert modular forms and Rankin's method, Math. Ann. 226(1977), 81-94.

[Asai2] T. Asai, On the Fourier coefficients of automorphic forms at various cusps and some applications to Rankin's convolution, J. Math. Soc. Japan, 28(1976), 48-61.

[Doi-Hida-Ishii] K. Doi, H. Hida, and H. Ishii, Discriminant of Hecke fields and twisted adjoint L-values for GL(2), Invent. Math. 134(1998), 547-577.

[Doi-Nganuma1] K. Doi and H. Naganuma, On the algebraic curves uniformized by arithmetical automorphic functions, Ann. of Math. 86(1967), 449-460.

[Doi-Naganuma2] K. Doi and H. Naganuma, On the functional equation of certain Dirichlet series, Invent. Math. 9(1969), 1-14.

[Garrett] P.B.Garrett, Holomorphic Hilbert Modular Forms, Brooks/Cole, 1990.

[Ghate] E. Ghate, Congruences between base-change and non-base-change Hilbert modular forms, Cohomology of arithmetic groups, Automorphic forms and L-functions, Narosa, 2001.

[Jacquet] H. Jacquet, Automorphic Forms on GL(2), II, Springer Lect. Notes. in Math. 278, Springer 1972.

[Jacquet-Langlands] H. Jacquet and R. P. Langlands, Automorphic Forms on GL(2), Springer Lect. Notes. in Math. 114, Springer 1970.

[Katsurada] H. Katsurada, Special values of the standard zeta functions for Hilbert modular forms, Preprint(2005)

[今野] 今野拓也，$GL(2)$ 上の保型形式のベースチェンジリフト, 本報告集.

[Langlands] R. Langlands, Base change for GL(2), Princeton Univ. Press, Princeton, N. J. 1980.

[Maaß] H. Maass, Über eine neue Art von nichtanalytischen automorphen Funktionen und Bestimmung Diricletscher Reihen durch Funktionalgleichunge. Math. Ann. 121(1949), 141-183.

[Naganuma] H. Naganuma, On the coincidence of two Dirichlet series associated with cusp forms of Hecke's "Neben"-type and Hilbert modular forms over a real quadratic field, J. Math. Soc. Japan, 28(1973), 549-555.

[Oda] T. Oda, On modular forms associated with indefinite quadratic forms of signature $(2, n-2)$, Math. Ann. 231(1977), 97-144.

[Saito] H. Saito, Automorphic forms and algebraic extensions of number fields, Lect. in Math. Kyoto Univ. 1975.

[Shimizu] H. Shimizu, On zeta functions of quaternion algebras, Ann. of Math. 81(1965), 166-193.

[Shimura] G. Shimura, Construction of class fields and zeta functions of algebraic curves, Ann. of Math. 85(1967), 158-159.

[高瀬] 高瀬幸一, Hilbert 保型形式入門, 本報告集

[Urban] E. Urban, Selmer groups and the Eisenstein-Klingen ideal, Duke Math. J. 106 (2001), 485–525.

[Weil] A. Weil, Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktinalgleichungen, Math, Ann. 168(1967), 149-156.

[Zagier1] D. Zagier, Modular forms associated to real quadratic fields, Invent. Math. 30(1975), 1-46.

[Zagier2] D. Zagier, Modular forms whose Fourier coefficients involve zeta functions of quadratic fields, Lect. Notes. in Math. 627(1977), 105-169.