Borcherds の無限積　-$O(2,2)$ の場合-

河合 悠介 (京大理)

1　序

本稿では R.E.Borcherds [Bo1], [Bo2] によって与えられ, その後 J.H.Bruinier [Br1], [Br2] によって精密化された IV 型対称領域の上の多変数の保型形式の構成を Hilbert modular forms の場合に解説する. Borcherds の構成とは, 複素上半平面 $\mathfrak{H}$ 上の正則保型形式で cusp に高々極を持つものを与えたときに, これを theta 積分し "exponentiate" することで Heegner divisor を零点または極とするような有理型保型形式を構成する一種の lifting である. Heegner divisor とは, Hirzebruch-Zagier divisor の一つの高次元化である. Bruinier はこの構成を non-holomorphic な Poincare 級数にまで拡張し, その theta 積分である保型 Green 関数を考えることでより精密な結果を得た. しかし Hilbert modular forms の場合には non-holomorphic Poincare 級数を定義するのに Hecke trick を用いる必要があり, むしろ保型 Green 関数の構成を直接に与える方が簡明で, ここでもそのような方法をとる.

また, 保型 Green 関数を Fourier 展開してその non-holomorphic part を考えると, Hirzebruch-Zagier divisor の Chern class の具体的な記述を得られることがわかる. これは以前から知られていた結果の別のアプローチである. またこのことと Borcherds lifting の代数的な読み替えとから, elliptic cusp forms の空間から Hilbert modular surface の second cohomology への準同型が得られる. いまの場合, これは Doi-Naganuma map に他ならない. そして Doi-Naganuma map の性質から, Hirzebruch-Zagier divisor の線形結合を divisor にもつような保型形式は Borcherds lifting によって得られるという, 逆定理が証明される.

なお, Borcherds の論文 [Bo1] については [Aoki], [Ikeda] 等の日本語での解説もある. そこでのアプローチは Borcherds product を直接に定義するもので, lattice が unimodular の場合に限定されるため Hilbert modular form を考えることはできないが, 興味深いアイデアや例も多く含まれるので合わせて読まれるとよい.

以下の解説は主に [Br1] によっており, 証明のない部分やより詳しい内容は原論文を読まれたい.

2　Nearly holomorphic modular forms

まず, Borcherds の構成で input space となる保型形式を定義する.

以下 $p \equiv 1 \bmod 4$ を素数, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{p})$ とし, $\mathcal{O} \subset K$ を整数環, $\mathfrak{d} = (\sqrt{p})$ を different とする. K の非自明な自己同型を $x \mapsto x'$ で表し, $\mathrm{Tr}(x) = x + x'$, $\mathrm{N}(x) = xx'$ とおく. $\chi_p(\cdot) = \left(\frac{p}{\cdot}\right)$ とする.

いま, even integral lattice (L, q) を

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} a & \lambda \\ \lambda' & b \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z},\, \lambda \in \mathcal{O} \right\}, \quad q(A) = \det(A) \ (A \in L)$$

によって定める. L は符合 $(2,2)$ をもち, その dual lattice は

$$L' = \left\{ \begin{pmatrix} a & \lambda \\ \lambda' & b \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z},\, \lambda \in \mathfrak{d}^{-1} \right\},$$

discriminant group は $L'/L \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ となる. このとき $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ は L に $A \mapsto \alpha A\,{}^t\alpha'$ $(A \in L,\, \alpha \in \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}))$ で直交変換として作用し, これから L'/L 上に誘導される作用は自明である.

定義 2.1. $k \in 2\mathbb{Z}$ に対し, 正則関数 $f : \mathfrak{H} \to \mathbb{C}$ が保型性

$$f(\alpha\tau) = \chi_p(d)\,(c\tau+d)^k f(\tau), \quad \forall\alpha = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(p)$$

をもつとする. 更にこれが全ての *cusp* で高々極を持つとき, *weakly holomorphic modular form* であるという. また $f(\tau) = \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ n \gg -\infty}} c(n)\,q^n$ と *Fourier* 展開されるとき $\sum_{n<0} c(n)\,q^n$ を f の *principal part (*または *singular part)* という.

Weakly holomorphic, holomorphic, cusp forms のなすベクトル空間をそれぞれ $W_k(p,\chi_p)$, $M_k(p,\chi_p)$, $S_k(p,\chi_p)$ で表す. $W_k(p,\chi_p)$ は無限次元である. また $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ に対し, sign condition "$\chi_p(n) = -\varepsilon \Rightarrow c(n) = 0$" をみたす部分空間をそれぞれ $W_k^\varepsilon(p,\chi_p)$, $M_k^\varepsilon(p,\chi_p)$, $S_k^\varepsilon(p,\chi_p)$ とする.

このとき New form theory により $W_k(p,\chi_p)$, $M_k(p,\chi_p)$, $S_k(p,\chi_p)$ は plus subspace と minus subspace の直和に分かれることが示される ([Za1] §5 または [Miyake] §4.6). 特に, 分解 $S_k(p,\chi_p) = S_k^+(p,\chi_p) \oplus S_k^-(p,\chi_p)$ において $\dim S_k^+(p,\chi_p) = \dim S_k^-(p,\chi_p)$ である.

注意 1. これら plus subspace はメタプレクティック群 $\mathrm{Mp}_2(\mathbb{Z})$ の群環 $\mathbb{C}[L'/L]$ 上の Weil 表現に関するベクトル値の保型形式の空間と思うことができる. そのような定式化は [Bo2] において用いられ, full modular な elliptic modular forms, Kohnen plus space, holomorphic Jacobi forms, skew holomorphic Jacobi forms などを統一的に記述できるメリットもあり, より自然ではあるがここでは述べない. いまの場合の対応について詳しくは [BB].

さて, $k \geq 2$ に対して $M_k^\varepsilon(p,\chi_p)$ の Eisenstein 級数を考える. $M_k(p,\chi_p)$ には $\Gamma_0(p)$ の cusp ∞ と 0 に対応して Eisenstein 級数

$$E_k^\infty(\tau) = 1 + \frac{2}{L(1-k,\chi_p)} \sum_{n\geq 1} \sum_{d|n} d^{k-1}\chi_p(d)\,q^n$$
$$E_k^0(\tau) = \sum_{n\geq 1} \sum_{d|n} d^{k-1}\chi_p(n/d)\,q^n$$

が定義される. このときこれらの一次結合

$$E_k^\varepsilon(\tau) = 1 + \sum_{n\geq 1} B(n)\,q^n = 1 + \frac{2}{L(1-k,\chi_p)} \sum_{n\geq 1}\sum_{d|n} d^{k-1}(\chi_p(d) + \varepsilon\chi_p(n/d))q^n$$

は $M_k^\varepsilon(p,\chi_p)$ に含まれることが容易にわかる. これによって直和分解 $M_k^\varepsilon(p,\chi_p) = \mathbb{C}E_k^\varepsilon \oplus S_k^\varepsilon(p,\chi_p)$ を得る.

3 Hirzebruch-Zagier divisor と 保型 Green 関数

以下, $X_K = \mathrm{SL}_2(\mathcal{O})\backslash\mathfrak{H}^2$ とおく.

定義 3.1. $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し, $\mathfrak{H}^2$ 上の *$SL_2(\mathcal{O})$-invariant divisor*

$$T(m) = \bigcup_{\substack{\left(\begin{smallmatrix} a & \lambda \\ \lambda' & b \end{smallmatrix}\right) \in L' \\ ab - N(\lambda) = \frac{m}{p}}} \left\{ (z_1,\, z_2) \in \mathfrak{H}^2 \mid a z_1 z_2 + \lambda z_1 + \lambda' z_2 + b = 0 \right\}$$

の定める X_K 上の *algebraic divisor* を *Hirzebruch-Zagier divisor* とよび, 同じ $T(m)$ で表す. ただし, $T(m)$ の既約成分の重複度は全て 1 とする.

すぐわかるように, $T(m) = \phi \Leftrightarrow \chi_p(m) = -1$ である. また m が square-free のときは p が素数により $T(m)$ は既約であり, $T(m)$ は m が $\mathcal{O}$ の ideal のノルムならば modular curve $X_0(m)$ と,

m が $\mathcal{O}$ の ideal のノルムでなく $\chi_p(m)=1$ ならば indefinite quaternion algebra $Q_m = \left(\frac{p,-m/p}{\mathbb{Q}}\right)$ のある order に付随した Shimura curve と birational である．

さて，$T(m)$ 上で logarithmic singularity をもつ $\mathfrak{H}^2$ 上の $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$-invariant な関数を構成することを考える．ここで関数 f が $T(m)$ 上に logarithmic singularity をもつとは，$\mathfrak{H}^2$ の各点で f から $T(m)$ の定義方程式の log を除くと局所的に実解析関数の制限となっていることをいう．

それにはまず $\sum_{\substack{A\in L'\\ q(A)=m/p}} g(z_1, Az_2)$ の形の級数で，$g(z_1,z_2)=\log(|z_1\overline{z}_2+1|/|z_1z_2+1|)$ と選ぶことが考えられるが，これは級数の収束性に問題がある．そこで次のように正則化を考える．

$g(z_1,z_2)$ を $1+\frac{|z_1z_2+1|^2}{2y_1y_2}$ の関数と仮定する (これは z_1 と $-1/z_2$ の hyperbolic distance の cosh である)．$\mathfrak{H}$ 上の Laplacian を $\Delta = y^2(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2})$ とおく．これを $\mathfrak{H}^2$ のどちらかの成分に作用させる．上でとった g は $\Delta g=0$ の解なので，ε を任意に小さくとって $\Delta g=\varepsilon g$ の解を考えることにする．この微分方程式を書き換えると，Legendre の微分方程式

$$\left\{(1-t^2)\frac{d^2}{dt^2}-2t\frac{d}{dt}+\varepsilon\right\}g(t)=0$$

となる．$\varepsilon = s(s-1)$, $\mathrm{Re}\,(s)>1$ と置くとき，この方程式の $t\to\infty$ で減少する解は第二種 Legendre 関数 $Q_{s-1}(t)$ によって（定数倍を除いて）与えられる．$t>1$, $\mathrm{Re}\,(s)>0$ では積分表示

$$Q_{s-1}(t)=\int_0^\infty (t+\sqrt{t^2-1}\,\cosh u)^{-s}du$$

が成立し，$Q_0(t)=\frac{1}{2}\log\left(\frac{t+1}{t-1}\right)$ である．そこで次のように定義する．

定義 3.2. $(z_1,z_2)\in\mathfrak{H}^2\setminus T(m)$, *Re* $(s)>1$ に対して

$$\varPhi_m(z_1,z_2;s)=\sum_{\substack{\left(\begin{smallmatrix} a & \lambda\\ \lambda' & b\end{smallmatrix}\right)\in L'\\ ab-N(\lambda)=\frac{m}{p}}} Q_{s-1}\left(1+\frac{|\,az_1z_2+\lambda z_1+\lambda' z_2+b\,|^2}{2my_1y_2/p}\right)$$

と定める．ただし，$T(m)=\phi$ のときは $\varPhi_m=0$ と定める．

するとこの級数は定義の領域において広義一様に絶対収束することが示される．これより直ちに $\Delta\varPhi_m(z_1,z_2;s)=s(s-1)\varPhi_m(z_1,z_2;s)$ を得る．

注意 2. $K=\mathbb{Q}$ のときを考えてみると，$\varPhi_m$ は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に関する resolvent kernel function そのものである．これについては [Hej] に詳しい．

Fourier 展開を見ることによって，$\varPhi_m(z_1,z_2;s)$ は s について $\mathrm{Re}\,(s)>\frac{3}{4}$ の領域へ有理型に解析接続され，$s=1$ での simple pole の他は正則であることが証明される．そこで，$T(m)$ に付随した保型 Green 関数を次で定める．

定義 3.3. $\varPhi_m(z_1,z_2)=$ "$\varPhi_m(z_1,z_2;s)$ の $s=1$ での *Laurent* 展開の定数項"

なお，$\varPhi_m(z_1,z_2;s)$ の $s=1$ での留数は (z_1,z_2) によらない定数 $-\frac{1}{2}B_0(m)$ であることを注意しておく．従って $\Delta\varPhi_m(z_1,z_2)=-\frac{B_0(m)}{2}$ である．

これが所望の性質を備えていることを見ていく．$\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$-invariant なのは明らか．singularity は次のように与えられる．

$U\subset\mathfrak{H}^2$ を relatively compact open subset とするとき

$$\mathcal{M}_{U,m}=\left\{\begin{pmatrix} a & \lambda\\ \lambda' & b\end{pmatrix}\in L' \;\middle|\; ab-\mathrm{N}(\lambda)=\frac{m}{p},\ \exists(z_1,z_2)\in U\ s.t.\ az_1z_2+\lambda z_1+\lambda' z_2+b=0\right\}$$

は有限集合である．これに positivity condition を加えて

$$\mathcal{M}^+_{U,m}=\left\{\begin{pmatrix} a & \lambda\\ \lambda' & b\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{U,m}\;\middle|\; a>0\,\text{または}\,(a=0\,\text{かつ}\,\lambda>0)\right\}$$

とおく．次が示される．

定理 3.1. $U \setminus T(m)$ 上の関数

$$\Phi_m(z_1, z_2) + 2 \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & \lambda \\ \lambda' & b \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}^+_{U,m}} \log |\, a z_1 z_2 + \lambda z_1 + \lambda' z_2 + b \,|$$

は U 上の実解析関数に延長される.

さて, Φ_m が logarithmic な singularity をもつことから, これを "exponentiate" することで $T(m)$ 上に零点または極をもつ保型形式を得ることを考えたい. しかし実解析関数である Φ_m を単に指数の肩にのせても正則な関数となるわけではない. そこで Φ_m を Fourier 展開して正則な部分だけを取り出すことを考える.

まず

$$S(m) = \left\{ (z_1, z_2) \in \mathfrak{H}^2 \;\middle|\; \exists \lambda \in \mathfrak{d}^{-1},\ \mathrm{N}(\lambda) = -\frac{m}{p},\ \lambda y_1 + \lambda' y_2 = 0 \right\}$$

とおく. $S(m)$ は実余次元 1 なので $\mathfrak{H}^2 \setminus S(m)$ は非連結である. これの各連結成分を Weyl chamber とよぶ. W を Weyl chamber とするとき, $\lambda \in L'$, $(\lambda, W) > 0$ をある (従って任意の) $(z_1, z_2) \in W$ に対し $\lambda y_1 + \lambda' y_2 > 0$ が成り立つこととする.

定理 3.2. $(z_1, z_2) \in W,\ y_1 y_2 > \frac{m}{p}$ のとき, Φ_m は絶対かつ広義一様収束する *Fourier* 級数

$$\begin{aligned} \Phi_m(z_1, z_2) = L + 4\pi(\rho_W y_1 + \rho'_W y_2) + 2 \sum_{\substack{\lambda \in \mathfrak{d}^{-1} \\ (\lambda, W) > 0}} q_{p\lambda\lambda'}(m) \log \left| 1 - \mathbf{e}(\lambda z_1 + \lambda' z_2) \right| \\ + \frac{B(m)}{2} \log(y_1 y_2) + 2 \sum_{\substack{\lambda \in \mathfrak{d}^{-1} \\ \lambda > 0,\ \lambda' < 0}} p_{|p\lambda\lambda'|}(m) \log \left| 1 - \mathbf{e}(\lambda z_1 + \lambda' \overline{z}_2) \right| \end{aligned}$$

に展開される. ここに L は定数, $B(m)$ は E_2^+ の *Fourier* 係数で, $q_n(m)$ と $p_n(m)$ はそれぞれ $W_2(p, \chi_p)$ に含まれるある *Poincare* 級数 の m 番目の *Fourier* 係数である. ρ_W は適当な K の元であり, *Weyl vector* と呼ばれる.

注意 3. $q_n(m)$, $p_n(m)$ は I, J-Bessel 関数を含む無限級数で与えられる実数である [Br1]. また

$$L = -B(m) \left(-\frac{L'(-1,\, \chi_p)}{L(-1,\, \chi_p)} + \frac{\sigma'_m(-1)}{\sigma_m(-1)} - \frac{1}{2} \log(p) - \log(4\pi) \right),$$

$\sigma_m(s) = m^{(1-s)/2} \sum_{d|m} d^s (\chi_p(d) + \chi_p(m/d))$ であることが示される [BBK]. 更に, Weyl vector ρ_W も有限の形で計算できる量である [BB] [BBK].

4 Some infinite products

ここでは Φ_m の Fourier 展開から holomorphic part を取り出し, holomorphic infinite product を定義してその性質をみる.

定義 4.1.

$$\xi_m(z_1, z_2) = \frac{B(m)}{2} \log(y_1 y_2) + 2 \sum_{\substack{\lambda \in \mathfrak{d}^{-1} \\ \lambda > 0,\ \lambda' < 0}} p_{|p\lambda\lambda'|}(m) \log \left| 1 - \mathbf{e}(\lambda z_1 + \lambda' \overline{z}_2) \right|$$

とおき, $\psi_m(z_1, z_2) = \Phi_m(z_1, z_2) - \xi_m(z_1, z_2) - L$ とおく。

このとき ξ_m は $\mathfrak{H}^2$ 上で絶対収束し, ψ_m は $\mathfrak{H}^2 \setminus T(m)$ 上の実解析関数を定める. これらはともに実数値関数である. holomorphic part ψ_m から無限積を次のようにおく.

定義 4.2. $(z_1, z_2) \in W,\ y_1 y_2 > \frac{m}{p}$ のとき,

$$\Psi_m(z_1, z_2) = \mathbf{e}(\rho_W z_1 + \rho'_W z_2) \prod_{\substack{\lambda \gg \mathfrak{d}^{-1} \\ (\lambda, W) > 0}} \left(1 - \mathbf{e}(\lambda z_1 + \lambda' z_2)\right)^{-q_{p\lambda\lambda'}(m)}$$

と定義する.

Ψ_m は 定義 4.2 の領域で正則関数を定め, そこでは ψ_m と

$$\log |\Psi_m(z_1, z_2)| = -\frac{1}{2}\, \psi_m(z_1, z_2)$$

の関係をみたす. これについて, 次が示される.

定理 4.1. Ψ_m は $\mathfrak{H}^2$ 全体に正則に解析接続され, 任意の *relatively compact open subset* $U \subset \mathfrak{H}^2$ に対して

$$\Psi_m(z_1, z_2) \prod_{\left(\begin{smallmatrix} a & \lambda \\ \lambda' & b \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}^+_{U,m}} (a z_1 z_2 + \lambda z_1 + \lambda' z_2 + b\,)^{-1}$$

は U 上正則で零点を持たない.

証明. まず Φ_m 自身は多重調和関数ではないが, 定理 3.2 の Fourier 展開の式から ψ_m は多重調和関数であることに注意する. ここで $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ が多重調和関数とは, C^2 級でありかつ $\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \overline{z}_j} f = 0$ が任意の $1 \leq i, j \leq n$ で成り立つときにいう.

さて, 領域 $\{(z_1, z_2) \in W \mid y_1 y_2 > \frac{m}{p}\}$ と交わるような simply connected relatively compact domain U をとる. いま,

$$\psi_m(z_1, z_2) + 2 \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & \lambda \\ \lambda' & b \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}^+_{U,m}} \log |a z_1 z_2 + \lambda z_1 + \lambda' z_2 + b\,|$$

は U 上の多重調和な実解析関数である. [GR] Chapter IX から simply connected domain 上の二階微分可能な多重調和関数は正則関数の実部で表されることがわかる. 従って, 正則関数 $f : U \to \mathbb{C}$ が存在して

$$\psi_m(z_1, z_2) + 2 \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & \lambda \\ \lambda' & b \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}^+_{U,m}} \log |a z_1 z_2 + \lambda z_1 + \lambda' z_2 + b\,| = \mathrm{Re}\,(f(z_1, z_2))$$

をみたす. Log が主値をとっているものとすると, Ψ_m との関係式から

$$\mathrm{Re}\left(\mathrm{Log}\,(\Psi_m(z_1, z_2)) - \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & \lambda \\ \lambda' & b \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}^+_{U,m}} \mathrm{Log}\,(a z_1 z_2 + \lambda z_1 + \lambda' z_2 + b\,)\right) = -\frac{1}{2} \mathrm{Re}\,(f(z_1, z_2))$$

が成立する. 必要ならば f に定数を加えることで

$$\Psi_m(z_1, z_2) \prod_{\left(\begin{smallmatrix} a & \lambda \\ \lambda' & b \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}^+_{U,m}} (a z_1 z_2 + \lambda z_1 + \lambda' z_2 + b\,)^{-1} = e^{-\frac{1}{2} f(z_1, z_2)}$$

が得られ, 右辺は U 上の正則関数である. 従って定理が示された. $\square$

5 Borcherds products

Section 4 で構成した holomorphic infinite product は保型性を持っていないので, 保型形式を得るにはそれらの適当な積を考える必要がある. 積が保型性をもつには Φ_m の Fourier 展開に現われる non-holomorphic part の寄与がキャンセルされればよい. ここでは weakly holomorphic modular forms の与える線形結合がその目的を果たすことをみて, Borcherds product を構成する.

まず, power series $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c(n)\,q^n$ に対して

$$\widetilde{c}(n) = \begin{cases} c(n) & \text{if } p \nmid n \\ 2\,c(n) & \text{if } p \mid n \end{cases}$$

とおく. これは注意 1 で触れた weakly holomorphic modular form に対応するベクトル値保型形式の Fourier 係数である.

$f(\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c(n)\,q^n \in W_k^+(p,\chi_p)$, $g(\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b(n)\,q^n \in M_{2-k}^+(p,\chi_p)$ をとる. このときベクトル値保型形式に定義される自然な pairing を通じて $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に関する weight 2 の weakly holomorphic modular form $< f, g >$ を対応させることができる. この留数を考えることにより $\sum_{n\le 0} \widetilde{c}(n)\,b(-n) = 0$ が従う. [Bo3] において Borcherds は Serre duality argument により次を示した.

定理 5.1. 与えられた *principal part* $\sum_{\substack{n<0\\ \chi_p(n)\neq -1}} c(n)\,q^n$ をもつ *weakly holomorphic modular form* $f(\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c(n)\,q^n \in W_k^+(p,\chi_p)$ が存在するための必要十分条件は, 任意の $g(\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b(n)\,q^n \in S_{2-k}^+(p,\chi_p)$ に対して $\sum_{n<0} \widetilde{c}(n)\,b(-n) = 0$ が成立することである.

また定理のような $f \in W_k^+(p,\chi_p)$ が存在するとき, その定数項は E_k^+ の Fourier 係数 $B(n)$ を用いて $c(0) = -\frac{1}{2}\sum_{n<0} \widetilde{c}(n)B(-n)$ と表せることに注意する.

さて, Borcherds が示した定理は次である [Bo2] [Br2].

定理 5.2. $f(\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c(n)\,q^n \in W_0^+(p,\chi_p)$ に対し, $n<0$ ならば $\widetilde{c}(n) \in \mathbb{Z}$ とする. このとき $\mathfrak{H}^2$ 上の有理型関数

$$\Psi_f(z_1,z_2) = \prod_{m>0} \Psi_m(z_1,z_2)^{\widetilde{c}(-m)}$$

は次をみたす.

(i) Ψ_f は $SL_2(\mathcal{O})$ について *weight* $c(0)$ の適当な有限位数の乗法因子に関する保型形式である.

(ii) Ψ_f の *divisor* は $\sum_{m>0} \widetilde{c}(-m)\,T(m)$ で与えられる.

(iii) $N = \max\{n>0 \,|\, c(-n)\neq 0\}$ とおき, W を $\mathfrak{H}^2 \setminus \bigcup_{\substack{n>0\\ c(-n)\neq 0}} S(n)$ の連結成分の一つとする. そのときある $\rho_f \in K$ が存在し, $(z_1,z_2)\in W$, $y_1 y_2 > \frac{N}{p}$ かつ Ψ_f の極の外では

$$\Psi_f(z_1,z_2) = C\,\mathbf{e}(\rho_f z_1 + \rho_f' z_2) \prod_{\substack{\lambda\in\mathfrak{d}^{-1}\\ (\lambda,W)>0}} \bigl(1-\mathbf{e}(\lambda z_1 + \lambda' z_2)\bigr)^{\widetilde{c}(p\lambda\lambda')}$$

なる絶対かつ広義一様収束する無限積 *(Borcherds product)* に展開される. ここに C は適当な絶対値 1 の複素数である.

注意 4. (1) 上の定理において Ψ_f の weight $c(0)$ は, 定理 5.1 の後の注意と $B(n)\in\mathbb{Q}$ から有理数であることがわかる.

(2) 定理 5.2 により, 定理 5.1 で考えられている空間 $S_2^+(p,\chi_p)$ は Borcherds products によって Hirzebruch-Zagier divisor の線形結合を divisor をもつ保型形式を与える際の obstruction space となっていることがわかる.

証明. (i) $\Phi_f(z_1,z_2) = \sum_{m>0}\widetilde{c}(-m)\,\Phi_m(z_1,z_2)$ とおく. 定義 4.1 と定理 5.1 及びその下の注意から

$$\sum_{m>0}\widetilde{c}(-m)\,\xi(z_1,z_2) = -c(0)\log(y_1y_2)$$

となる. 従って

$$\begin{aligned}\Phi_f(z_1,z_2) &= -2\log|\Psi_f(z_1,z_2)| - c(0)\log(y_1y_2)\\ &= -2\log\left|\Psi_f(z_1,z_2)\,(y_1y_2)^{c(0)/2}\right|\end{aligned}$$

の関係を得る. ここで Φ_f は $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$-invariant であるから, 次の補題により保型性がわかる.

補題 5.1. Ψ を $\mathfrak{H}^2$ 上の有理関数で $|\Psi(z_1,z_2)|\,(y_1y_2)^{k/2}$, $k\in\mathbb{R}$ が $SL_2(\mathcal{O})$-*invariant* とする. このとき Ψ は $SL_2(\mathcal{O})$ について *weight* k の適当な乗法因子に関する保型形式である.

証明. 任意の $A = \left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ に対して

$$|\Psi(Az_1,A'z_2)|\,(\mathrm{Im}\,(Az_1)\mathrm{Im}\,(A'z_2))^{k/2} = |\Psi(z_1,z_2)|\,(y_1y_2)^{k/2}$$

なので

$$\left|\frac{\Psi(Az_1,A'z_2)}{\Psi(z_1,z_2)}(cz_1+d)^{-k}(c'z_2+d')^{-k}\right| = 1$$

が成り立つ. ここから容易に (例えば最大値原理により) 絶対値の中身は絶対値 1 の複素定数がわかる. □

(ii) 定理 4.1 により明らか.

(iii) この無限積展開は Borcherds の特異 theta 積分からは直接得られるが, このアプローチでは weakly holomorphic modular forms についての若干の結果を必要とする. その多くは煩雑なので証明は簡単な方針のみにとどめる. 詳しい内容は [Br2] Chapter 1 を参照のこと.

定理の展開を導くには weight 0 と weight 2 の保型形式の Fourier 係数の対応を考える必要がある. まず Hecke trick により weight 0 の non-holomorphic Poincare 級数を考えてその Fourier 係数を具体的に計算し, weight 2 の Poincare 級数の Fourier 係数 $q_n(m)$ と比べて両者の関係を導く. そして weight 0 の weakly holomorphic modular form を non-holomorphic Poincare 級数と Eisenstein 級数の線形和により表すことで $\widetilde{c}(p\lambda\lambda')$ と $q_{p\lambda\lambda'}(m)$ の間に関係がつく. それによって無限積を書き直せばよい. □

6 Example

ここでは Borcherds の construction で得られる保型形式を具体的にみる.

$p=5$ とする. input data として weight 0 の weakly holomorphic modular form を与えればよい.

$$G_2(\tau) = 1 + 6\sum_{n\geq 1}(\sigma_1(n) - 5\sigma_1(n/5))\,q^n \in M_2(\Gamma_0(5))$$

を weight 2 の $\Gamma_0(5)$ に関する Eisenstein 級数とする. 一方で $E_2^0(\tau) = \frac{\eta(5\tau)^5}{\eta(\tau)}\in M_2(5,\chi_5)$ が知られている. そこで

$$f_1(\tau) = \frac{G_2(\tau)}{E_2^0(\tau)} = \sum_{n\geq 1}c(n)\,q^n = \frac{1}{q} + 5 + 11q - 54q^4 + 55q^5 + 44q^6 + \cdots$$

とおけば $f_1(\tau)\in W_0^+(5,\chi_5)$ である. これに定理 5.2 を適用して Weyl chamber, Weyl vector を具体的に記述すれば, $\varepsilon_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ を $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ の fundamental unit として無限積

$$\Psi_1(z_1,z_2) = \mathbf{e}\left(\frac{\varepsilon_0}{\sqrt{5}}z_1 - \frac{\varepsilon_0'}{\sqrt{5}}z_2\right)\prod_{\substack{\lambda\in\mathfrak{d}^{-1}\\ \varepsilon_0\lambda'-\varepsilon_0'\lambda>0}}\left(1-\mathbf{e}(\lambda z_1+\lambda' z_2)\right)^{\widetilde{c}(5\lambda\lambda')}$$

は $y_1y_2 > \frac{1}{5}$ で絶対収束し $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ に関する weight 5 の保型形式を定めることがわかる. 更に, Ψ_1 の divisor は $T(1)$ で与えられる.

一方, Gundlach [Gund] は Hilbert modular forms のなす保型形式環及び保型関数体の構造を調べる際に, 10 個の theta constant の積として $T(1)$ を divisor とする $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ に関する weight 5 の保型形式 $\Theta(z_1, z_2)$ を構成した. 具体的にはまず, $\mu, \nu \in \{0, 1, \varepsilon_0, \varepsilon_0'\}$ に対して

$$\begin{aligned}\theta(z_1, z_2; \mu, \nu) &= \sum_{\lambda \in \mathcal{O}} (-1)^{\mathrm{Tr}\left(\frac{\nu}{\sqrt{5}}\lambda\right)} \mathbf{e}\left(\mathrm{Tr}\left(\frac{\varepsilon_0}{2\sqrt{5}}(\lambda + \frac{\mu}{2})^2 z\right)\right) \\ &= \mathbf{e}\left(\frac{1}{8}\mathrm{Tr}\left(\frac{\varepsilon_0\mu^2}{\sqrt{5}}z\right)\right) \sum_{\lambda \in \mathcal{O}} \mathbf{e}\left(\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\frac{\nu}{\sqrt{5}}\lambda\right)\right) \mathbf{e}\left(\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\frac{\varepsilon_0(\lambda^2 + \mu\lambda)}{\sqrt{5}}z\right)\right)\end{aligned}$$

とおく. ここでは $\lambda \in K$ に対して $\mathrm{Tr}(\lambda z) = \lambda z_1 + \lambda' z_2$ としている. これらのうちから $\mathrm{Tr}(\mu\nu) \in 2\mathbb{Z}$ をみたす 10 通りの組み合わせ $(\mu, \nu) = (0,0), (1,0), (0,1), (1,1), (\varepsilon_0, 0), (0, \varepsilon_0), (\varepsilon_0', 0), (0, \varepsilon_0'), (\varepsilon_0, \varepsilon_0'), (\varepsilon_0', \varepsilon_0)$ をとって

$$\Theta(z_1, z_2) = \prod \theta(z_1, z_2; \mu, \nu)$$

と定める. Köecher principle によってこれらは定数倍のずれしかないから, Fourier 展開の最初の係数を比較することにより $\Psi_1 = \frac{1}{64}\Theta$ がわかる.

7 Converse theorem

定理 5.2 で構成された Borcherds products は Hirzebruch-Zagier divisor の間の relation を与えていると考えられる. その際の obstruction space $S^+(p, \chi_p)$ の次元は Hecke によって計算されており, $[\frac{p-5}{24}]$ である. 従って $p = 5, 13, 17$ のときには任意の $T(m)$ に対して divisor が $T(m)$ となる保型形式を Borcherds product によって構成することができるが, それ以外の場合にはどんな relation でも与えられるわけではない. しかし, Hirzebruch-Zagier divisor の線形結合を divisor にもつ保型形式は必ず Borcherds product によって与えられるという, 逆定理が成立する.

これをみるために, Borcherds lift を cohomological に解釈する.

まず, cusp forms $S_2(p, \chi_p)$ 上の functional a_r を $f(\tau) = \sum_{n>0} c(n)\, q^n$ に対して r 番目の Fourier 係数 $c(r)$ を対応させるものとし, 双対空間 $S_2(p, \chi_p)^*$ において a_r たちで生成される部分 $\mathbb{Z}$-加群を $A(p, \chi_p)$ とおく. 同様に, 直和分解 $S_2(p, \chi_p) = S_2^+(p, \chi_p) \oplus S_2^-(p, \chi_p)$ に対応して a_r, $\chi_p(r) = +1$ (resp. $\chi_p(r) = -1$) で生成される部分 $\mathbb{Z}$-加群を $A^+(p, \chi_p)$ (resp. $A^-(p, \chi_p)$) とする. すると $A(p, \chi_p) = A^+(p, \chi_p) \oplus A^-(p, \chi_p)$ と分解される.

次に, X_K 上の modified divisor class group $\widetilde{Cl}(X_K)$ を次のように定める. X_K 上の divisor group を $D(X_K)$ とする. その部分群 $\widetilde{H}(X_K)$ を, $\mathfrak{H}^2$ 上の $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ に関する有限位数の乗法因子をもつ適当な weight の保型形式がその零点と極によって定義する X_K 上の divisor で生成されるものとする. そして $\widetilde{Cl}(X_K) = D(X_K)/\widetilde{H}(X_K)$ とおく. これらの群の正確な定義については [Br1] Section 5 もしくは [Br2] Chapter 5 を参照されたい. また [Bo3] Section 4 の定義とも比較されるとよい.

このとき次が示される.

定理 7.1. *functional* a_r に *Hirzebruch-Zagier divisor* $T(r)$ を対応させることにより準同型写像

$$\eta : A(p, \chi_p) \longrightarrow \widetilde{Cl}(X_K)$$

が定義される.

証明. $a = \sum_{\substack{r \in \mathbb{Z} \\ \chi_p(r) \neq 0}} c_r\, a_r$, $c_r \in \mathbb{Z}$ とおき, これが $A(p, \chi_p)$ で 0 になるとする. すると, 任意の cusp form $g(\tau) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ \chi_p(n) \neq -1}} b(n)\, q^n \in S_2^+(p, \chi_p)$ に対して $a(g) = \sum_{\substack{r \in \mathbb{Z} \\ \chi_p(r) = 1}} c_r\, b(r) = 0$ が成立する. このとき定理 5.1 から principal part $\sum_{\substack{n<0 \\ \chi_p(n)=1}} c(n)\, q^n$, $\widetilde{c}(n) = c_{-n}$ をもつ weakly holomorphic modular form $f \in W_0^+(p,\chi_p)$ が存在する. 従って定理 5.2 から divisor $\sum_{\substack{r\in\mathbb{Z}\\ \chi_p(r)=1}} c_r T(r)$ は f の Borcherds lift によって与えられ $\widetilde{H}(X_K)$ に含まれる. 一方で $\chi_p(r)=-1$ のものについてはもともと $T(r)=\emptyset$ なのだから, η は well-defined. □

次に $\widetilde{Cl}(X_K)$ を Chern class map によって X_K の cohomology と結びつける.

その前に Chern class の求め方について簡単に復習をする.

$\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ の指数有限な正規部分群 Γ で $\mathfrak{H}^2$ に fixed point free に働くものをとる. このとき $\Gamma\backslash\mathfrak{H}^2$ は複素解析多様体なので, これに関しては次のように Chern class を求めることができる. divisor D に対し, 対応した line bundle $\mathcal{L}(D)$ をとる. $\pi:\mathfrak{H}^2\to\Gamma\backslash\mathfrak{H}^2$ を射影とする. $\mathfrak{H}^2$ 上の有理型関数 f でその divisor (f) が $\pi^*(D)$ に等しいものがとれる. このとき $J(\gamma,z)=f(\gamma z)/f(z)$, $\gamma\in\Gamma$ によって Γ の 1-cocycle が定まる. C^∞ 級正値関数 $h:\mathfrak{H}^2\to\mathbb{R}_{>0}$ で任意の $\gamma\in\Gamma$ に対し $h(\gamma z)=|J(\gamma,z)|h(z)$ をみたすものをとると, この h は $\mathcal{L}(D)$ 上に Hermitian metric を定義している. このとき閉微分形式 $\omega=\partial\overline{\partial}\log(h)$ は $H^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H}^2,\mathbb{C})$ の元を定め, D の Chern class $c(D)$ を与える.

$\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ の場合には cohomology の同型 $H^2(X_K,\mathbb{C})\cong H^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H}^2,\mathbb{C})^{\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})/\Gamma}$ を通じて divisor の Chern class を求めることができる.

上の方法によって保型形式の divisor の Chern class を求めてみる. F を $\mathfrak{H}^2$ 上の $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ に関する weight r の適当な有限位数の乗法因子をもった有理型保型形式とする. このとき $|F(z_1,z_2)|(y_1y_2)^{\frac{r}{2}}$ は $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$-invariant である. 従って $(y_1y_2)^{-\frac{r}{2}}$ を line bundle $\mathcal{L}((F))$ 上の Hermitian metric と思うことができて, Kähler form の定数倍 $\omega=-\frac{r}{2}\partial\overline{\partial}\log(y_1y_2)$ が $c((F))$ を与えることがわかる.

これらのことから $\widetilde{H^2}(X_K,\mathbb{C})=H^2(X_K,\mathbb{C})/\mathbb{C}\partial\overline{\partial}\log(y_1y_2)$ とおくとき, Chern class map $c:Cl(X_K)\to H^2(X_K,\mathbb{C})$ によって準同型

$$\widetilde{c}:\widetilde{Cl}(X_K)\longrightarrow\widetilde{H^2}(X_K,\mathbb{C})$$

が誘導される.

以上はむしろ一般的な内容であるが, この $\widetilde{c}$ を Hizebruch-Zagier divisors の上に制限すると, その具体的な記述と X_K の cohomology の構造とからより精密な形で述べることができる.

まず Hirzebruch-Zagier divisor $T(m)$ の Chern class を求める. なお, この結果は Hirzebruch, Zagier, 織田先生らによって異なる方法でも得られている ([HZ], [Oda1]).

定理 7.2. *Hirzebruch-Zagier divisor* $T(m)$ *の Chern class* は

$$\begin{aligned}c(T(m))&=\frac{B(m)}{4}\,\partial\overline{\partial}\log(y_1y_2)\\&\quad+4\pi^2\sum_{\substack{\lambda\in\mathfrak{d}^{-1}\\ \lambda>0,\,\lambda'<0}}\sum_{n\geq1}n\,\lambda\lambda'\,p_{|p\lambda\lambda'|}(m)\left(\mathbf{e}(n\lambda z_1+n\lambda'\overline{z}_2)\,dz_1\wedge d\overline{z}_2+\mathbf{e}(-n\lambda\overline{z}_1-n\lambda' z_2)\,dz_2\wedge d\overline{z}_1\right)\end{aligned}$$

で与えられる.

証明. Section 4 にある定義から

$$|\Psi_m(z_1,z_2)|\,e^{-\xi(z_1,z_2)/2}=e^{-\Phi_m(z_1,z_2)/2}$$

の関係がわかる. 右辺は $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$-invariant な関数であり, $\mathfrak{H}^2$ 上の有理型関数 $\Psi_m(z_1,z_2)$ の divisor が $T(m)$ なので, $e^{\xi(z_1,z_2)/2}$ を $\mathcal{L}(T(m))$ 上の Hermitian metric と思うことができて,

$$c(T(m))=\frac{1}{2}\,\partial\overline{\partial}\xi_m(z_1,z_2)$$

となる. 定義 4.1 による ξ_m の展開から定理を得る. □

次に上の展開を Hilbert modular form と関係づける. そのためには $H^2(X_K,\mathbb{C})$ の構造を多少知る必要がある. Hilbert modular variety の cohomology の詳しい結果については [Oda2] を読まれたい. $H^2(X_K,\mathbb{C})$ は次の分解をもつ.

$$H^2(X_K,\mathbb{C}) = H^2_{Eis}(X_K,\mathbb{C}) \oplus H^{2,0}_{squ}(X_K,\mathbb{C}) \oplus H^{1,1}_{squ}(X_K,\mathbb{C}) \oplus H^{0,2}_{squ}(X_K,\mathbb{C})\,.$$

ただし, $H^2_{Eis}(X_K,\mathbb{C})$ は Eisenstein 級数からくる部分で, $H^{p,q}_{squ}(X_K,\mathbb{C})$ は (p,q) 型の二乗可積分な微分形式で代表される部分である. 我々が必要とするのは $H^{1,1}_{squ}(X_K,\mathbb{C})$ の部分空間 $H^{1,1}_{univ}(X_K,\mathbb{C})\oplus H^{1,1}_{sym}(X_K,\mathbb{C})$ である. ここに

$$H^{1,1}_{univ}(X_K,\mathbb{C}) = \mathbb{C}\frac{dz_1\wedge d\overline{z}_1}{y_1^2} \oplus \mathbb{C}\frac{dz_2\wedge d\overline{z}_2}{y_2^2}$$

であり, $H^{1,1}_{sym}(X_K,\mathbb{C})$ は次のようにして Hilbert modular forms で与えられる.

$\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ に関する weight 2 の Hilbert modular cusp forms を $S_2(\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}))$ で表す. K の単数 ε_0 で $\varepsilon_0>0$, $\varepsilon_0'<0$ をみたすものをとる. このとき写像 $\alpha : S_2(\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})) \to H^{1,1}_{squ}(X_K,\mathbb{C})$ が

$$f(z_1,z_2) \mapsto f(\varepsilon_0 z_1, \varepsilon_0'\overline{z}_2)\, dz_1\wedge d\overline{z}_2 + f(\varepsilon_0 z_2, \varepsilon_0'\overline{z}_1)\, dz_2\wedge d\overline{z}_1$$

により定まる. $H^{1,1}_{sym}(X_K,\mathbb{C})$ はこの α の像として定義する.

さて, Zagier ([Za1] Appendix 1) は次のような級数

$$\omega_m(z_1,z_2;s) = \sum_{\substack{\left(\begin{smallmatrix} a & \lambda \\ \lambda' & b\end{smallmatrix}\right)\in L' \\ ab-\mathrm{N}(\lambda)=-\frac{m}{p}}} \frac{1}{(az_1z_2+\lambda z_1+\lambda' z_2+b\,)^2}\frac{1}{|\,az_1z_2+\lambda z_1+\lambda' z_2+b\,|^{2s}}\,.$$

を考えた. これは $\mathrm{Re}\,(s)>0$ で収束し, 領域 $\{\, s\in\mathbb{C}\,|\,\mathrm{Re}\,(s) > -\frac{1}{4}\,\}$ へ正則に解析接続されることが示される. そこで

$$\omega_m(z_1,z_2) = \omega_m(z_1,z_2;\,0)$$

とおくと, これは $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ に関する weight 2 の cusp form となる.

$\omega_m(z_1,z_2)$ の Fourier 係数を具体的に計算してみると, 定理 7.2 は次のように書き換えられることがわかる :

$$c(T(m)) = \frac{B(m)}{4}\,\partial\overline{\partial}\log(y_1y_2) + \frac{m}{4p}\,\alpha(\omega_m(z_1,z_2))\,.$$

これまでの結果を一つにまとめる. $\widetilde{Cl}_{HZ}(X_K)$ を $\widetilde{Cl}(X_K)$ の部分群で $T(m)$, $m\geq 1$ の像で生成されるものとする.

まず, 定理 7.1 は $\eta : A(p,\chi_p) \to \widetilde{Cl}_{HZ}(X_K)$ を与えている. これを $\tilde{c}$ で送ると像は $H^{1,1}_{univ}(X_K,\mathbb{C})\oplus H^{1,1}_{sym}(X_K,\mathbb{C})$ に含まれる. ここから $H^{1,1}_{sym}(X_K,\mathbb{C})$ への射影をとって更に $\alpha^{-1} : H^{1,1}_{sym}(X_K,\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} S_2(\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}))$ を合成する. 以上により, $\mathbb{Z}$-加群の準同型

$$A(p,\chi_p) \longrightarrow S_2(\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}))\,, \quad a_r \longmapsto \frac{r}{4p}\,\omega_r(z_1,z_2)$$

を得る.

これを $\mathbb{C}$-線形に拡張する. cusp forms $S_2(p,\chi_p)$ は cusp ∞ での Fourier 係数が全て $\mathbb{Z}$ に含まれるような基底をもっている. 従って $A(p,\chi_p)\otimes\mathbb{C} = S_2(p,\chi_p)^*$ となる. Petersson 内積 $<,>$ によって $S_2(p,\chi_p)$ と $S_2(p,\chi_p)^*$ を同一視しよう. このとき a_r が $4\pi r < \cdot, G_r >$ に対応するような r 番目の Poincare 級数を Hecke trick により定義することができる ([Za1] Appendix 1).

結局, 我々は次の $\mathbb{C}$-線形写像に導かれた :

$$\jmath : S_2(p,\chi_p) \longrightarrow S_2(\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}))\,, \quad G_r \longmapsto \frac{1}{16\pi p}\,\omega_r\,.$$

一方, Zagier [Za1] は級数

$$\Omega(z_1, z_2; \tau) = \sum_{n \geq 1} n\, \omega_n(z_1, z_2)\, q^n$$

を核関数とすることで Doi-Naganuma map

$$\imath : S_2(p, \chi_p) \longrightarrow S_2(\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}))\,, \quad f \longmapsto -\frac{1}{2\pi} < f(\tau),\, \Omega(-\overline{z}_1, -\overline{z}_2; \tau) >_\tau$$

を与えた. こうした Doi-Naganuma map の記述については [Katsurada] も参照のこと. $\imath$ の定義から $\imath(G_r) = -\frac{1}{8\pi^2}\,\omega_r$ なので, $\jmath = -\frac{\pi}{2p}\imath$ がわかる.

このようにして Borcherds lift から出発することで Doi-Naganuma map が再現された. また逆に, Doi-Naganuma map の性質を利用することで Hilbert modular の場合の Borcherds lift について次の逆定理が得られる.

定理 7.3. *F を $\mathfrak{H}^2$ 上の有理型関数で $SL_2(\mathcal{O})$ に関する適当な乗法因子をもつ保型形式とし, その divisor が Hirzeruch-Zagier divisor の線形和で与えられるとする. このとき, ある $f \in W_0^+(p, \chi_p)$ が存在して F は f による Borcherds product となる.*

証明. 必要とする事実は, Doi-Naganuma map $\imath$ が $S_2^+(p, \chi_p)$ 上で単射ということである.

F の divisor が $\sum_{n>0} \widetilde{c}(-n)\, T(n)$, $\widetilde{c}(-n) \in \mathbb{Z}$ とする. このとき定義によって $\widetilde{Cl}_{HZ}(X_K)$ において $\eta(\sum_{n>0} \widetilde{c}(-n)\, a_n) = 0$. η は $A^-(p, \chi_p)$ 上 0 であったが, $\imath$ の単射性から η は $A^+(p, \chi_p)$ 上単射であることがわかる. 従って $\sum_{n>0} \widetilde{c}(-n)\, a_n \in A^-(p, \chi_p)$. すると任意の $g(\tau) = \sum_{n>0} b(n)\, q^n \in S_2^+(p, \chi_p)$ に対して $\sum_{n>0} \widetilde{c}(-n)\, b(n) = 0$ となるので, 定理 5.1 と定理 5.2 により $\sum_{n>0} \widetilde{c}(-n)\, T(n)$ はある Borcherds product Ψ_f の divisor である. F/Ψ_f は $\mathfrak{H}^2$ 上で零点も極ももたない保型形式なので, 定数である. これにより定理が証明された. □

8 応用など

Borcherds products の応用をいくつか挙げていく.

1. [Hamahata] において述べられている Hirzebruch-Zagier divisor の generating series が保型形式になるという結果 [HZ] の証明.
2. 保型形式環の生成元の具体的構成.
3. Singular moduli の trace との関連.
4. etc $\cdots$

1. は Borcherds が [Bo3] において与えたものだが, Bruinier, Burgos, Kühn らによって Arithmetic な観点からの定式化が与えられている [BBK].

2. については, 保型形式環の生成元の一部を Borcherds product によって構成できるという結果が次数 2 の Siegel modular forms の場合には H.Aoki と T.Ibukiyama により, 次数 2 の Hermitian modular forms の場合には T.Dern と A.Krieg により得られている.

3. は Zagier [Za2] が一変数の場合の Borcherds product と Singular moduli の trace との間の (full modular の場合の) 同値性を見出したことに始まるもので, Bruinier をはじめ多くの人々によって様々な拡張・一般化が図られている.

4. そのほか, Borcherds product には generalized Kac-Moody algebra との関係, Enriques surface, K3 surface などの moduli 空間への応用といったことが考えられている. また Borcherds product の様々な構成法に応じて, Borcherds product の変種もいくつか存在し, Bruinier と Yang のもの, Aoki と Ibukiyama によるもの, 筆者によるものなどがある.

References

[Aoki] 青木 宏樹 : Practical construction of Borcherds product, 第１回保型形式周辺分野スプリングコンファレンス報告集, 97-112 (2002)

[Bo1] Borcherds, R.E. : Automorphic forms on $O_{s+2,2}(\mathbb{R})$ and infinite products, Invent.Math. **120** (1995), 161-213.

[Bo2] Borcherds, R.E. : Automorphic forms with singularities on Grassmannians, Invent.Math. **132** (1998), 491-562.

[Bo3] Borcherds, R.E. : The Gross-Kohnen-Zagier theorem in higher dimensions, Duke Math.J. **97** (1999), 219-233.

[Br1] Bruinier, J.H. : Borcherds products and Chern classes of Hirzebruch-Zagier divisors, Invent.Math. **138** (1999), 51-83.

[Br2] Bruinier, J.H. : *Borcherds products on $O(2,l)$ and Chern classes of Heegner divisors*, Lecture Notes in Math. **1780**, Springer-Verlag (2002).

[BB] Bruinier, J.H., Bundschuh, M. : On Borcherds products associated with lattices of prime discriminant, Ramanujan J. **7** (2003), 49-61.

[BBK] Bruinier, J.H., Burgos, J., Kühn, U. : Borcherds products and arithmetic intersection theory on Hilbert modular surfaces, preprint (2003).

[EZ] Eichler, M., Zagier, D. : *The Theory of Jacobi Forms*, Progress in Math. vol.**55**, Birkhäuser Boston Basel Stuttgart (1985).

[GR] Gunning, R.C., Rossi, H. : *Analytic functions of several complex variables*, Prentice-Hall (1965).

[Gund] Gundlach, K.B. : Die Bestimmung der Funktionen zur Hilbertshen Modulgruppe des Zahlkörpers $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, Math.Ann. **152** (1963), 226-256.

[Hamahata] 浜畑芳紀 : Hilbert modular 曲面上の曲線の交差数と保型形式, 第１３回整数論サマースクール報告集 (2006) (this volume).

[Hecke] Hecke, E. : Analytische Arithmetik der positiv definiten quadratischen Formen, Kgl.Danske Vid. Selskab. Math. fys.Med. XIII **12** (1940). Werke, 789-918.

[Hej] Hejhal, D. : The Selberg trace formula for $PSL(2,\mathbb{R})$, Lecture Notes in Math. **1001**, Springer-Verlag (1985).

[HZ] Hirzebruch, F., Zagier, D. : Intersection Numbers of Curves on Hilbert Modular Surfaces and Modular Forms of Nebentypus, Invent.Math. **36** (1976), 57-113.

[Ikeda] 池田 保 : 無限積による保型形式の構成, 第５回整数論サマースクール報告集 (1997), 94-104.

[Katsurada] 桂田英典 : Doi-Naganuma lift およびそれに関連する話題, 第１３回整数論サマースクール報告集 (2006) (this volume).

[Miyake] Miyake, T. : *Modular forms*, Springer-Verlag (1989).

[Oda1] Oda, T. : On Modular Forms Associated with Indefinite Quadratic Forms of Signature $(2, n-2)$, Math.Ann. **231** (1977), 97-144.

[Oda2] 織田 孝幸：Cohomology groups of hilbert modular varieties, 第１３回整数論サマースクール報告集 (2006) (this volume).

[Za1] Zagier, D. : Modular forms associated to real quadratic fields, Invent.Math. **30** (1975), 1-46.

[Za2] Zagier, D. : Traces of singular moduli, In: Bogomolov, F and Katzarkov, L (eds.) Motives, Polylogarithms, and Hodge Theory (Part I), International Press, Somerville (2002), 211-244.

京都大学大学院 理学研究科 数学教室
〒606-8502 京都市左京区北白川追分町
e-mail：`kawai@math.kyoto-u.ac.jp`