# $GL(2)$ 上の保型形式のベースチェンジリフト*

今野 拓也 †

## 前置き

この原稿の目的は Hilbert 保型形式を含む $GL(2)$ 上の保型形式、あるいは保型表現に対するベースチェンジリフトを解説することである。問題の起源は、土井・長沼両氏による実二次体 $E$ 上の四元数体 $D$ に付随する志村曲線 $S_D$ の研究にさかのぼる。$S_D$ は $E$ 上の標準模型を持ち、その Hasse-Weil ゼータ函数は $D^\times$ 上の保型形式の標準 $L$ 函数 $L(s,\pi^D)$ で書けるのだが、それは $\pi_D$ から清水・Jacquet-Langlands 対応で得られる $GL(2)_E$ 上の保型形式 $\pi_E$ の標準 $L$ 函数 $L(s,\pi_E)$ にほかならない。一方、ある条件下では $S_D$ は $\mathbb{Q}$ 上の模型も持っており、その $\mathbb{Q}$ 上の模型の Hasse-Weil ゼータ函数はある $GL(2)_\mathbb{Q}$ 上の (楕円) 保型形式 $\pi$ を使って $L(s,\pi)L(s,\pi\times\omega_{E/F})$ と書ける。つまり

$$L(s,\pi_E)=L(s,\pi)L(s,\pi\times\omega_{E/F})$$

を満たす、楕円保型形式 $\pi$ と $E$ 上の Hilbert 保型形式 $\pi_E$ が得られる。この $\pi_E$ が $\pi$ のベースチェンジリフトである。これを拡張した一般の大域体の二次拡大 $E/F$ に付随するベースチェンジリフト ($GL(2)_F$ 上の保型形式に $GL(2)_E$ 上の保型形式を対応させるリフト) はさらに Jacquet によって進められ [Jac72]、かなり完全なリフトの記述を与えている。この方向の結果については整数論への応用も含めて、桂田氏のレクチャーで解説されている [桂田]。

一方この方法では $E/F$ 拡大次数が 3 以上の場合が扱えない (§3.2 参照)。この問題の解決の転機となったのが齋藤裕氏の仕事 [Sai75] である。齋藤氏は $E/F$ が素数次の巡回拡大の場合に、その Galois 群の生成元 $\sigma$ で $GL(2)_E$ 上の保型形式への Hecke 作用素をひねり、そのトレースを計算することでベースチェンジリフトを構成した。しかしこの時点ではまだ古典的な設定での正則保型形式を扱っていたため、これらの構成は無限成分やレベルに多くの制限を受けていたことも重要である。ここにいたってベースチェンジリフトの記述には保型表現論が最適かつ不可欠なことは明らかだったが、保型表現への移行のためにはベースチェンジリフトの表現論的定義が

*2005 年度整数論サマースクール「Hilbert 保型形式」での講演原稿に加筆したもの。

†九州大学大学院数理学研究院
*E-mail* : takuya@math.kyushu-u.ac.jp
*URL* : http://knmac.math.kyushu-u.ac.jp/~tkonno/index-j.html

欠けていた[1]。新谷卓郎氏は保型表現の指標の間のいわゆる「新谷恒等式」(§3.3 参照) によるベースチェンジの定義を与えてこの困難を解決した。

その後、保型表現の立場で問題を定式化し、齋藤氏の考案した「ひねられた跡公式」を使って、素数次巡回拡大に対するベースチェンジリフトの問題を完全解決したのは R.P. Langlands であった [Lan80]。その理由はベースチェンジリフトの形にある。通常古典的な保型形式論ではカスプ形式と正則 Eisenstein 級数に分けて保型形式を学ぶが、ベースチェンジリフトではカスプ形式がしばしば実解析的 Eisenstein 級数にリフトする。つまりベースチェンジの記述にとって適切な保型形式の概念は $L^2(GL(2,F)\mathbb{A}^\times\backslash GL(2,\mathbb{A}))$ によるそれであり、当時この巨大な空間をひとまとめに捉える跡公式を最も自在に使いこなしていたのが Langlands だったのである。特に新谷恒等式による定義はベースチェンジリフトの像を特定することを可能にし、これが代数体の絶対 Galois 群の 2 次元 Artin 表現の $L$ 函数についての Artin 予想の多くの場合の解決につながった [Lan80, §2]。なお志村・谷山予想の解決を初めとするその後の多くの応用でも、この像の特徴付けが使われている点を強調しておきたい。

このノートでは最初に Hecke-Jacquet-Langlands 理論による、$L$ 函数を用いた $GL(2)$ 上の保型形式の記述を概説する。リフトの記述にはそのソースとターゲットの記述が必要だからである。特に上で注意したようにベースチェンジリフトは連続スペクトルも巻き込んだ形で記述されるため、$L^2(GL(2,F)\mathbb{A}^\times\backslash GL(2,\mathbb{A}))$ の保型表現としてのスペクトル分解 (“既約分解”) も詳説した。古典的な保型形式を中心に学ばれている方にとっては、$SL(2,\mathbb{Z})$ の保型形式環の記述などに比べて、Hecke-Jacquet-Langlands 理論は印象的でないかもしれない。この点を補う目的で第 1 節に類体論の、局所・大域原理を用いた記述を解説した。これ自体は 1950 年代から 60 年代にかけての古い結果だが、このような形で理解しておくことは保型形式論はもちろん $p$ 進群の表現論においても基本的である。

さて本題のベースチェンジについては Langlands 函手性の一例と見るのと、新谷恒等式による現実的な定義の双方ともが重要だと考えた。そこで最初に局所 Langlands 対応を用いて、$\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ の表現の $\mathrm{Gal}(\bar{F}/E)$ への制限と対応する操作として局所ベースチェンジを定義し、その上で局所ベースチェンジを集めたものが保型形式を保型形式に持って行くことを大域ベースチェンジと捉えた。新谷恒等式や齋藤、Langlands のひねられた跡公式など、実際の構成に用いられるアイディアは最後の証明についての概説で詳しく触れた。跡公式、特にここで用いられる不変跡公式の構成や、跡公式の比較に用いられる軌道積分の移行は、いずれも構成の本質的な鍵ではあるが、技術的で解説に多くの紙面を必要とすることから結果を述べるにとどめた。それ以外の証明の論点は簡潔ながら全て押さえたつもりである。

最後になりましたがこの講演の機会を与えてくださり、またよくサマースクールを運営してくださった浜畑芳紀さん、青木宏樹さんに心から感謝します。最初の原稿にあったいくつかの間違いを指摘してくださった池田保さんに感謝します。

[1] しかし $GL(2,E)$ の $\sigma$ でひねった共役類から $GL(2,F)$ の共役類へのノルム写像などはすでに考案、整備しており、まさに保型表現のみが足りなかった。

# 目 次



# 1 局所・大域原理

## 1.1 類体論の復習

**高木・Artin の類体論** $F$ を代数体: $[F:\mathbb{Q}]<\infty$ とし、そのアデール環、イデール群をそれぞれ $\mathbb{A}=\mathbb{A}_F$, $\mathbb{A}^\times$ で表す。定義から $\mathbb{A}$ は $F$ の各素点 $v$ での完備化 $F_v$ たちの制限直積 (位相的帰納極限)

$$\mathbb{A}=\varinjlim_S \prod_{v\in S} F_v \times \prod_{v\notin S} \mathcal{O}_v \tag{1.1}$$

である。ここで $S$ は全てのアルキメデス素点を含む素点の有限集合を走り、非アルキメデス素点 $v$ での $F_v$ の極大コンパクト部分環 (整数環) を $\mathcal{O}_v$ と書いた。$\mathbb{A}$ は局所コンパクト位相環で $F$ は対角単射準同型

$$F\ni\xi\longmapsto(\xi)_v=(\xi,\xi,\dots)\in\mathbb{A}$$

により $\mathbb{A}$ の離散部分環になる。同様に $\mathbb{A}^\times$ は (1.1) で $F_v$, $\mathcal{O}_v$ をそれらの単元群 $F_v^\times$, $\mathcal{O}_v^\times$ で置き換えた位相的帰納極限で与えられる局所コンパクト位相群で、対角に埋め込まれた $F^\times$ はその離散部分群である [Wei95]。

$F$ の代数閉包 $\bar{F}$ を固定し、その $F$ 上のガロア群を $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)=\varprojlim_E \mathrm{Gal}(E/F)$ ($E/F$ は $\bar{F}$ に含まれる有限次ガロア拡大を走る) と書く。これは

$$\mathrm{Gal}(\bar{F}/E)=\{\sigma\in\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)\,|\,(\sigma|_E)=\mathrm{id}_E\},\quad (E\text{ は }\bar{F}\text{ に含まれる }F\text{ の有限次拡大})$$

たちを開部分群とするコンパクト位相群である。一般に位相群 $G$ に対して、その交換子群の閉包 $[G,G]$ による $G$ の商 $G_{\mathrm{ab}}$ を $G$ の (極大) **アーベル商**という。また $\pi_0(G)$

で $G$ の連結成分たちのなす群を表す。定義から $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)_{\mathrm{ab}}$ は $F$ の $\bar{F}$ での**極大アーベル拡大** $F^{\mathrm{ab}}$ のガロア群 $\mathrm{Gal}(F^{\mathrm{ab}}/F)$ に等しい。これらの元で大域類体論の主定理は次のように述べられる [Tat86, §5]。

**定理 1.1** (類体論の主定理)**.** 自然な同型 $\pi_0(\mathbb{A}^\times/F^\times) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)_{\mathrm{ab}} = \mathrm{Gal}(F^{\mathrm{ab}}/F)$ がある。

**注意 1.2.** 定理は有限次アーベル拡大 $E/F$ に対する**相互律射**

$$\mathrm{rec}_{E/F} : \mathbb{A}^\times/F^\times \mathrm{N}_{E/F}(\mathbb{A}_E^\times) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(E/F)$$

たちの射影極限として得られている。特に

- 同型とはいうものの逆射は記述がしづらい。
- $\mathbb{A}^\times/F^\times$ の位相は、$F^\times \mathrm{N}_{E/F}(\mathbb{A}_E^\times)$, ($E/F$ は有限次アーベル拡大) を単位元の基本近傍系とするものではないから、左辺の $\pi_0(\cdot)$ の部分は改良できない。

という問題がある。特に定理の同型が局所理論の Euler 積という形に書けないことを強調しておきたい。

**群作用と表現**　さて、整数論の目標は代数体 $F$ やその整数環上で定義された対象の構造を調べることであり、$F$ のガロア群 $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ の作用はその際の重要な手がかりである。このようにほとんどの場合に重要なのは、与えられた群 $G$ そのものではなく $G$ のある集合 $X$ への作用 $X \ni x \mapsto g.x \in X$, $(g \in G)$ である。こうした作用を記述するにはいくつかの方法があるが、最もポピュラーなのは $X$ 上の関数空間 $C(X) = \{f : X \to K\}$ ($K$ は体) に定まる $G$ の ($K$ 線型) 表現 $\pi : G \to GL_K(C(X))$

$$\pi(g)f(x) := f(g^{-1}.x), \quad g \in G,\ f \in C(X)$$

によるものである。$G$ や $X$ が位相や測度を備えている場合には $C(X)$ の代わりに連続函数や二乗可積分な函数の空間などを考えることが多い。

**例 1.3.** $E/F$ が体の有限次ガロア拡大のときには、$E$ を $F$ ベクトル空間と見たものの上に $\mathrm{Gal}(E/F)$ の表現が定まる。よく知られているように $E$ は $\mathrm{Gal}(E/F)$ の右正則表現 $F[\mathrm{Gal}(E/F)]$ ($F$ 係数の群環に $\mathrm{Gal}(E/F)$ を右移動で作用させたもの) に同型である (**正規底定理**)。

**ガロアコホモロジー**　群 $G$ が作用するアーベル群を $G$ **加群**という。$G$ 加群 $A$ に対してその $G$ 不変部分 $A^G := \{a \in A \,|\, g.a = a, \forall g \in G\}$ を対応させる左完全函手の右導来函手として、$G$ **コホモロジー群** $\mathrm{H}^i(G, A)$ が定義される。すなわち $\mathrm{H}^\bullet(G)$ は $G$ 加群 $A$ にアーベル群族 $\{\mathrm{H}^i(G, A)\}_{i \in \mathbb{N}}$ を対応させる函手で、

- $\mathrm{H}^0(G, A) = A^G$.

- $A$ が coinduced, すなわち $A = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[G], B)$ (アーベル群の準同型の群) と書けるとき、$\mathrm{H}^i(G, A) = 0, \forall i \geq 0$.
- $G$ 加群の短完全列 $0 \to A \to B \to C \to 0$ があるごとに、長完全列

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow & \mathrm{H}^0(G,A) \longrightarrow \mathrm{H}^0(G,B) \longrightarrow \mathrm{H}^0(G,C) \\ \longrightarrow & \mathrm{H}^1(G,A) \longrightarrow \mathrm{H}^1(G,B) \longrightarrow \mathrm{H}^1(G,C) \\ \longrightarrow & \mathrm{H}^2(G,A) \longrightarrow \mathrm{H}^2(G,B) \longrightarrow \mathrm{H}^2(G,C) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

  が成り立つ。

を満たす [Ser79, VII.2]。正規部分群 $G \triangleright H$ に対しては**インフレ射**

$$\mathrm{infl} : \mathrm{H}^i(G/H, A^H) \longrightarrow \mathrm{H}^i(G, A^H) \longrightarrow \mathrm{H}^i(G, A)$$

が定まる ($A$ は $G$ 加群)。さらに全ての $0 \leq i \leq q$ で $\mathrm{H}^i(H, A) = 0$ が成り立つときには、**インフレ・制限完全列**

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^i(G/H, A^H) \xrightarrow{\mathrm{infl}} \mathrm{H}^i(G, A) \xrightarrow{\text{制限}} \mathrm{H}^i(H, A)$$

が成り立つ [上記文献 VII.6]。また $G$ 加群 $A, B$ に対して**カップ積**

$$\mathrm{H}^i(G, A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{H}^j(G, B) \longrightarrow \mathrm{H}^{i+j}(G, A \otimes_{\mathbb{Z}} B)$$

が定まる [同 VIII.3]。

特に $G$ が有限次ガロア拡大 $E/F$ のガロア群のとき、$\mathrm{H}^i(\mathrm{Gal}(E/F), A)$ を $E/F$ の $i$ 次の $A$ 係数**ガロアコホモロジー群**と呼び、$\mathrm{H}^i(E/F, A)$ と書く。$F$ の分離閉包 $F^{\mathrm{sep}}$ を固定して、$\mathrm{Gal}(F^{\mathrm{sep}}/F)$ 加群 $A$ に対して

$$\mathrm{H}^i(F, A) := \varinjlim_{E} \mathrm{H}^i(E/F, A^{\mathrm{Gal}(F^{\mathrm{sep}}/E)})$$

と書く。ここで $E$ は $F^{\mathrm{sep}}$ に含まれる $F$ の有限次ガロア拡大を走り、右辺はインフレ射に関する射影極限を表す。

**例 1.4.** 例 1.3 で触れた正規底定理は $\mathrm{H}^1(E/F, E) = 0$ ということに他ならない。

**Tate・中山双対性**　まず $E/F$ を $p$ 進体の有限次ガロア拡大とする。$\mathrm{Gal}(E/F)$ 加群 $E^\times$ と (自明な $\mathrm{Gal}(E/F)$ 加群) $\mathbb{Z}$ のテンソル積[2]に対するカップ積と $E^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \ni (x, m) \mapsto x^m \in E^\times$ の合成は

$$\mathrm{H}^i(E/F, E^\times) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{H}^{2-i}(E/F, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{H}^2(E/F, E^\times)$$

[2] これは $E^\times = \mathbb{G}_m(E)$ とその指標群 $X^*(\mathbb{G}_m) \simeq \mathbb{Z}$ のテンソル積である。この解釈により以下の構成は $\mathbb{G}_m$ を一般の $F$ トーラス $T$ に置き換えても同様に成立する。

を与える。この状況で特別なのは $n := [E : F]$ として $\mathrm{H}^2(E/F, E^\times)$ が局所類体論でいうところの**基本コホモロジー類** $u_{E/F}$ で生成される $n$ 次巡回群であることである。かくして $E$ についての射影極限を取ることで、完全双対性

$$\mathrm{H}^i(F, \bar{F}^\times) \times \mathrm{H}^{2-i}(F, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{H}^2(F, \bar{F}^\times) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\exp(2\pi i \bullet)} \mathbb{C}^1 \tag{1.2}$$

が得られる [Mil86, I. 系 2.4]。$E/F = \mathbb{C}/\mathbb{R}$ の場合には $\mathrm{H}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^\times) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ だが、この双対性自体はやはり正しいことに注意する。

次に $E/F$ を代数体の $n$ 次ガロア拡大とする。やはり $\mathrm{Gal}(E/F)$ 加群 $\mathbb{A}_E^\times/E^\times$ ($E$ の**イデール類群**) と $\mathbb{Z}$ のテンソル積に対するカップ積を使って

$$\mathrm{H}^i(E/F, \mathbb{A}_E^\times/E^\times) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{H}^{2-i}(E/F, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{H}^2(E/F, \mathbb{A}_E^\times/E^\times)$$

が考えられる。この場合も類体論の情報が $\mathrm{H}^2(E/F, \mathbb{A}_E^\times/E^\times) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ に集約され、$E$ についての射影極限を取って

$$\mathrm{H}^i(F, \bar{\mathbb{A}}^\times/\bar{F}^\times) \times \mathrm{H}^{2-i}(F, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{H}^2(F, \bar{\mathbb{A}}^\times/\bar{F}^\times) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\exp(2\pi i \bullet)} \mathbb{C}^1 \tag{1.3}$$

が得られる。ここで $\bar{\mathbb{A}}^\times$ は $\bar{F}$ に含まれる有限次ガロア拡大 $E$ についての帰納極限 $\varinjlim_E \mathbb{A}_E^\times$ を表す。

**定理 1.5** ([Mil86] I. 系 4.7)**.** (i) $i = 1, 2$ のとき、上のペアリング (1.3) は同型 $\mathrm{H}^i(F, \bar{\mathbb{A}}^\times/\bar{F}^\times) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\mathrm{H}^{2-i}(F, \mathbb{Z}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ を与える。
(ii) $i = 0$ のとき、$\mathrm{H}^2(F, \mathbb{Z})$ は $\mathbb{A}^\times/F^\times$ の指数有限開部分群による完備化 $(\mathbb{A}^\times/F^\times)^\wedge$ (コンパクト群になる) の Pontrjagin 双対。

**双対性としての類体論**　まず局所体の状況を考えよう。上で得られた Tate・中山双対性で $i = 0$ としてみる。$(\bar{F}^\times)^{\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)} = F^\times$ と $\mathrm{H}^2(F, \mathbb{Z})$ の双対性が得られる。ここで自明な $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ 作用を備えた完全列 $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{2\pi i} \mathbb{C} \xrightarrow{\exp} \mathbb{C}^\times \to 0$ のガロアコホモロジー完全列

$$\longrightarrow \bigl(\mathrm{H}^1(F, \mathbb{C}) = 0\bigr) \longrightarrow \mathrm{H}^1(F, \mathbb{C}^\times) \longrightarrow \mathrm{H}^2(F, \mathbb{Z}) \longrightarrow \bigl(\mathrm{H}^2(F, \mathbb{C}) = 0\bigr) \longrightarrow$$

から $\mathrm{H}^2(F, \mathbb{Z}) \simeq \mathrm{H}^1(F, \mathbb{C}^\times) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(\bar{F}/F), \mathbb{C}^\times)$ がわかる。すなわち全単射

$$\mathrm{Hom}(F^\times, \mathbb{C}^\times) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(\bar{F}/F), \mathbb{C}^\times) \tag{LCFT}$$

が得られた。局所類体論の相互律射を $\mathrm{rec}_F : F^\times \to \mathrm{Gal}(F^{\mathrm{ab}}/F)$ と書けば[3]、この全単射は $\chi \in \mathrm{Hom}(F^\times, \mathbb{C}^\times)$ に $\chi \circ \mathrm{rec}_F \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(\bar{F}/F), \mathbb{C}^\times)$ を対応させるものである。

[3]局所相互律射はアルキメデス的な場合は全射連続準同型、非アルキメデス的な場合は稠密な像を持つ連続単準同型である。

代数体の状況でも定理 1.5 (ii) を全単射

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{A}^\times/F^\times, \mathbb{C}^\times) \ni \chi \longleftrightarrow \chi \circ \mathrm{rec}_F \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(\bar{F}/F), \mathbb{C}^\times) \qquad \text{(GCFT)}$$

の形に書くことができる。ただし注意 1.2 で指摘した通り、$\mathbb{A}^\times/F^\times$ とその完備化は異なるため、**対応は位数有限の指標に限られなくてはならない**。一方これは次の意味で局所対応 (LCFT) と整合している。$F$ の各素点 $v$ で $F_v$ の代数閉包 $\bar{F}_v$ と $F$ 準同型 $i_v : \bar{F} \to \bar{F}_v$ を固定すれば、$\mathrm{Gal}(\bar{F}_v/F_v) \ni \sigma \mapsto \sigma|_{\bar{F}} \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ が定まる。$\chi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{A}^\times/F^\times, \mathbb{C}^\times)$ を $\mathbb{A}^\times$ の指標と見たものの $F_v^\times$ への制限を $\chi_v$ と書く。このとき $\chi \circ \mathrm{rec}_F$ の $\mathrm{Gal}(\bar{F}_v/F_v)$ (の像) への制限は $\chi_v \circ \mathrm{rec}_{F_v}$ に等しい。

## 1.2 Weil 群と Langlands の類体論

$E/F$ を局所体の有限次ガロア拡大とし、その基本類 $u_{E/F} \in \mathrm{H}^2(E/F, E^\times)$ を代表する 2 コサイクル $v$ を取る[4]。直積集合 $E^\times \times \mathrm{Gal}(E/F)$ に演算を

$$(z,\sigma)(z',\sigma') := (z\sigma(z')v(\sigma,\sigma'), \sigma\sigma'), \quad z, z' \in E^\times,\ \sigma, \sigma' \in \mathrm{Gal}(E/F)$$

と定めて得られる $\mathrm{Gal}(E/F)$ の $E^\times$ による**拡大**を

$$0 \longrightarrow E^\times \longrightarrow W_{E/F} \longrightarrow \mathrm{Gal}(E/F) \longrightarrow 0$$

と書く。これの同型類は $u_{E/F}$ のみで定まり、$v$ の取り方によらない。しかもガロア拡大の列 $K \supset E \supset F$ に対して基本類が $\mathrm{infl}(u_{E/F}) = [K:E] \cdot u_{K/F}$ を満たすことから、次の図式を可換にする射 $p_{K/E} : W_{K/F} \to W_{E/F}$ がある。

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & K^\times & \longrightarrow & W_{K/F} & \longrightarrow & \mathrm{Gal}(K/F) & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle \mathrm{N}_{K/E}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle p_{K/E}} & & \big\downarrow{\scriptstyle \text{射影}} & & \\
0 & \longrightarrow & E^\times & \longrightarrow & W_{E/F} & \longrightarrow & \mathrm{Gal}(E/F) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

この $p_{K/E}$ について $W_{E/F}$ たちは射影系をなす。そこで $F$ の ***Weil* 群** $W_F$ をこれらの射影極限 $\varprojlim_E W_{E/F}$ と定める。($W_{E/F} = W_F/[W_E, W_E] \neq W_E/W_F$ に注意！) この $F^\times$ と $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ のあいのこ的な作り方から、次の基本性質が従う。

- 任意の有限次拡大 $\bar{F} \supset E \supset F$ に対して $W_F/W_E \simeq \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)/\mathrm{Gal}(\bar{F}/E)$.
- 自然な同型 $\mathrm{rec}_F : F^\times \xrightarrow{\sim} W_{F,\mathrm{ab}}$ があって、それと上から誘導される射 $W_{F,\mathrm{ab}} \to \mathrm{Gal}(F^{\mathrm{ab}}/F)$ の合成は相互律射 $\mathrm{rec}_F : F^\times \to \mathrm{Gal}(F^{\mathrm{ab}}/F)$ に等しい。

[4] つまり $v$ は $v(x,y)v(xy,z) = v(x,yz)v(y,z), (x,y,z \in \mathrm{Gal}(E/F))$ を満たす $\mathrm{Gal}(E/F)^2$ 上の $E^\times$ 値函数。

特に、$F^\times$ から $\mathbb{C}^\times$ への連続準同型 (擬指標) の群を $\Pi(F^\times)$ と書けば、$\mathrm{rec}_F$ との合成は全単射

$$\Pi(F^\times) \ni \omega \longleftrightarrow \omega \circ \mathrm{rec}_F \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(W_F, \mathbb{C}^\times) \tag{LLC}$$

を与える (Weil-Langlands による類体論の拡張)。ここで $\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(W_F, \mathbb{C}^\times)$ は連続準同型の群を表す。

非自明な指標 $\psi : F \to \mathbb{C}^\times$ を固定すれば、$\omega \in \Pi(F^\times)$ に対しては Tate の学位論文 [CF86, XV 章] により、$L$ 因子 $L(s,\omega)$ および局所定数 $\varepsilon(s,\omega,\psi)$ が定まるのだった [Tat79, §3]。

$F$ が代数体の場合にも $E^\times$ をイデール類群 $\mathbb{A}_E^\times/E^\times$ で置き換えて同様の構成を行うことで、その Weil 群 $W_F = \varprojlim_E W_{E/F}$ が定まる。Galois 群の代わりに Weil 群を用いることのメリットは、次の定理と定理 1.5 (ii) を比較すれば明らかである。

**定理 1.6** ([Mil86] 定理 8.13)**.** $\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(W_F, \mathbb{C}^\times)$ は $\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathbb{A}^\times/F^\times, \mathbb{C}^\times)$ に標準同型。

$F$ の各素点 $v$ で、$F_v^\times \hookrightarrow \mathbb{A}^\times \twoheadrightarrow \mathbb{A}^\times/F^\times$ と制限射 $\mathrm{Gal}(E/F) \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(E_w/F_v)$ と基本類の局所・大域の整合性から、連続準同型 $W_{F_v} \to W_F$ が得られる。$\mathbb{A}^\times$ から $\mathbb{C}^\times$ への連続準同型で $F^\times$ 上で自明なもの (**イデール類擬指標**、Hecke の**量指標**) の群を $\Pi_{\mathrm{aut}}(\mathbb{A}^\times)$ と書けば、上と同様に全単射

$$\Pi_{\mathrm{aut}}(\mathbb{A}^\times) \ni \omega \longleftrightarrow \omega \circ \mathrm{rec}_F \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(W_F, \mathbb{C}^\times) \tag{GLC}$$

がある。類体論の場合同様、作り方から (LLC) と (GLC) は整合している。

$$\omega \circ \mathrm{rec}_F|_{W_{F_v}} = \omega_v \circ \mathrm{rec}_{F_v}.$$

こうして Hecke の量指標 (イデール類指標) もカバーした類体論の、局所・大域原理を満たす記述が得られた。最後に対応する Hecke $L$ 函数についての結果を思い出しておこう。

非自明な指標 $\psi = \bigotimes_v \psi_v : \mathbb{A}/F \to \mathbb{C}^\times$ を固定する。$\omega \in \Pi_{\mathrm{aut}}(\mathbb{A}^\times)$ に対して、上で触れた局所 $L, \varepsilon$ 因子を使って、

$$L(s,\omega) := \prod_v L(s,\omega_v), \quad \varepsilon(s,\omega) := \prod_v \varepsilon(s,\omega,\psi_v)$$

とおく。

**定理 1.7** (Tate)**.** (i) $L(s,\omega)$ は $\Re s \gg 0$ で絶対収束し、全複素平面上の有理型函数に伸びる。$\omega|_{\mathbb{A}^1}$ ($\mathbb{A}^1 := \ker|\cdot|_{\mathbb{A}}$) が非自明なら整型函数になる。$\varepsilon(s,\omega)$ の定義の Euler 積は実際には有限積で $\psi$ の取り方によらない。
(ii) 函数等式 $L(1-s,\omega^{-1})\varepsilon(s,\omega) = L(s,\omega)$ が成り立つ。

# 2 $GL(2)$ 上の保型形式

## 2.1 $L^2$ 保型形式とスペクトル分解

**アデール群上の保型形式**　$F$ を代数体とし、$F_\infty := \prod_{v|\infty} F_v$ で $F$ のアルキメデス素点での完備化たちの直和を表し、$\mathbb{A}_{\mathrm{fin}}$ で有限アデールからなる $\mathbb{A}$ の部分環を表す。$G := GL(2)_F$ と書く。つまり $G$ は任意の可換 $F$ 代数 $R$ に $G(R) = GL(2,R) := \mathbb{M}_2(R)^\times$ を対応させる函手である。特に $F$ 代数 $\mathbb{A}$ に対して、**アデール群**

$$G(\mathbb{A}) = \mathbb{M}_2(\mathbb{A})^\times = \varinjlim_{S} \Big(\prod_{v\in S} G(F_v) \times \prod_{v\notin S} \mathbb{M}_2(\mathcal{O}_v)^\times\Big)$$

が定まる。$G(\mathbb{A}) = G(F_\infty) \times G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ であり、$F$ の各素点 $v$ で

$$\mathbf{K}_v := \begin{cases} O(2,\mathbb{R}) & v \text{ が実素点のとき} \\ U(2,\mathbb{R}) & v \text{ が複素素点のとき} \\ \mathbb{M}_2(\mathcal{O}_v)^\times & v \text{ が非アルキメデスのとき} \end{cases}$$

とおけば $\mathbf{K} := \prod_v \mathbf{K}_v$ は $G(\mathbb{A})$ の極大コンパクト部分群である。$G$ の中心を $Z \simeq GL(1)_F$ と書けば、$G(\mathbb{A})$ は $G(F)$ を離散部分群として含む局所コンパクト位相群で、$G(F)Z(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})$ はコンパクトではないが測度有限である。$G(F_\infty)$ の複素化した Lie 環 $\mathfrak{g}_\infty$ の普遍包絡環の中心を $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_\infty)$ と書く。

$G(\mathbb{A})$ の既約ユニタリ表現 $(\pi, H)$ に対しては Schur の補題 $\mathrm{End}_{G(\mathbb{A})}(\pi,H) = \mathbb{C}\cdot\mathrm{id}_H$ が成り立つ。特に中心 $Z(\mathbb{A})$ はある指標 $\omega_\pi : \mathbb{A}^\times \to \mathbb{C}^\times$ で作用する: $\pi(z\mathbf{1}_2) = \omega_\pi(z)\mathrm{id}_H$, $(\forall z \in \mathbb{A}^\times)$。この $\omega_\pi$ を $\pi$ の**中心指標**という。

$Z(\mathbb{A})/Z(F) \simeq \mathbb{A}^\times/F^\times$ のユニタリ指標 $\omega = \prod_v \omega_v$ を固定する。函数 $\phi : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ が**中心指標 $\omega$ の保型形式**とは、

(i) $\phi$ は $G(F_\infty)$ 成分の函数として滑らかで、**右 $\mathbf{K}$ 有限**: $\dim\mathrm{span}\{\phi(\cdot k) \,|\, k \in \mathbf{K}\} < \infty$.

(ii) $\phi(\gamma z g) = \omega(z)\phi(g), \forall\gamma \in G(F), z \in Z(\mathbb{A}), g \in G(\mathbb{A})$.

(iii) $\phi$ は $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_\infty)$ 有限[5]: $\dim\mathrm{span}\{X.\phi \,|\, X \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_\infty)\} < \infty$.

(iv) $\phi$ は $G(\mathbb{A})$ 上緩増加。すなわち任意の $c > 0$ とコンパクト集合 $\Omega \subset G(\mathbb{A})$ に対して、$C > 0, N \in \mathbb{N}$ があって

$$\phi\Big(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\Big) \le C|a|_{\mathbb{A}}^N, \quad \forall g \in \Omega,\ a \in \mathbb{A}^\times,\ |a|_{\mathbb{A}} > c.$$

[5] この条件は $F = \mathbb{Q}$ の場合にはラプラス作用素の固有函数の有限線型結合であることに同値である。

が成り立つことだった。中心指標 $\omega$ の保型形式の空間を $\mathcal{A}(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))_\omega$ と書く。
$B = TU$ で $G$ の上三角元からなる *Borel* **部分群**を表す。

$$T(R) = \left\{ \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, t_i \in R^\times \right\}, \quad U(R) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in R \right\}.$$

$\phi \in \mathcal{A}(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))_\omega$ がさらに**カスプ形式**とは、その**定数項**

$$\phi_B(g) := \int_{\mathbb{A}/F} \phi\Big(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\Big)\, dx, \quad g \in G(\mathbb{A})$$

が消えていることだった。ただし $dx$ は $\mathbb{A}/F$ の測度が $1$ となるような $\mathbb{A}$ 上の不変測度である。このとき $\phi$ は自動的に $G(\mathbb{A})$ 上の急減少函数になる。中心指標 $\omega$ のカスプ形式の空間を $\mathcal{A}_0(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))_\omega$ と書く。

**$L^2$ 保型形式と保型表現**　$F$ が総実代数体の場合には、上の定義は古典的な Hilbert 保型形式やカスプ形式の定義の自然な拡張になっているが、実は Hilbert モヂュラー多様体の幾何的不変量とあまりうまく対応がつかない ([花村], [織田] を参照)。加えてこれから解説する保型形式の表現論による記述とも相性がよくないので、以下ではこれらの代わりに $G(F)Z(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})$ 上の二乗可積分函数の空間

$$L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))_\omega := \left\{ \begin{array}{c} \phi : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C} \\ \text{可測} \end{array} \,\middle|\, \begin{array}{ll} \text{(i)} & \phi(\gamma z g) = \omega(z)\phi(g),\ \gamma \in G(F) \\ & z \in Z(\mathbb{A}), g \in G(\mathbb{A}), \\ \text{(ii)} & \int_{G(F)Z(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})} |\phi(g)|^2\, dg/dz < \infty \end{array} \right\}$$

を考える。ここで $dg, dz$ はそれぞれ $G(\mathbb{A}), Z(\mathbb{A})$ 上の (両側) 不変測度である。これは $\mathcal{A}(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))_\omega$ とずいぶんかけ離れているように見えるが、その閉部分空間

$$L^2_0(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))_\omega := \{\phi \in L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))_\omega \,|\, \phi_B(g) = 0,\ \forall' g \in G(\mathbb{A})\}$$

は $\mathcal{A}_0(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))_\omega$ の *Petersson* **内積**

$$\langle \phi, \phi' \rangle = \int_{G(F)Z(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})} \phi(g)\overline{\phi'(g)}\, \frac{dg}{dz}$$

に関する完備化である。この節の目標である $GL(2)$ 上の保型形式の記述とは、$L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))_\omega$ 上の $G(\mathbb{A})$ の右正則表現

$$\big(R_\omega(g)\phi\big)(x) := \phi(xg), \quad g \in G(\mathbb{A}),\ \phi \in L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))_\omega$$

の「既約分解」にほかならない。

**Hecke 環**　一時的に $F$ を局所体とする。$G(F)$ の *Hecke* **環**を

$$\mathcal{H}(G(F)) := \left\{ \begin{array}{c} f : G(F) \to \mathbb{C} \\ \text{滑らか} \end{array} \;\middle|\; \begin{array}{ll} \text{(i)} & \mathrm{supp} f \text{ はコンパクト} \\ \text{(ii)} & f \text{ は両側 } \mathbf{K} \text{ 有限} \end{array} \right\}$$

と定める。ただし $v$ が非アルキメデスなときには、滑らかな函数とは局所定数函数を意味し、条件 (ii) は自動的に満たされる。これは畳み込み積

$$f_1 * f_2(x) := \int_{G(F)} f_1(g) f_2(g^{-1}x)\, dg$$

に関して (単位元のない) 非可換 $\mathbb{C}$ 代数をなす。

**例 2.1** (Hecke 作用素)**.** 代数体の状況に戻って $\omega_v$ が不分岐: $\omega_v|_{Z(F_v)\cap\mathbf{K}_v} = \mathbb{1}$ である非アルキメデス素点 $v$ を考える。$\mathcal{O}_v$ の素元 $\varpi_v$ を固定すれば、*Cartan* **分解** (単因子論)

$$G(F_v) = \coprod_{n \geq m \in \mathbb{Z}} \mathbf{K}_v \begin{pmatrix} \varpi_v^n & 0 \\ 0 & \varpi_v^m \end{pmatrix} \mathbf{K}_v$$

が成り立つ。これから $\mathcal{H}(G(F_v))$ 内の両側 $\mathbf{K}_v$ 不変な元たちのなす部分環 $\mathcal{H}_{\mathbf{K}_v}(G(F_v))$ は $\mathbf{K}_v\left(\begin{smallmatrix} \varpi_v & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\mathbf{K}_v$, $\varpi_v \cdot \mathbf{K}_v$ の特性函数 $T_v, U_v$ で生成される。これらは古典論における Hecke 作用素に他ならない (これらの記号は人によって異なる)。

非アルキメデス素点では $\mathbf{K}_v$ の特性函数 $1_{\mathbf{K}_v}$ は $\mathcal{H}(G(F_v))$ に属する。$G(\mathbb{A})$ の *Hecke* **環**を、$1_{\mathbf{K}_v}$ に関する $\mathcal{H}(G(F_v))_{\omega_v}$ たちの制限テンソル積

$$\mathcal{H}(G(\mathbb{A})) = \bigotimes_v \mathcal{H}(G(F_v)) := \bigcup_S \bigotimes_{v \in S} \mathcal{H}(G(F_v)) \otimes \bigotimes_{v \notin S} 1_{\mathbf{K}_v}$$

と定める。$f \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ も $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))_\omega$ に

$$R_\omega(f)\phi(x) := \int_{G(\mathbb{A})} f(g)\phi(xg)\, dg$$

と作用する。

**放物型誘導表現と Eisenstein 級数**　$F$ を一時的に局所体とする。$G(F)$ の極大コンパクト部分群 $\mathbf{K}$ および $G$ の上三角 Borel 部分群 $B = TU$ を上の通りとすると、**岩澤分解** (Schmidt の直交化法による $QR$ **分解**) $G(F) = B(F)\mathbf{K}$ が成り立つ。これを使って

$$h_B : G(F) \ni g = u \begin{pmatrix} t_1 & \\ & t_2 \end{pmatrix} k \longmapsto \left| \frac{t_1}{t_2} \right|_F^{1/2} \in \mathbb{R}_+^\times, \quad u \in U(F), k \in \mathbf{K}$$

とおく[6]。ここで $|\cdot|_F$ は $F$ のモヂュラスである。$F^\times$ の (ユニタリ) 指標のペア $\underline{\omega} = (\omega_1, \omega_2)$ を $T(F)$ の指標

$$\underline{\omega} : T(F) \ni \begin{pmatrix} t_1 & \\ & t_2 \end{pmatrix} \longmapsto \omega_1(t_1)\omega_2(t_2) \in \mathbb{C}^\times$$

[6] $U(F), T(F), \mathbf{K}$ 成分は一意ではないが $h_B(g)$ 自体は一意に定まることに注意する。

と見なして、Hilbert 空間

$$L(\underline{\omega}) := \left\{ \begin{array}{c} \phi : G(F) \to \mathbb{C} \\ \text{可測} \end{array} \middle| \begin{array}{ll} \text{(i)} & \phi(utg) = \underline{\omega}(t)\phi(g),\, u \in U(F) \\ & \qquad t \in T(F), g \in G(F) \\ \text{(ii)} & \|\phi\| := \int_{\mathbf{K}} |\phi(k)|^2\, dk < \infty \end{array} \right\}$$

を導入する。内積はもちろん $\mathbf{K}$ 上の $L^2$ 内積で与えられる。このとき $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して、$L(\underline{\omega})$ 上の $G(F)$ の表現 $I_B^G(\underline{\omega}_\lambda)$ が

$$\big(I_B^G(\underline{\omega}_\lambda, g)\phi\big)(x) := h_B(x)^{-\lambda-1}\big(h_B^{\lambda+1}\phi\big)(xg), \quad g \in G(F), \phi \in L(\underline{\omega})$$

により定まる。これを $\underline{\omega}_\lambda := h_B^\lambda \underline{\omega}$ からの**放物型誘導表現**という。$\lambda \in i\mathbb{R}$ のとき $I_B^G(\underline{\omega}_\lambda)$ は $G(F)$ の既約ユニタリ表現 (**主系列表現**) になる。

代数体 $F$ の状況に戻って $T(\mathbb{A})^1 := \{\left(\begin{smallmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{smallmatrix}\right) \,|\, |t_i|_{\mathbb{A}} = 1\}$ とおく。局所岩澤分解を集めて、アデール群の分解

$$G(\mathbb{A}) = U(\mathbb{A})T(\mathbb{A})\mathbf{K} = U(\mathbb{A})\mathfrak{A}_0 T(\mathbb{A})^1\mathbf{K}$$

が成り立つ[7]。ただし $\mathfrak{A}_0 := \{\left(\begin{smallmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{smallmatrix}\right) \,|\, a_i \in \mathbb{R}_+^\times \overset{\text{対角}}{\hookrightarrow} F_\infty^\times\}$ と書いた。$T(\mathbb{A})/T(F)\mathfrak{A}_0$ 上のユニタリ指標 (**保型指標**) の群を $\Pi_{\mathrm{aut}}(T(\mathbb{A})^1) = \{\underline{\omega} = (\omega_1, \omega_2) \,|\, \omega_i \in \Pi(\mathbb{A}^\times/\mathbb{R}_+^\times F^\times)\}$ で表す。 上と同様に $\underline{\omega} \in \Pi_{\mathrm{aut}}(T(\mathbb{A})^1)$ に対して Hilbert 空間

$$L(\underline{\omega}) := \left\{ \begin{array}{c} \phi : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C} \\ \text{可測} \end{array} \middle| \begin{array}{ll} \text{(i)} & \phi(uatg) = \underline{\omega}(t)\phi(g),\, u \in U(\mathbb{A}) \\ & \quad a \in \mathfrak{A}_0, t \in T(\mathbb{A}), g \in G(\mathbb{A}) \\ \text{(ii)} & \|\phi\| := \int_{\mathbf{K}} |\phi(k)|^2\, dk < \infty \end{array} \right\},$$

および大域放物型誘導表現 $\mathcal{I}_B^G(\underline{\omega}_\lambda)$

$$\big(\mathcal{I}_B^G(\underline{\omega}_\lambda, g)\phi\big)(x) := h_B(x)^{-\lambda-1}\big(h_B^{\lambda+1}\phi\big)(xg), \quad g \in G(\mathbb{A}), \phi \in L(\underline{\omega})$$

が定まる。ここでも $h_B : G(\mathbb{A}) \ni u\left(\begin{smallmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{smallmatrix}\right)k \mapsto |t_1/t_2|_{\mathbb{A}}^{1/2} \in \mathbb{R}_+^\times$ とおいた。

$L(\underline{\omega})$ 値 Paley-Wiener 函数 $\phi : \mathbb{C} \to L(\underline{\omega})$ たちの空間を $\mathscr{P}_{\underline{\omega}}$ [8] として、$\phi \in \mathscr{P}_{\underline{\omega}}$ の *Eisenstein* **級数**を

$$E(\phi(s), g) := \sum_{\gamma \in B(F)\backslash G(F)} \phi(s)_s(\gamma g) = \sum_{\gamma \in B(F)\backslash G(F)} h_B(\gamma g)^{s+1}\phi(s)(\gamma g)$$

[7]後半は $\mathbb{A}^\times = \mathbb{R}_+^\times \times \mathbb{A}^1$ (定理 1.7 の記号) から従う。

[8]講演の際に質問が出たので、$\mathscr{P}_{\underline{\omega}}$ の定義を手短に述べておこう。$\mathbf{K}$ の既約表現 $\tau \in \Pi(\mathbf{K})$ を固定すれば、$\phi(gk) = \tau(k)\phi(g)$, $(g \in G(\mathbb{A}), k \in \mathbf{K})$ をみたす $\phi \in L(\underline{\omega})$ の空間 $L(\underline{\omega})^\tau$ は有限次元であり、それらの直和 $\bigoplus_{\tau \in \Pi(\mathbf{K})} L(\underline{\omega})^\tau$ は $L(\underline{\omega})$ の稠密部分空間になる。$\phi : \mathbb{C} \to L(\underline{\omega})^\tau$ であって、その *Fourier* **変換**

$$\widehat{\phi}(g) := \int_{\lambda_0 + i\mathbb{R}} \phi(s) h_B(g)^{s+1}\, ds,$$

(より正確には $\mathbb{R} \ni t \mapsto \widehat{\phi}(\left(\begin{smallmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{smallmatrix}\right)g) \in \mathbb{C}$) が滑らかでコンパクト台を持つものの空間を $\mathscr{P}_{\underline{\omega}}^\tau$ と書く。このとき $\mathscr{P}_{\underline{\omega}} := \bigoplus_{\tau \in \Pi(\mathbf{K})} \mathscr{P}_{\underline{\omega}}^\tau$ と定めるのである。

と定める。また、$w(\underline{\omega}) := (\omega_2, \omega_1)$ として**絡作用素** $M(\underline{\omega}, s) : L(\underline{\omega}) \to L(w(\underline{\omega}))$ を

$$\big(M(\underline{\omega}, s)\phi\big)(g) := h_B(g)^{s-1} \int_{\mathbb{A}} \big(h_B^{s+1}\phi\big)\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix} g\right) dx, \quad \phi \in L(\underline{\omega})$$

と定める。

**命題 2.2** ([GJ79], §§4–5)**.** (1) $E(\phi(s), g)$, $M(\underline{\omega}, s)\phi(g)$ は $\Re s > 1$ で絶対収束し、$s \in \mathbb{C}$ に関する有理型函数に延びる。さらに両者とも虚軸上では正則で、その半平面 $\Re s > 0$ における極は Hecke $L$ 函数 $L(s, \omega_1/\omega_2)$ のそれに一致する。
(2) 極でない $s \in \mathbb{C}$ では $E(\phi(s)) \in \mathcal{A}(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))_{\omega_1\omega_2}$ で、$M(\underline{\omega}, s)$ は $G(\mathbb{A})$ 準同型 $\mathcal{I}_B^G(\underline{\omega}_s) \to \mathcal{I}_B^G(w(\underline{\omega})_{-s})$ を定める。有理型函数の等式としての函数等式 $E(M(\underline{\omega}, s)\phi(s)) = E(\phi(s))$ が成り立つ。

### スペクトル分解

**定理 2.3** ([GJ79] §4)**.** (1) $G(\mathbb{A})$ のユニタリ表現としての直和分解

$$L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))_\omega = L^2_0(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))_\omega \oplus L^2_{\mathrm{res}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))_\omega \oplus L^2_{\mathrm{cont}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))_\omega$$

がある。右辺のそれぞれの項への $R_\omega$ の制限を $R_{\omega,0}$, $R_{\omega,\mathrm{res}}$, $R_{\omega,\mathrm{cont}}$ と書く。
(2) $R_{\omega,0}$ は既約部分表現の直和に分解し、そこでの各既約ユニタリ表現の同型類の重複度は有限である。

$$R_{\omega,0} \simeq \bigoplus_{\pi \in \Pi(G(\mathbb{A}))_\omega} \pi^{\oplus m_0(\pi)}, \quad m_0(\pi) < \infty.$$

ここで $\Pi(G(\mathbb{A}))_\omega$ は中心指標 $\omega$ を持つ $G(\mathbb{A})$ の既約ユニタリ表現の同型類の集合を表す。
(3) $R_{\omega,\mathrm{res}}$ は 1 次元保型表現の直和。

$$R_{\omega,\mathrm{res}} \simeq \bigoplus_{\chi \in \Pi_{\mathrm{aut}}(\mathbb{A}^\times), \chi^2 = \omega} \chi \circ \det$$

(4) $R_{\omega,\mathrm{cont}}$ の記述。$\mathfrak{X} \in \Pi_{\mathrm{aut}}(T(\mathbb{A})^1)/\langle w \rangle$ に対して $L(\mathfrak{X}) := \oplus_{\underline{\omega} \in \mathfrak{X}} L(\underline{\omega})$ とおき、Hilbert 空間

$$\mathcal{L}_{\mathfrak{X}} := \left\{ \begin{array}{c} F : i\mathbb{R} \to L(\mathfrak{X}) \\ \text{可測} \end{array} \;\middle|\; \begin{array}{ll} \text{(i)} & F(-s) = \big(\bigoplus_{\underline{\omega} \in \mathfrak{X}} M(\underline{\omega}, s)\big) F(s) \\ \text{(ii)} & \|F\|^2 := \frac{1}{4\pi} \int_{i\mathbb{R}} |F(s)|^2 \, dk \, ds < \infty \end{array} \right\}$$

上の $G(\mathbb{A})$ のユニタリ表現

$$\big(\mathcal{I}_{\mathfrak{X}}(g)\phi(s)\big)(x) := h_B(x)^{-s-1} \big(h_B^{s+1}\phi(s)\big)(xg), \quad \phi \in \mathcal{L}_{\mathfrak{X}},\ g \in G(\mathbb{A})$$

を導入する。このとき

$$\bigoplus_{\underline{\omega}\in\mathfrak{X}} \mathscr{P}_{\underline{\omega}} \ni \phi \longmapsto \frac{1}{4\pi}\int_{i\mathbb{R}} E(\phi(s))\,ds \in L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))_\omega$$

を連続に拡張して得られる $G(\mathbb{A})$ 準同型を $T_{\mathfrak{X}} : \mathcal{L}_{\mathfrak{X}} \to L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))_\omega$ として[9]、$G(\mathbb{A})$ 同型

$$\Bigl(\bigoplus_{\mathfrak{X}\in\Pi_{\mathrm{aut}}(T(\mathbb{A})^1)/\langle w\rangle} \mathcal{L}_{\mathfrak{X}}\Bigr) \xrightarrow[\sim]{\bigoplus T_{\mathfrak{X}}} L^2_{\mathrm{cont}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))_\omega$$

がある。

この定理のスペクトル分解に現れる $G(\mathbb{A})$ の既約ユニタリ表現を、つまり $R_\omega$ の既約部分商を $G(\mathbb{A})$ の**保型表現**という。通常の表現論と異なり、保型表現は**同型類ではなく** $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))_\omega$ の部分商としての**実現を指す**ことに注意しよう。

## 2.2 Hecke-Jacquet-Langlands 理論

前節の定理 2.3 により $G(\mathbb{A})$ 上の保型形式 (表現) は、$\mathbb{A}^\times/F^\times$ 上の保型指標たちからなる $R_{\omega,\mathrm{res}}, T(\mathbb{A})/T(F)$ 上の保型指標 $\underline{\omega}_\lambda$ からの誘導表現 $\mathcal{I}_B^G(\underline{\omega}_\lambda)$ たちの連続和である $R_{\omega,\mathrm{cont}}$, そしてカスプ形式の空間の完備化 $R_{\omega,0}$ の直和である。あとは $R_{\omega,0}$ の記述 (同定理 (1)) における各既約表現の重複度 $m_0(\pi)$ を決めれば $G(\mathbb{A})$ 上の保型形式の記述、つまり $GL(1)$ に対する 1.2 節 (GLC) の $GL(2)$ への拡張が得られたことになる。ここで重要な役割を果たすのが標準 $L$ 函数である。

**局所標準 $L$ 因子**　まず $F$ を局所体とする (気になる方は非アルキメデスとしていただきたい)。その非自明な指標 $\psi : F \to \mathbb{C}^\times$ を固定すれば、$U(F)$ の非退化指標

$$\psi_U : U(F) \ni \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto \psi(x) \in \mathbb{C}^\times$$

および誘導表現 $\mathcal{W}_\psi := \mathrm{Ind}_{U(F)}^{G(F)}(\psi_U)$ が定まる。$G(F)$ の既約ユニタリ表現 $(\pi, V)$ を取れば、

$$\dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(\pi, \mathcal{W}_{\psi_U}) = \begin{cases} 1 & \dim V = \infty \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外} (\dim V = 1) \text{ のとき} \end{cases}$$

[9] わかりにくければ $L^2(\mathbb{R})$ 上の $\mathbb{R}$ のユニタリ表現 $(R(y)\phi)(x) := \phi(x+y), (\phi \in L^2(\mathbb{R}))$ の場合を考えてみるとよい。稠密部分空間 $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}) = \{e^{-\pi x^2}P(x) \mid P \text{ は多項式 }\}$ 上の Laplace 変換を

$$\widehat{\phi}(x) := \int_{\mathbb{R}} \phi(y)e^{2\pi xy}\,dy \in \mathcal{S}_0(i\mathbb{R})$$

と定めれば、Fourier 逆変換

$$\phi(x) = \int_{i\mathbb{R}} \widehat{\phi}(z)e^{-2\pi xy}\,dy$$

は等距写像 $L^2(i\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} L^2(\mathbb{R})$ に拡大する。

であることが知られている [JL70, I. 定理 2.14, 5.13, 6.3]。

$\pi$ が無限次元のとき、この定数倍を除いて一意な準同型 $\pi \hookrightarrow \mathcal{W}_{\psi_U}$ の像を $\pi$ の *Whittaker* **模型**と呼び、$\mathcal{W}_\psi(\pi)$ と書く。$W \in \mathcal{W}_{\psi_U}(\pi)$ は $W(zug) = \omega_\pi(z)\psi_U(u)W(g)$, $(z \in Z(F), u \in U(F))$ を満たすので、岩澤分解からその「成長速度」は $W((\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}))$, $(a \in F^\times)$ で決まる。そこで Jacquet-Langlands の**局所ゼータ積分**

$$Z(W,\chi,s) := \int_{F^\times} W\Big(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Big)\chi(x)|x|_F^{s-1/2}\,\frac{dx}{|x|_F}, \quad \chi \in \Pi(F^\times)$$

を導入する。これは $\Re s$ が十分大きいとき絶対収束している。

**命題 2.4** ([JL70] I. 定理 2.18, 5.15, 6.4)**.** (1) $Z(W,\chi,s)$ は $s \in \mathbb{C}$ の有理型函数に延びる。

(2) $L(s,\pi\times\chi) \in \{Z(W,\chi,s) \,|\, W \in \mathcal{W}_\psi(\pi)\}$ で

- 任意の $W \in \mathcal{W}_\psi(\pi)$ に対して $Z(W,\chi,s)/L(s,\pi\times\chi)$ は整型。
- $F$ が非アルキメデス的ならば $L(s,\pi\times\chi)$ は定数項が 1 の $q^{-s}$ の多項式の逆数。アルキメデス的ならば $\Gamma_\mathbb{R}(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$, $\Gamma_\mathbb{C}(s) = 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)$ の積の形。

なるものがただ一つある。

(3) 指数函数 $\varepsilon(s,\pi\times\chi,\psi)$ であって、任意の $W \in \mathcal{W}_\psi(\pi)$ に対して函数等式

$$Z(\theta(W),\chi^{-1},1-s) = \gamma(s,\pi\times\chi,\psi)Z(W,\chi,s),$$
$$\gamma(s,\pi\times\chi,\psi) := \frac{\varepsilon(s,\pi\times\chi,\psi)L(1-s,\pi^\vee\times\chi^{-1})}{L(s,\pi\times\chi)}$$

が成り立つものがただ一つある。ここで $\pi^\vee$ は $\pi$ の反傾表現で、$\theta(g) := \mathrm{Ad}((\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}))^t g^{-1}$, $\theta(W) := W \circ \theta$ と書いた。

**例 2.5** (特別な場合の標準 $L$ 因子)**.** (1) $F$ が非アルキメデス的なとき。

(i) Tame な既約超カスプ表現 $\pi(\omega)$, ($\omega$ は二次拡大 $E/F$ の乗法群の擬指標) に対しては、

$$L(s,\pi\times\chi) = L(s,\omega(\chi\circ \mathrm{N}_{E/F})), \quad \varepsilon(s,\pi\times\chi,\psi) = \lambda(E/F,\psi)\varepsilon(s,\omega(\chi\circ\mathrm{N}_{E/F}),\psi_E).$$

ここで $\psi_E := \psi \circ \mathrm{Tr}_{E/F}$ であり、$\lambda(E/F,\psi)$ は Langlands の $\lambda$ 因子である。Tame でない場合は省略するが、$L$ 因子は自明で $\varepsilon$ 因子は Gauss 和の積で書ける。

(ii) 主系列表現 $I_B^G(\omega_1,\omega_2)$ に対しては

$$L(s,\pi\times\chi) = L(s,\omega_1\chi)L(s,\omega_2\chi), \quad \varepsilon(s,\pi\times\chi,\psi) = \varepsilon(s,\omega_1\chi,\psi)\varepsilon(s,\omega_2\chi,\psi).$$

(iii) スペシャル表現 (Steinberg 表現) $\delta(\omega) \hookrightarrow I(\omega|\,|_F^{1/2} \otimes \omega|\,|_F^{-1/2})$ に対しては

$$L(s,\pi\times\chi) = L(s+1/2,\omega\chi),$$
$$\varepsilon(s,\pi\times\chi,\psi) = \varepsilon(s+1/2,\omega\chi,\psi)\varepsilon(s-1/2,\omega\chi,\psi)\frac{L(1/2-s,(\omega\chi)^{-1})}{L(s-1/2,\omega\chi)}.$$

(2) $F$ がアルキメデス的なとき。
(i) $F=\mathbb{R}$ で $\pi$ がウェイト $k$ の離散系列表現 $D_{k,\lambda}\hookrightarrow I(|\,|^{\lambda+k/2}\mathrm{sgn}^k\otimes|\,|^{\lambda-k/2})$, $(\lambda\in\mathbb{C}$, $k\in\mathbb{Z}, k\geq 2)$ のとき、$\chi=|\,|^{\mu}\mathrm{sgn}^{\epsilon}$, $\psi_{\mathbb{R}}(x)=\exp(2\pi ix)$ として

$$L(s,\pi\times\chi)=\Gamma_{\mathbb{C}}(s+\lambda+\mu+k/2),\quad \varepsilon(s,\pi\times\chi,\psi_{\mathbb{R}})=i^{k+1}.$$

(ii) 主系列表現 $I(\omega_1\otimes\omega_2)$ のとき、非アルキメデス的な場合と同様の式が成り立つ。ただし、$F=\mathbb{R}$ なら $\omega=|\,|^{\lambda}\mathrm{sgn}^{\epsilon}$, $(\lambda\in\mathbb{C}, \epsilon=0,1)$ として

$$L(s,\omega)=\Gamma_{\mathbb{R}}(s+\lambda+\epsilon),\quad \varepsilon(s,\omega,\psi_{\mathbb{R}})=i^{\epsilon}.$$

$F=\mathbb{C}$ なら $\omega(z)=|z|_{\mathbb{C}}^{\lambda}(z/\bar{z})^{k/2}$, $(\lambda\in\mathbb{C}, k\in\mathbb{Z})$ として

$$L(s,\omega)=\Gamma_{\mathbb{C}}(s+\lambda+|k|/2),\quad \varepsilon(s,\omega,\psi_{\mathbb{R}})=i^{|k|}.$$

と定める。
(3) $\pi$ が一次元表現 $\omega\circ\det$ の場合には

$$L(s,\pi\times\chi)=L(s+1/2,\omega\chi)L(s-1/2,\omega\chi),$$
$$\varepsilon(s,\pi\times\chi,\psi)=\varepsilon(s+1/2,\omega\chi,\psi)\varepsilon(s-1/2,\omega\chi,\psi)$$

と定義する。((1) (iii) と比較せよ。)

**大域理論**　再び $F$ が大域体の状況に戻って $\mathbb{A}/F$ の非自明指標 $\psi=\bigotimes_v\psi_v$ を固定する。$\pi\in\Pi(G(\mathbb{A}))_{\omega}$ (正確にはそれに付随する Hecke 環加群) は各素点での $G(F_v)$ の既約表現の**制限テンソル積**に分解する: $\pi\simeq\bigotimes_v\pi_v$. すなわち、

- 族 $\{\pi_v\in\Pi(G(F_v))_{\omega_v}\}_v$ で、ほとんど全ての非アルキメデス的な $v$ で $\pi_v\simeq I_B^G(\underline{\omega})$, $(\underline{\omega}=(\omega_1,\omega_2)\in\Pi(F_v^{\times})^2, \omega_1\omega_2=\omega_v, \omega_i|_{\mathcal{O}_v^{\times}}=\mathbb{1})$ なるものがある。
- そのような $v$ では $(\pi_v, L(\underline{\omega}))$ は $\phi_v^0|_{\mathbf{K}}=1$ となるベクトル $\phi_v^0$ をただ一つ含む[10]。このとき
$$\pi\simeq\bigcup_S\Big(\bigotimes_{v\in S}\pi_v\otimes\bigotimes_{v\notin S}\phi_v^0\Big).$$

が成り立つ。

**注意 2.6.** $\pi_v\simeq I_B^G(\underline{\omega})$ を上の通りとして、

$$t(\pi_v):=\begin{pmatrix}\omega_1(\varpi_v) & 0\\ 0 & \omega_2(\varpi_v)\end{pmatrix}$$

を $\pi$ の $v$ での *Hecke* **行列**という。さらに $\chi_v$ が不分岐指標 $|\cdot|_v^{\lambda}$ ならば、

$$L(s,\pi_v\times\chi_v)=\det(\mathbf{1}_2-q_v^{-s-\lambda}t(\pi_v))^{-1}$$

である。ここで $q_v$ は $\mathcal{O}_v$ の剰余体の位数である。

[10] 岩澤分解を考えれば明らかである。

$\pi = \bigotimes_v \pi_v \in \Pi(G(\mathbb{A}))$ と $F$ のイデール類指標 $\chi : \mathbb{A}^\times/F^\times \to \mathbb{C}^\times$ に対して

$$L(s, \pi \times \chi) := \prod_v L(s, \pi_v \times \chi_v), \quad \varepsilon(s, \pi \times \chi) := \prod_v \varepsilon(s, \pi_v \times \chi_v, \psi_v)$$

とおく。$\pi_v, \chi_v, \psi_v$ が全て不分岐な非アルキメデス素点 $v$ では $\varepsilon(s, \pi_v \times \chi_v, \psi_v) = 1$ だから後者は有限積だが、前者は真の Euler 積である。このとき次が成り立つ。

**定理 2.7** (Hecke-Jacquet-Langlands 理論の主定理)**.** (1) [JL70, II. 命題 11.1.1] $\pi = \bigotimes_v \pi_v \in \Pi_{\mathrm{unit}}(G(\mathbb{A}))$ に対して $m_0(\pi) \leq 1$.
(2) [同 定理 11.1] $m_0(\pi) = 1$ のとき、任意の $\chi : \mathbb{A}^\times/F^\times \to \mathbb{C}^\times$ に対して

(i) $L(s, \pi \times \chi)$ は $\Re s \gg 0$ のとき絶対収束し、$s$ の整型函数に解析接続される。

(ii) $\Re s$ が有界領域を動くとき、$L(s, \pi \times \chi)$ も有界。

(iii) 函数等式 $\varepsilon(s, \pi \times \chi) L(1 - s, \pi^\vee \times \chi^{-1}) = L(s, \pi \times \chi)$ が成り立つ。

(3) (Jacquet-Langlands-Weil の逆定理、[同 定理 11.3]) 逆に $\pi = \bigotimes_v \pi_v \in \Pi_{\mathrm{unit}}(G(\mathbb{A}))$ が任意のイデール類指標 $\chi$ に対して (2) (i)–(iii) を満たせば、$m_0(\pi) = 1$.
(4) (強重複度 1 定理 [Gel75, 定理 5.14]) $\pi = \bigotimes_v \pi_v, \pi' = \bigotimes_v \pi'_v \in \Pi_{\mathrm{unit}}(G(\mathbb{A}))$ が

- $m_0(\pi) = m_0(\pi') = 1$,
- ある素点の有限集合 $S$ があって $\pi_v \simeq \pi'_v$, ($\forall v \notin S$)

を満たせば、$\pi \simeq \pi'$.

# 3 $GL(2)$ のベースチェンジリフト

## 3.1 Langlands 函手性としてのベースチェンジ

**局所 Langlands 対応**　再び $F$ を標数 0 の局所体としよう。$F$ が非アルキメデスで $\ell$ がその剰余標数と異なる素数のとき、$W_F$ の指標は $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ の $\ell$ 進指標と対応する。同様に $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ の $n$ 次元 $\ell$ 進表現は局所 Langlands 群 $\mathcal{L}_F := W_F \times SL(2, \mathbb{C})$[11] の Frobenius 元が半単純に作用する $n$ 次元複素表現と対応する。ここで $I_F \subset \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ を惰性群として完全列

$$1 \longrightarrow I_F \longrightarrow W_F \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 1$$

があり、その $1 \in \mathbb{Z}$ の $W_F$ での任意の逆像が Frobenius 元 $\Phi_F$ だった。なお $\Phi_F$ の $W_{F,\mathrm{ab}}$ での像は 1.2 節の記号で $\mathrm{rec}_F(\varpi)$ になる ($\varpi$ は $\mathcal{O}$ の素元)。

[11] $\mathcal{L}_F$ は Weil-Deligne 群の $\mathbb{C}$ 有理点の変形である。

一方そのような (つまり $\Phi_F$ **半単純**な) $\mathcal{L}_F$ の表現 $\varphi:\mathcal{L}_F\to GL_{\mathbb{C}}(V)$ には $L,\varepsilon$ 因子

$$L(s,\varphi):=\det(1-\varphi(\Phi_F)q^{-s}|(\ker\varphi(N))^{I_F})^{-1},$$
$$\varepsilon(s,\varphi,\psi):=\varepsilon(s,\rho_\varphi,\psi)\det(-\rho_\varphi(\Phi_F)q^{-s}|V^{I_F}/(\ker\varphi(N))^{I_F}).$$

が対応する[12]。ここで $|\cdot|_F$ を $\mathrm{rec}_F$ で $W_{F,\mathrm{ab}}$ に持っていったものを再び $|\cdot|_F$ として、

$$\rho:W_F\ni w\longmapsto\varphi\Big(w,\begin{pmatrix}|w|_F^{1/2}&0\\0&|w|_F^{-1/2}\end{pmatrix}\Big)\in GL_{\mathbb{C}}(V)$$

であり、$N=\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)\in\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ と書いた。

**定理 3.1** ($GL(2)$ の局所 Langlands 対応、[Kut80])**.** $\mathcal{L}_F$ を $F$ が非アルキメデス的なら上の通り、アルキメデス的なときは $W_F$ そのものとする。$G(F)$ の既約許容表現の同型類と $\mathcal{L}_F$ の 2 次元 $\Phi_F$ 半単純な表現の同型類の対応 $\pi\leftrightarrow\varphi_\pi$ で $L,\varepsilon$ 因子を保つものがただ一つある。

**例 3.2.** 例 2.5 で挙げた $\pi$ に対する具体的な対応は次の表の通り。但し、$\omega\in\Pi(F^\times)$ は 1.2 節 (LLC) により $W_F$ の擬指標と同一視している。

| | $\pi$ | $\varphi_\pi$ | 備考 |
|---|---|---|---|
| (1) | $I(\omega_1,\omega_2)$ | $\omega_1\oplus\omega_2$ | $\omega_i\in\Pi(F^\times)$ |
| (2) | $\pi(\omega)$ | $\mathrm{Ind}_{W_E}^{W_F}(\omega)$ | $\omega\in\Pi(E^\times)$, $[E:F]=2$ |
| (3) | $D_{k,\lambda}$ | $\mathrm{Ind}_{W_{\mathbb{C}}}^{W_{\mathbb{R}}}(\lvert z\rvert_{\mathbb{C}}^{\lambda}(z/\bar{z})^{k/2})$ | $F=\mathbb{R}$ |
| (4) | $\delta(\omega)$ | $\omega\otimes\rho_2$ | $\omega\in\Pi(F^\times)$, 非アルキメデス |

ここで $\rho_2$ は $SL(2,\mathbb{C})$ の標準 2 次元表現である。(3) は (2) の特別な場合である ($W_{\mathbb{C}}=\mathbb{C}^\times$ ゆえ) ことに注意せよ。

**ベースチェンジ**　$E/F$ を局所体の有限次拡大とすれば、$W_E\subset W_F$ であった。そこで $W_F$ の表現を $W_E$ に制限する操作に定理 3.1 で対応する操作が考えられる。

$$r_E^F:\Pi(G(F))\ni\pi\overset{\text{定理 3.1}/F}{\longmapsto}\varphi_\pi\longmapsto\varphi_\pi|_{W_E}\overset{\text{定理 3.1}/E}{\longmapsto}\pi_E\in\Pi(G(E)).$$

これが $GL(2)$ の**局所ベースチェンジリフト**である。$E/F$ が Galois 拡大ならば、定理 3.1 と $L,\varepsilon$ 因子の定義から

$$L(s,\pi_E)=\prod_{\sigma\in\mathrm{Gal}(E/F)}L(s,\varphi_\pi^\sigma),\quad\varepsilon(s,\pi_E,\psi_E)=\lambda(E/F,\psi)^2\prod_{\sigma\in\mathrm{Gal}(E/F)}\varepsilon(s,\varphi_\pi^\sigma,\psi)$$

が成り立つ。ただし $W_F\to\mathrm{Gal}(E/F)$ による $\sigma\in\mathrm{Gal}(E/F)$ の逆像 $w_\sigma$ を固定して、$\varphi_\pi^\sigma:=\varphi_\pi\circ\mathrm{Ad}(w_\sigma)$ とした。$\psi_E:=\psi\circ\mathrm{Tr}_{E/F}$ であり、$\lambda(E/F,\psi)$ は Langlands の $\lambda$ 因子である。

[12] $W_F$ の表現 $\rho$ に対して $\varepsilon(s,\rho,\psi)$ は Langlands の $\varepsilon$ 因子 (Deligne の因子を $\psi$ 自己双対測度について取ったもの) を表している。これは函数等式を簡潔な形にする一方で、後で見るように拡大体の Weil 群への制限に際するふるまいを複雑にする。

**注意 3.3** (参考：$GL(1)$ の場合)**.** Weil 群の定義から可換図式

$$\begin{array}{ccc} E^\times & \xrightarrow{\mathrm{rec}_E} & W_{E,\mathrm{ab}} \\ {\scriptstyle \mathrm{N}_{E/F}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \text{埋め込み}} \\ F^\times & \xrightarrow{\mathrm{rec}_F} & W_{F,\mathrm{ab}} \end{array}$$

が成り立つ。すなわち $GL(1)$ のベースチェンジリフトはノルムとの合成にすぎない。

$$r_E^F : \Pi(F^\times) \ni \omega \longmapsto \omega \circ \mathrm{N}_{E/F} \in \Pi(E^\times).$$

特に上の $GL(2)$ の局所ベースチェンジが $\omega_{\pi_E} = \omega_\pi \circ \mathrm{N}_{E/F}$ を満たすこともわかる。

次に $E/F$ を代数体の有限次拡大とし、$E$ のアデール環を $\mathbb{A}_E$ で表す。

**定義 3.4.** $G(\mathbb{A}_E)$ の保型表現 $\pi_E$ が $G(\mathbb{A})$ の保型表現 $\pi \simeq \bigotimes_v \pi_v$ の**ベースチェンジリフト**であるとは、任意の $F$ の素点 $v$ とそれを割る $E$ の素点 $w$ において $\pi_{E,w} \simeq (\pi_{v,E_w} = r_{E_w}^{F_v}(\pi_v))$ が成り立つこととする。

見てのとおりベースチェンジの定義は局所的である。つまり保型表現とは限らない任意の既約表現 $\pi \simeq \bigotimes_v \pi_v \in \Pi(G(\mathbb{A}))$ のベースチェンジリフト $\pi_E := \bigotimes_v \bigotimes_{w|v} \pi_{v,E_w} \in \Pi(G(\mathbb{A}_E))$ が定義できる。従ってベースチェンジの問題は次のように定式化できる。

**問題 3.5.** (1) $\pi \in \Pi(G(\mathbb{A}))$ が $G(\mathbb{A})$ の保型表現のとき、その (局所) ベースチェンジリフト $\pi_E \in \Pi(G(\mathbb{A}_E))$ は $G(\mathbb{A}_E)$ の保型表現になるか？
(2) $G(\mathbb{A})$ の保型表現からのベースチェンジリフトとして得られる $G(\mathbb{A}_E)$ の保型表現を特徴付けよ。

## 3.2 Langlands の結果

問題 3.5 (1) のような保型表現か否かの判定には、逆定理 (定理 2.7 (3)) を用いるのが一手である。土井・長沼、Jacquet はこの方法により $E/F$ が二次拡大の場合に問題 3.5 (1) を解決した [桂田]。その議論は次の通りである。

> 二次拡大 $E$ のイデール類指標 $\omega$ に対してはShalika・田中、Jacquet-Langlands により「保型誘導表現」$\pi(\omega)$ が定まる。この形でない $G(\mathbb{A})$ のカスプ保型表現 $\pi$ に対して Rankin-Selberg 積 $L$ 函数 $L(s, \pi \times \pi(\omega))$ [Jac72] を考えると、任意の $\omega$ に対してこれは定理 2.7 の (2) を満たす。従って逆定理から
> $$L(s, \pi_E \times \omega) = L(s, \pi \times \pi(\omega))$$
> となる $G(\mathbb{A}_E)$ のカスプ保型表現 $\pi_E$ がある。

これは明らかに $E/F$ が二次拡大でない場合には拡張不可能である。一方で Artin 予想を始め、3 次以上の拡大についてのベースチェンジが多くの応用を生むことは明らかであった。そこで Langlands は齋藤 [Sai75]、新谷 [Shi79] のアイディアを拡充して、$G(F)\backslash G(\mathbb{A})$ の跡公式と $G(E)\backslash G(\mathbb{A}_E)$ のひねられた跡公式の比較により $E/F$ が素数次巡回拡大の場合に問題 3.5 を完全解決した [Lan80]。その結果は次の通り。

**定理 3.6** (局所ベースチェンジ)**.** $\ell$ を素数とし、$E/F$ を標数 0 の局所体の $\ell$ 次巡回拡大とする。
(1) $r_E^F:\Pi(G(F))\to\Pi(G(E))$ は定義可能な写像で、その像は

$$\Pi(G(E))^{\mathrm{Gal}(E/F)}:=\{\pi_E\in\Pi(G(E))\,|\,(\pi_E^\sigma:=\pi_E\circ\sigma)\simeq\pi_E,\,\sigma\in\mathrm{Gal}(E/F)\}.$$

(2) (a) $\pi\simeq I_B^G(\underline{\omega})$, ($\underline{\omega}=\omega_1\otimes\omega_2$) と $\pi'\in\Pi(G(F))$ が $r_E^F(\pi)\simeq r_E^F(\pi')$ を満たすためには $\pi'\simeq I_B^G(\underline{\omega}')$, $\omega_i/\omega_i'\in\Pi(F^\times/\mathrm{N}_{E/F}(E^\times))$ が必要十分。
(b) $I_B^G(\underline{\omega})$ 型でない $\pi,\pi'\in\Pi(G(F))$ が $r_E^F(\pi)\simeq r_E^F(\pi')$ を満たすためには $\pi'\simeq\omega(\det)\otimes\pi,\exists\omega\in\Pi(F^\times/\mathrm{N}_{E/F}(E^\times))$ が必要十分。
(4) $r_E^F(\pi^\vee)\simeq r_E^F(\pi)^\vee$, $r_E^F(\omega(\det)\otimes\pi)=\omega(\mathrm{N}_{E/F}(\det))\otimes r_E^F(\pi)$, $\omega_{r_E^F(\pi)}=\omega_\pi\circ\mathrm{N}_{E/F}$.

**注意 3.7.** 定理3.1 を用いて定義した局所ベースチェンジをなぜ構成し直しているのだろうか。実は、例3.2 の表にない、すなわち非アルキメデス局所体 $F$ に対する $G(F)$ の “extraordinary” 表現に対する局所 Langlands 対応は、1980 年当時は**タイプ**と呼ばれる組合せ論的データによる表現の分類によっており、$L$ 函数や、Hilbert モヂュラー多様体を用いて得られる大域 Langlands 対応と整合している保証はなかった[13]。その純組合せ論的とも言える対応が定理 3.1 のように $L$ 函数と整合していることを保証するには、80 年代後半の Carayol の仕事を待たねばならなかった [Car86]。

**定理 3.8** (大域ベースチェンジ)**.** $\ell$ を素数とし、$E/F$ を代数体の $\ell$ 次巡回拡大とする。
(1) $G(\mathbb{A})$ の保型表現の集合を $\Pi_{\mathrm{aut}}(G(\mathbb{A}))$ と書くとき、$r_E^F:\Pi_{\mathrm{aut}}(G(\mathbb{A}))\to\Pi_{\mathrm{aut}}(G(\mathbb{A}_E))$ は定義可能な写像で、その像は $\Pi_{\mathrm{aut}}(G(\mathbb{A}_E))^{\mathrm{Gal}(E/F)}$ (局所的な場合と同様に定義される)。
(2) (Clozel, [AC89]) ベースチェンジは次の $L$ 函数の等式で特徴づけられる。

$$\begin{aligned}L(s,r_E^F(\pi)\times\chi(\mathrm{N}_{E/F}))&=\prod_{\omega\in\Pi(\mathbb{A}^\times/F^\times\mathrm{N}_{E/F}(\mathbb{A}_E^\times))}L(s,\pi\times\omega\chi),\\ \varepsilon(s,r_E^F(\pi)\times\chi(\mathrm{N}_{E/F}))&=\prod_{\omega\in\Pi(\mathbb{A}^\times/F^\times\mathrm{N}_{E/F}(\mathbb{A}_E^\times))}\varepsilon(s,\pi\times\omega\chi).\end{aligned}$$

(3) (a) $\pi\simeq I_B^G(\underline{\omega}),\pi'\in\Pi_{\mathrm{aut}}(G(\mathbb{A}))$, ($\underline{\omega}\in\Pi_{\mathrm{aut}}(\mathbb{A}^\times)^2$) が $r_E^F(\pi)\simeq r_E^F(\pi')$ を満たすためには $\pi'\simeq I_B^G(\underline{\omega}')$, $\omega_i/\omega_i'\in\Pi(\mathbb{A}^\times/F^\times\mathrm{N}_{E/F}(\mathbb{A}_E^\times))$ が必要十分。

[13] $\pi\in\Pi(G(F))$ と $\rho:W_F\to GL(2,\mathbb{C})$ が対応するとき $\varepsilon(s,\pi\times\chi,\psi)=\varepsilon(s,\rho\otimes\chi,\psi)$ であることはわかっていた。だが Artin 予想が未解決な当時 (現在も)、この $\varepsilon$ 因子が大域 $L$ 函数の函数等式に現れる保証はない。この論点は、おそらくは Weil が $\varepsilon$ 因子にあまり触れなかった ([Wei95], [Wei71] など) ため、誤解されていることが多い。

(b) $R_{\omega,\mathrm{cont}}$ に現れない $\pi, \pi' \in \Pi_{\mathrm{aut}}(G(\mathbb{A}))$ が $r_E^F(\pi) \simeq r_E^F(\pi')$ を満たすためには $\pi' \simeq \omega(\det) \otimes \pi, \exists \omega \in \Pi(\mathbb{A}^\times / F^\times \mathrm{N}_{E/F}(\mathbb{A}_E^\times))$ が必要十分。
(4) (Labesse-Langlands, [LL79]) ある二次拡大 $E/F$ と $\omega \in \Pi_{\mathrm{aut}}(\mathbb{A}_E^\times)$ に対して、$\varphi_{\pi_v} = \mathrm{Ind}_{W_{E_w}}^{W_{F_v}} \omega_w, (\forall w|v)$ となる $\pi \simeq \bigotimes_v \pi_v \in \Pi_{\mathrm{aut}}(\mathbb{A}^\times)$ を**二面体型表現** *(dihedral representation)*[14]という。$\pi \in \Pi_{\mathrm{aut}}(G(\mathbb{A}))$ が二次拡大 $E$ に対して二面体型であるためには、$\omega_{E/F}(\det) \otimes \pi \simeq \pi$ が必要十分。ここで $\omega_{E/F}$ は $\mathbb{A}^\times / F^\times \mathrm{N}_{E/F}(\mathbb{A}_E^\times) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の非自明指標。

**注意 3.9.** (1) 定理 3.8 を繰り返し用いることにより、任意の巡回拡大、さらには巾零拡大 $E/F$ に対するベースチェンジリフトの存在が証明できる。
(2) 定理の (4) はベースチェンジリフトの話題から少し外れるが、土井・長沼の仕事の動機となった志村曲線のゼータ函数の記述で重要な役割を果たす。

## 3.3 証明について

**新谷恒等式** 定理 3.6, 3.8 を示すには、局所 Langlands 対応や $L$ 函数によるベースチェンジリフトの定義を表現論の言葉で定義し直さなくてはならない。そのヒントは $GL(1)$ の場合にある (注意 3.3)。$GL(1)$ のベースチェンジはノルムとの合成であった。

$\ell$ 次巡回拡大 $E/F$ のガロア群の生成元 $\sigma$ を取れば、$\mathrm{N}_{E/F}(x) = x\sigma(x)\cdots\sigma^{\ell-1}(x)$ であった。$G(F)$ 内の半単純な元の集合を $G(F)_{\mathrm{ss}}$ と書く。$\delta, \delta' \in G(E)$ が $\sigma$ **共役**とは、$\delta' = g^{-1}\delta\sigma(g), \exists g \in G(E)$ なることとする。

**定義 3.10.** $\mathrm{N}_{E/F} : G(E)_{\mathrm{ss}} \ni \delta \mapsto \delta\sigma(\delta)\cdots\sigma^{\ell-1}(\delta) \in G(E)$ とおく。$\sigma(\mathrm{N}_{E/F}(\delta)) = \delta^{-1}\mathrm{N}_{E/F}(\delta)\delta$ であるから、$\mathrm{N}_{E/F}(\delta)$ の特性多項式は $F$ 係数であり、したがってある $\gamma \in G(F)_{\mathrm{ss}}$ のそれに等しい。こうして**ノルム写像**

$$\mathcal{N}_{E/F} : \Big(G(E)_{\mathrm{ss}}/\sigma\,\text{共役}\Big) \ni \delta\,\text{の}\,\sigma\,\text{共役類} \longmapsto \gamma\,\text{の共役類} \in \Big(G(F)_{\mathrm{ss}}/\text{共役}\Big)$$

ができる。

さらに $E/F$ が局所体だとしよう。$\pi \in \Pi(G(F))$ はたいてい無限次元だから普通の意味の指標は定義できない。しかし、2.1 節で導入した Hecke 環の元 $f \in \mathcal{H}(G(F))$ に対しては

$$\mathrm{tr}\pi(f) := \mathrm{tr}\int_{G(F)} f(g)\pi(g)\,dg < \infty$$

は有限確定値を持つ。つまり $\mathrm{tr}\pi$ は $\mathcal{H}(G(F))$ 上の Schwartz 超関数として意味を持つ (**指標超函数**と呼ばれる)。さらに [JL70] によれば $G(F)$ 上の局所可積分函数 $\Theta_\pi$ であって、

$$\mathrm{tr}\pi(f) = \int_{G(F)} f(g)\Theta_\pi(g)\,dg, \quad \forall f \in \mathcal{H}(G(F))$$

[14] 対応する $W_F$ の表現が (無限次) 二面体群を像とするため。

となるものがある。これを $\pi$ の**指標函数**という。これは $\pi$ だけでなく不変測度 $dg$ にも依存していることに注意する。

次に $\pi_E \in \Pi(G(E))^{\mathrm{Gal}(E/F)}$ を取れば、定義から $G(E)$ 同型 $\pi_E(\sigma) : \pi_E \xrightarrow{\sim} \pi_E^\sigma$ で $\pi_E(\sigma)^\ell = \mathrm{id}_{V_E}$ なるものがある。このようなものの取り方は 1 の $\ell$ 乗根倍だけの自由度があるが、$\pi_E$ が無限次元の場合には Whittaker 模型を用いてそれを除くことができる (*Whittaker* **正規化**)。$\mathcal{H}(G(E))$ 上の Schwartz 超関数

$$\mathrm{tr}\pi_{E,\sigma}(f_E) := \mathrm{tr}\Big(\int_{G(E)} f_E(g)\pi_E(g)\,dg \circ \pi_E(\sigma)\Big)$$

を $\pi_E$ の $\sigma$ **指標超函数**という。やはりこの場合にも $G(E)$ 上の局所可積分函数 $\Theta_{\pi_E,\sigma}$ であって

$$\mathrm{tr}\pi_{E,\sigma}(f_E) = \int_{G(E)} f_E(g)\Theta_{\pi_E,\sigma}(g)\,dg, \quad \forall f_E \in \mathcal{H}(G(E))$$

となるものがある。これが $\pi_E$ の $\sigma$ **指標函数**である。

**定義 3.11** (新谷、Langlands)**.** (1) $\gamma \in G(F)_{\mathrm{ss}}$ はその中心化群がアーベル群のとき (つまり 2 つの異なる固有値を持つとき)、**正則**であるといわれる。$\delta \in G(E)_{\mathrm{ss}}$ が $\sigma$ **正則**とは、$\mathcal{N}_{E/F}(\delta)$ が $G(F)$ の正則半単純共役類であることとする[15]。
(2) $\pi_E \in \Pi(G(E))^{\mathrm{Gal}(E/F)}$ が $\pi \in \Pi(G(F))$ の**ベースチェンジリフト**であるとは、任意の $\sigma$ 正則な $\delta \in G(E)_{\mathrm{ss}}$ で

$$\Theta_{\pi_E,\sigma}(\delta) = \Theta_\pi(\mathcal{N}_{E/F}(\delta)) \qquad \text{(新谷恒等式)}$$

が成り立つこととする。

**跡公式**　まず通常の跡公式を復習しておく。上の通り $\ell$ を素数とし、$E/F$ を代数体の $\ell$ 次巡回拡大とする。$\boldsymbol{Z}_E := F^\times \mathrm{N}_{E/F}(\mathbb{A}_E^\times)\mathbf{1}_2 \subset Z(\mathbb{A})$ とおき、中心指標 $\xi : Z(F)\backslash\boldsymbol{Z}_E \to \mathbb{C}^\times$ を固定する。$f \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ の代わりに

$$f_\xi(g) := \int_{Z(F)\backslash\boldsymbol{Z}_E} f(zg)\xi(z)\,dz, \quad f \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$$

たちのなす畳み込み代数 $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))_\xi$ を考える。これは 2.1 節の $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))_\omega$ で $(Z(\mathbb{A}),\omega)$ を $(\boldsymbol{Z}_E,\xi)$ で置き換えたものに

$$\big(R_\xi(f)\phi\big)(x) := \int_{G(\mathbb{A})/\boldsymbol{Z}_E} f(g)\phi(xg)\,\frac{dg}{dz} = \int_{G(F)\boldsymbol{Z}_E\backslash G(\mathbb{A})} K(x,y)\phi(y)\,\frac{dy}{dz}$$

と作用する。ここで積分核 $K(x,y)$ は

$$K(x,y) := \sum_{\gamma\in Z(F)\backslash G(F)} f(x^{-1}\gamma y)$$

[15] $\sigma$ 正則な $\delta \in G(E)_{\mathrm{ss}}$ は正則半単純だが、$E/F = \mathbb{C}/\mathbb{R}$ のときの $\delta = \left(\begin{smallmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ のように正則半単純でも $\sigma$ 正則でない元もある。

で与えられる。

跡公式への導入として、まず $G = GL(2)$ の代わりに $F$ 上の四元斜体 $D$ の乗法群 $G = D^\times$ を考えよう。このとき $D^\times \mathbb{A}^\times \backslash D^\times_{\mathbb{A}}$ はコンパクトだから、$R_\xi(f)$ は跡族作用素でそのトレースは $K(x, y)$ の対角部分集合上の積分に等しい。

$$\int_{G(F)\boldsymbol{Z}_E\backslash G(\mathbb{A})} K(g,g)\,\frac{dg}{dz} = \mathrm{tr}R_\xi(f).$$

この両辺を展開して *Selberg* **跡公式**

$$\sum_{\gamma\in(G(F)/Z(F))/\text{共役}} \mathrm{meas}(G_\gamma(F)\boldsymbol{Z}_E\backslash G_\gamma(\mathbb{A}))O_\gamma(f) = \sum_{\pi\in\Pi(G(\mathbb{A}))_\xi} m(\pi)\mathrm{tr}\pi(f) \tag{3.1}$$

が得られる。ここで $G_\gamma$ は $G$ における $\gamma$ の中心化群で、

$$O_\gamma(f) := \int_{G_\gamma(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})} f(g^{-1}\gamma g)\,\frac{dg}{dt}$$

は $\gamma$ での (大域) **軌道積分**、$\mathrm{meas}(G_\gamma(F)\boldsymbol{Z}_E\backslash G_\gamma(\mathbb{A}))$ は $dt/dz$ に関する測度である。(左辺の各項は $G_\gamma(\mathbb{A})$ 上の測度 $dt$ によらないことに注意。) $m(\pi)$ は $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))_\xi$ での $\pi$ の重複度を表す。跡公式の保型形式の整数論への応用にとっては

(i) (3.1) の各項が

- 基本領域の測度や重複度といった大域的な量と
- 局所成分上の Schwartz 超函数 (軌道積分、既約表現の指標) の Euler 積型の超函数

の積からなる。

(ii) 各項が $G(\mathbb{A})$ 共役不変な**不変超函数**である。

の 2 点が大変重要である。

次に $G = GL(2)$ の場合を考えよう。今度は $G(F)\boldsymbol{Z}_E\backslash G(\mathbb{A})$ がコンパクトでないので $R_\xi(f)$ は跡族ではなく、$K(x, x)$ の $G(F)\boldsymbol{Z}_E\backslash G(\mathbb{A})$ 上の積分も収束しない。跡公式の構成はたいへん困難になるが、Jacquet-Langlands [JL70], Duflo-Labesse [DL71]

は次の跡公式を確立した。

$$\begin{aligned}
&\sum_{\gamma\in(G(F)_{\mathrm{ell}}/Z(F))/\text{共役}} \epsilon(\gamma)\mathrm{meas}(G_\gamma(F)\boldsymbol{Z}_E\backslash G_\gamma(\mathbb{A}))O_\gamma(f)\\
&\qquad + \ell\cdot c_0(\zeta_F(s))_{s=1}\prod_v \zeta_{F_v}(1)^{-1}\int_{UZ(F_v)\backslash G(F_v)} f\Big(g_v^{-1}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}g_v\Big)\,\frac{dg_v}{dz_v du_v}\\
&\qquad + \ell\cdot \mathrm{Res}_{s=1}\zeta_F(s)\sum_{\gamma\in T(F)_{G\text{-reg}}/Z(F)}\sum_v J_T(\gamma,f_v)\prod_{v'\neq v} I_G(\gamma,f_{v'}),\\
&= \sum_{\pi\in\Pi(G(\mathbb{A}))_\xi} m_0(\pi)\mathrm{tr}\pi(f) + \sum_{\omega\in\Pi_{\mathrm{aut}}(\mathbb{A}^\times),\omega^2|_{\mathrm{N}_{E/F}(\mathbb{A}_E^\times)}=\xi}\omega(f)\\
&\qquad +\frac14\sum_{\underline{\omega}=(\omega,\omega)\in\Pi_{\mathrm{aut}}(T(\mathbb{A})^1)_\xi}\mathrm{tr}\big(M(\underline{\omega},0)\mathcal{I}_B^G(\underline{\omega},f)\big)\\
&\qquad +\frac{1}{4\pi}\sum_{\underline{\omega}\in\Pi_{\mathrm{aut}}(T(\mathbb{A})^1)_\xi}\int_{i\mathbb{R}}\Bigg(\sum_v J_T(\underline{\omega}_{v,\lambda},f_v,\psi_v)\prod_{v'\neq v} I_G(\underline{\omega}_{v',\lambda},f_{v'})\,d\lambda\\
&\qquad\qquad -\frac{r'(\underline{\omega},\lambda)}{r(\underline{\omega},\lambda)}\mathrm{tr}\mathcal{I}_B^G(\underline{\omega}_\lambda,f)\Bigg)\,d\lambda.
\end{aligned}\tag{3.2}$$

ここで $G(F)_{\mathrm{ell}}$ は特性多項式が $F$ 上で既約な $\gamma\in G(F)$ たちの集合と $Z(F)$ の合併であり、$\epsilon(\gamma):=|\mathrm{H}^1(F,G_{\mathrm{ad},\gamma})|$, $(G_{\mathrm{ad}}=G/Z=PGL(2))$ である。$c_0(\cdot)_{s=1}$ は括弧内の函数の $s=1$ での Laurent 展開の定数項を表す。右辺では

$$\omega(f):=\int_{G(\mathbb{A})/\boldsymbol{Z}_E} f(g)\omega(\det g)\,\frac{dg}{dz}$$

であり、$\omega_1\omega_2|_{\mathrm{N}_{E/F}(\mathbb{A}_E^\times)}=\xi$ となる $\underline{\omega}=(\omega_1,\omega_2)\in\Pi_{\mathrm{aut}}(T(\mathbb{A})^1)$ の集合を $\Pi_{\mathrm{aut}}(T(\mathbb{A})^1)_\xi$ と書いた。$J_T(\gamma,f_v)$ は $\gamma$ での重み付き軌道積分、$J_T(\underline{\omega}_{v,\lambda},f_v)$ は $I_B^G(\underline{\omega}_{v,\lambda})$ の重み付き指標と呼ばれる Schwartz 超関数である。また

$$I_G(\gamma,f_v):=|\det(1-\gamma_v|_{(\mathfrak{g}/\mathfrak{t})(F_v)})|_v^{1/2}O_\gamma(f_v),\quad I_G(\underline{\omega}_{v,\lambda},f_v):=\mathrm{tr}I_B^G(\underline{\omega}_{v,\lambda},f_v)$$

と書いた。この跡公式は Selberg 跡公式 (3.1) の性質 (i) は備えているが、$J_T(\cdot)$ たちは $G(F_v)$ 共役で不変でないために (ii) を満たさない。そこで Langlands は $T(F)\backslash T(\mathbb{A})^1$ の跡公式 (Poisson 和公式) の寄与を両辺から差し引くことにより要求 (ii) を満たす、いわゆる**不変跡公式**を構成した [Lan80, 10 章]。

$$\sum_{\gamma\in(G(F)_{\mathrm{ell}}/Z(F))/\text{共役}} \epsilon(\gamma)\mathrm{meas}(G_\gamma(F)\boldsymbol{Z}_E\backslash G_\gamma(\mathbb{A}))O_\gamma(f) \tag{$I_{\mathrm{ell}}(f)$}$$

$$+\ell\cdot c_0(\zeta_F(s))_{s=1}\prod_v \zeta_{F_v}(1)^{-1}\int_{UZ(F_v)\backslash G(F_v)} f\Big(g_v^{-1}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}g_v\Big)\,\frac{dg_v}{dz_v du_v} \tag{$I_{\mathrm{unip}}(f)$}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \ell\cdot \mathrm{Res}_{s=1}\zeta_F(s) \sum_{\gamma\in T(F)_{G\text{-reg}}/Z(F)} \sum_v I_T(\gamma, f_v)\prod_{v'\neq v} I_G(\gamma, f_{v'}), && (I_T^{\mathrm{geo}}(f))\\
= &\sum_{\pi\in\Pi(G(\mathbb{A}))_\xi} m_0(\pi)\mathrm{tr}\pi(f) + \sum_{\omega\in\Pi_{\mathrm{aut}}(\mathbb{A}^\times), \omega^2|_{\mathrm{N}_{E/F}(\mathbb{A}_E^\times)}=\xi} \omega(f) && (I_{\mathrm{disc}}(f))\\
&+\frac{1}{4}\sum_{\substack{\underline{\omega}=(\omega,\omega)\in\Pi_{\mathrm{aut}}(T(\mathbb{A})^1)\\ \omega^2|_{\mathrm{N}_{E/F}(\mathbb{A}_E^\times)}=\xi}} \mathrm{tr}\bigl(M(\underline{\omega},0)\mathcal{I}_B^G(\underline{\omega}, f)\bigr) && (I_{\mathrm{Eis}}(f))\\
&+\frac{1}{4\pi}\sum_{\substack{\underline{\omega}\in\Pi_{\mathrm{aut}}(T(\mathbb{A})^1)\\ \omega_1\omega_2|_{\mathrm{N}_{E/F}(\mathbb{A}_E^\times)}=\xi}} \int_{i\mathbb{R}}\biggl(\sum_v I_T(\underline{\omega}_{v,\lambda}, f_v, \psi_v)\prod_{v'\neq v} I_G(\underline{\omega}_{v',\lambda}, f_{v'})\,d\lambda\\
&\qquad\qquad - \frac{r'(\underline{\omega},\lambda)}{r(\underline{\omega},\lambda)}\mathrm{tr}\mathcal{I}_B^G(\underline{\omega}_\lambda, f)\biggr)\,d\lambda. && (I_T^{\mathrm{sp}}(f))
\end{aligned}
$$

ここで $I_T(\gamma, f_v)$, $I_T(\underline{\omega}_{v,\lambda}, f_v, \psi_v)$ は [同、9 章] で構成されたある不変超函数である。

**ひねられた跡公式**　新谷が上の定義に至ったのは、古典的な状況で、齋藤裕がひねられた跡公式と通常の跡公式の比較によってベースチェンジリフトを得たことに触発されたものだった。その齋藤のアイディアの保型表現版がここで解説するひねられた跡公式である。

$\xi_E := \xi\circ\mathrm{N}_{E/F} : \mathbb{A}_E^\times/E^\times \to \mathbb{C}^\times$ と書き、2.1 節で導入した $L^2(G(E)\backslash G(\mathbb{A}_E))_{\xi_E}$ を考える。この上の $G(\mathbb{A}_E)$ の右正則表現 $R_{\xi_E}$ は

$$
\bigl(R_{\xi_E}(\tau)\phi\bigr)(g) := \phi(g^\tau) = \phi(\tau^{-1}(g)),\quad \tau\in\mathrm{Gal}(E/F)
$$

とおくことにより、半直積 $G(\mathbb{A}_E)\rtimes\mathrm{Gal}(E/F)$ の表現に延びる。齋藤のアイディアは $G(\mathbb{A}_E)$ の Hecke 環

$$
\mathcal{H}(G(\mathbb{A}_E))_{\xi_E} := \left\{ \varphi : G(\mathbb{A}_E)\to\mathbb{C} \;\middle|\; \begin{array}{ll} \text{(a)} & \varphi(zg) = \xi_E(z)^{-1}\varphi(g),\ z\in Z(\mathbb{A}_E)\\ \text{(b)} & \mathrm{supp}\varphi \text{ は } Z(\mathbb{A}_E) \text{ を法としてコンパクト}\\ \text{(c)} & G(E_\infty) \text{ 成分について滑らかで}\\ & \text{両側 } \mathbf{K}_{E,\infty} \text{ 有限}\\ \text{(d)} & G(\mathbb{A}_{E,\mathrm{fin}}) \text{ 成分について局所定数} \end{array} \right\}
$$

の作用の代わりに剰余類 $G(\mathbb{A}_E)\rtimes\sigma$ の上の Hecke 函数 $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}_E))_{\xi_E}\sigma$ の作用

$$
\bigl(R_{\xi_E,\sigma}(\varphi)\phi\bigr)(x) = R_{\xi_E}(\varphi)\circ R_{\xi_E}(\sigma) = \int_{G(E)Z(\mathbb{A}_E)\backslash G(\mathbb{A}_E)} K_\sigma(x,y)\phi(y)\,\frac{dy}{dz}
$$

を考えることである。ここで

$$
K_\sigma(x,y) := \sum_{\delta\in G(E)/Z(E)} \varphi(x^{-1}\delta\sigma(y))
$$

と書いた。この状況に上の跡公式の構成を適用して得られるのが**ひねられた跡公式**

$$\sum_{\delta\in(G(E)_{\sigma,\mathrm{ell}}/Z(E))/\sigma\text{ 共役}} \epsilon_\sigma(\delta)\mathrm{meas}(G(E)_{\delta,\sigma}(F)Z(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A}_E)_{\delta,\sigma})O_{\delta,\sigma}(\varphi) \qquad (I_{\sigma,\mathrm{ell}}(\varphi))$$

$$+ c_0(\zeta_F(s))_{s=1}\prod_v \zeta_{F_v}(1)^{-1}\int_{T(E_v)/Z(E_v)}\int_{U(E_v)/U(F_v)}$$

$$\int_{\mathbf{K}_{E,v}}\varphi\Big((u_vt_vk_v)^{-1}\begin{pmatrix}1 & \zeta\\ 0 & 1\end{pmatrix}\sigma(u_vt_vk_v)\Big)\,dk_v\,du_v\,h_B(t_v)^{-2}\frac{dt_v}{dz_v} \qquad (I_{\mathrm{unip},\sigma}(\varphi))$$

$$+\frac{\mathrm{Res}_{s=1}\zeta_F(s)}{\ell}\sum_{\substack{\delta\in T(E)/Z(E)T(\sigma,E)\\ \mathrm{N}_{E/F}(\delta)\notin Z(F)}}\sum_v I_{T,\sigma}(\delta,\varphi_v)\prod_{v'\neq v} I_{G,\sigma}(\delta,\varphi_{v'}), \qquad (I^{\mathrm{geo}}_{T,\sigma}(\varphi))$$

$$=\sum_{\pi_E\in\Pi(G(\mathbb{A}_E))^{\mathrm{Gal}(E/F)}_{\xi_E}} m_0(\pi_E)\mathrm{tr}\pi_{E,\sigma}(\varphi)+\sum_{\substack{\omega\in\Pi_{\mathrm{aut}}(\mathbb{A}^\times)\\ \omega^2|_{\mathrm{N}_{E/F}(\mathbb{A}_E^\times)}=\xi}}\omega_E(\varphi) \qquad (I_{\mathrm{disc},\sigma}(\varphi))$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{\substack{\underline{\chi}=(\chi,\sigma(\chi))\in\Pi_{\mathrm{aut}}(T(\mathbb{A}_E)^1)\\ \chi\circ\mathrm{N}_{E/F}=\xi_E}}\mathrm{tr}\big(\mathcal{I}_B^G(\underline{\chi},\varphi)\mathcal{I}_B^G(w(\underline{\chi}),\sigma)M(\underline{\chi},0)\big) \qquad (I_{\mathrm{Eis},\sigma}(\varphi))$$

$$+\frac{1}{4\pi}\sum_{\substack{\underline{\omega}\in\Pi_{\mathrm{aut}}(T(\mathbb{A})^1)\\ \omega_1\omega_2|_{\mathrm{N}_{E/F}(\mathbb{A}_E^\times)}=\xi}}\int_{i\mathbb{R}}\Bigg(\sum_v I_{T,\sigma}(\underline{\omega}_{E_v,\lambda},\varphi_v,\psi_v)\prod_{v'\neq v} I_{G,\sigma}(\underline{\omega}_{E_{v'},\lambda},\varphi_{v'})\,d\lambda$$

$$-\frac{r'(\underline{\chi},\lambda)}{r(\underline{\chi},\lambda)}\mathrm{tr}\mathcal{I}_B^G(\underline{\omega}_{E,\lambda},\varphi)\mathcal{I}_B^G(\underline{\omega}_{E,\lambda},\sigma)\Bigg)\,d\lambda. \qquad (I^{\mathrm{sp}}_{T,\sigma}(\varphi))$$

である。ここで $G(E)_{\sigma,\mathrm{ell}}$ は $\mathcal{N}_{E/F}(\delta)\in G(F)_{\mathrm{ell}}$ となる $\delta\in G(E)_{\mathrm{ss}}$ たちの集合であり、$G(E)_{\delta,\sigma}:=\{g\in G(E)\,|\,\mathrm{Ad}(\delta)\sigma(g)=g\}$ は $G(E)$ での $\delta$ の $\sigma$ **中心化群**である。$\epsilon_\sigma(\delta):=|\mathrm{H}^1(E,G(\bar{F})_{\delta,\sigma})|$.

$$O_{\delta,\sigma}(\varphi):=\int_{G(\mathbb{A}_E)_{\delta,\sigma}Z(\mathbb{A}_E)\backslash G(\mathbb{A}_E)}\varphi(g^{-1}\delta\sigma(g))\,\frac{dg}{dt}$$

は $\delta$ での $\varphi$ の $\sigma$ **軌道積分**, $I_{T,\sigma}(\delta,\varphi_v)$, $I_{T,\sigma}(\underline{\chi}_v,\varphi_v,\psi_v)$ はそれぞれ $I_T(\gamma,f_v)$, $I_T(\underline{\omega}_v,f_v,\psi_v)$ の $\sigma$ ひねり類似である (詳しくは [Lan80, 10 章] 参照)。

**軌道積分の移行**　定理 3.8 の証明は上の $G(\mathbb{A})$ に対する不変跡公式と、$(G(\mathbb{A}_E),\sigma)$ に対するひねられた不変跡公式の比較による。それは跡公式の左辺 (幾何サイド) の各項の比較から始まる。その中核となる局所理論が軌道積分の移行である。しばらくの間、$E/F$ は標数 0 の局所体の $\ell$ 次巡回拡大としよう。正則半単純な $\gamma\in G(F)$ での軌道積分

$$O_\gamma(f):=\int_{G_\gamma(F)\backslash G(F)} f(g^{-1}\gamma g)\,\frac{dg}{dt}$$

および、$\sigma$ 正則な $\delta \in G(E)$ での $\sigma$ 軌道積分

$$O_{\delta,\sigma}(\varphi) := \int_{G(E)_{\delta,\sigma}\backslash G(E)} \varphi(g^{-1}\delta\sigma(g))\,\frac{dg}{dt}$$

が大域的な場合同様に考えられる。次の結果はこれらの軌道積分の局所的なふるまいを比較して証明される [Lan80, §6]。

**命題 3.12** (軌道積分の移行)**.** 任意の $\varphi \in \mathcal{H}(G(E))$ に対して $f \in \mathcal{H}(G(F))$ で、任意の $\sigma$ 正則な $\delta \in G(E)$ で

$$O_{\delta,\sigma}(\varphi) = O_{\mathcal{N}_{E/F}(\delta)}(f)$$

が成り立つものがある。

次に軌道積分の移行と Hecke 作用素が整合することを確かめる必要がある。$F$ が非アルキメデスであるとして、その極大コンパクト部分環を $\mathcal{O}$ と書く。$\mathbf{K} = G(\mathcal{O})$ として $\mathcal{H}(G(F))$ 内の両側 $\mathbf{K}$ 不変な元たちのなす畳み込み代数 $\mathcal{H}_{\mathbf{K}}(G(F))$ を考える。$f \in \mathcal{H}_{\mathbf{K}}(G(F))$ に

$$f^{\wedge}(z_1, z_2) := \mathrm{tr} I(|\ |_F^{z_1}, |\ |_F^{z_2})(f) = \int_{T(F)} \bar{f}^{(B)}\Big(\begin{pmatrix} t_1 & \\ & t_2 \end{pmatrix}\Big)|t_1|_F^{z_1}|t_2|_F^{z_2}\,dt,$$

$$\bar{f}^{(B)}(t) := h_B(t)\int_{U(F)}\int_{\mathbf{K}} f(k^{-1}tuk)\,dk\,du$$

を対応させる写像は**佐武同型**

$$S_F : \mathcal{H}_{\mathbf{K}}(G(F)) \ni f \overset{\sim}{\longmapsto} f^{\wedge} \in S[z_1, z_2]$$

を与える。$S[z_1, z_2]$ は $(z_1, z_2)$ の対称式の環である。さらに $E/F$ が不分岐拡大だとして、Hecke 作用素の間の**ベースチェンジ準同型**を

$$b_{E/F} : \mathcal{H}_{\mathbf{K}_E}(G(E)) \xrightarrow[\sim]{S_E} S[z_1, z_2] \xrightarrow[\sim]{S_F^{-1}} \mathcal{H}_{\mathbf{K}}(G(F))$$

と定める。次の主張は (安定) ベースチェンジリフトの**基本補題** *(fundamental lemma)* と呼ばれ、Kottwitz による Tits ビルディングを使った軌道積分の計算 [Kot86] を用いて一般の簡約代数群 $G$ に対して証明されている [Clo90], [Lab90]。

**命題 3.13** (基本補題)**.** 任意の $\varphi \in \mathcal{H}_{\mathbf{K}_E}(G(E))$ に対して

$$O_{\delta,\sigma}(\varphi) = O_{\mathcal{N}_{E/F}(\delta)}(b_{E/F}(\varphi))$$

が成り立つ。

**ベースチェンジの証明**　$E/F$ が代数体の $\ell$ 次巡回拡大の場合に戻って $G(\mathbb{A})$ の不変跡公式 $(I_{\mathrm{ell}}(f))$–$(I_T^{\mathrm{sp}}(f))$ と $G(\mathbb{A}_E)$ のひねられた跡公式 $(I_{\sigma,\mathrm{ell}}(f))$–$(I_{T,\sigma}^{\mathrm{sp}}(f))$ を考える。命題 3.12, 3.13 により、任意の $\varphi \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}_E))_{\xi_E}$ に対して

$$O_{\delta,\sigma}(\varphi) = O_{\mathcal{N}_{E/F}(\gamma)}(f)$$

となる $f \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}))_\xi$ が取れる。跡公式の構成の際に**玉河測度**を採用しておけば、これから $I_{\mathrm{ell}}(f) = I_{\sigma,\mathrm{ell}}(f)$ が従う。さらに面倒な計算を重ねてその他の幾何サイドの項の等式 $I_{\mathrm{unip}}(f) = I_{\mathrm{unip},\sigma}(\varphi)$, $I_T^{\mathrm{geo}}(f) = I_{T,\sigma}^{\mathrm{geo}}(\varphi)$ も証明できる。

この時点でまず、$\varphi$ の数カ所の局所成分に強い制限を付けてみる。すると跡公式の右辺のうち $I_{\mathrm{disc}}(f)$, $I_{\mathrm{disc},\sigma}(\varphi)$ の第一項以外は全て消える。

$$\sum_{\pi \in \Pi(G(\mathbb{A}))_\xi} m_0(\pi)\mathrm{tr}\pi(f) = \sum_{\pi_E \in \Pi(G(\mathbb{A}_E))_{\xi_E}^{\mathrm{Gal}(E/F)}} m_0(\pi_E)\mathrm{tr}\pi_{E,\sigma}(\varphi)$$

命題 3.13 から、これは $b_{E/F}$ で対応する任意の Hecke 作用素に対して成り立つ。よって強重複度 1 定理 (定理 2.7 (4)) によりこれを既約表現ごとに分けることができる。分けたものをある非アルキメデス素点 $v_0$ での成分の式と見よう。

$$\mathrm{tr}\pi_{v_0}(f_{v_0}) \prod_{v \neq v_0} \mathrm{tr}\pi_v(f_v) = \mathrm{tr}\pi_{E_{v_0},\sigma}(\varphi v_0) \prod_{v \neq v_0} \mathrm{tr}\pi_{E_v,\sigma}(\varphi_v).$$

これに離散系列指標の直交関係：

- $G(F_{v_0})$ の離散系列表現の指標は $G(F_{v_0})_{\mathrm{ell}}$ 上の不変函数の空間の正規直交基底をなす ($GL(n,F)$ には離散系列極限表現がないから)。
- 同様に $G(E_{v_0})$ の $\sigma$ 離散系列表現の指標は $G(E_{v_0})_{\sigma,\mathrm{ell}}$ 上の不変函数の空間の正規直交基底をなす。

を適用して定理 3.6 が得られる。

次に $\varphi$ についての制限をはずして考える。跡公式の右辺 (スペクトルサイド) の間の等式のうち $I_T^{\mathrm{sp}}(f) = I_{T,\sigma}^{\mathrm{sp}}(\varphi)$ を切り離すことができる。勝手な素点 $v$ での佐武変換 $\varphi_v^\vee$ の函数と見たとき、このパートは絶対連続なのに他の項は Dirac 測度で展開されているからである。残る等式

$$I_{\mathrm{disc}}(f) + I_{\mathrm{Eis}}(f) = I_{\mathrm{disc},\sigma}(\varphi) + I_{\mathrm{Eis},\sigma}(\varphi)$$

に再び命題 3.13 と強重複度 1 定理を適用して切り分けることにより、定理 3.8 が証明できる。それまでの、例えば Jacquet-Langlands 対応と比べて新しい点は、これらの項それぞれの間の等式が成り立たないことである。特に $[E:F]=2$ のとき、保型誘導表現 $\pi(\omega) \in \Pi_{\mathrm{aut}}(G(\mathbb{A}))$, $(\omega \in \Pi_{\mathrm{aut}}(\mathbb{A}_E^\times))$ の上式への寄与は

$$\mathrm{tr}\pi(\omega)(f) \in I_{\mathrm{disc}}(f) = \mathrm{tr}\big(\mathcal{I}_B^G(\underline{\chi},\varphi)\mathcal{I}_B^G(w(\underline{\chi}),\sigma)M(\underline{\chi},0)\big), \quad \underline{\chi} = (\omega,\sigma(\omega))$$

となって、カスプ形式が連続スペクトルの組成因子にリフトしている。

# 参考文献


[AC89] James Arthur and Laurent Clozel. *Simple algebras, base change, and the advanced theory of the trace formula*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989.

[Car86] Henri Carayol. Sur les représentations $\ell$-adiques associées aux formes modulaires de Hilbert. *Ann. Sci. École Norm. Sup., Sér. 4*, Vol. 19, No. 3, pp. 409–468, 1986.

[CF86] J. W. S. Cassels and A. Fröhlich, editors. *Algebraic number theory*, London, 1986. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers]. Reprint of the 1967 original.

[Clo90] L. Clozel. The fundamental lemma for stable base change. *Duke Math. J.*, Vol. 61, pp. 255–302, 1990.

[DL71] M. Duflo and J.-P. Labesse. Sur la formule des traces de Selberg. *Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. 4e. série*, Vol. 4, pp. 193–284, 1971.

[Gel75] Stephen S. Gelbart. *Automorphic forms on adele groups*, Vol. 83 of *Annals of Math. Studies*. Princeton UP, Princeton, NJ, 1975.

[GJ79] Stephen Gelbart and Hervé Jacqeut. Forms on $GL(2)$ from the analytic point of view. In *Automorphic forms, representations and $L$-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 1*, pp. 213–251. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[GL79] P. Gérardin and J.P. Labesse. The solution of a base change problem for $GL(2)$ (following Langlands, Saito, Shintani). In *Automorphic forms, representations and $L$-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2*, pp. 115–133. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[Jac72] H. Jacquet. *Automorphic forms on $GL(2)$ II*, Vol. 278 of *Lect. Notes in Math.* Springer-Verlag, 1972.

[JL70] H. Jacquet and R. P. Langlands. *Automorphic forms on $GL(2)$*, Vol. 114 of *Lect. Notes in Math.* Springer-Verlag, 1970.

[Kot86] Robert E. Kottwitz. Base change for unit elements of hecke algebras. *Composit Math.*, Vol. 60, No. 2, pp. 237–250, 1986.

[Kut80] P. Kutzko. The Langlands conjecture for $GL(2)$ of a local field. *Ann. of Math.*, Vol. 112, pp. 381–412, 1980.

[Lab90] J.-P. Labesse. Fonctions élémentaires et lemme fondamental pour le changement de base stable. *Duke Math. J.*, Vol. 61, No. 2, pp. 519–530, 1990.

[Lab95] Jean-Pierre Labesse. Non-invariant base change identities. *Mém. SMF, Sér. 2*, Vol. 61, pp. 1–113, 1995.

[Lan80] Robert P. Langlands. *Base change for* $\mathrm{GL}(2)$. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1980.

[LL79] J.-P. Labesse and R. P. Langlands. $L$-indistinguishability for $SL(2)$. *Canad. J. Math.*, Vol. 31, No. 4, pp. 726–785, 1979.

[Mil86] J. S. Milne. *Arithmetic duality theorems*. Academic Press Inc., Orlando, Florida, 1986.

[MW89] C. Mœglin and J.-L. Waldspurger. Le spectre résiduel de $\mathrm{GL}(n)$. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, Vol. 22, No. 4, pp. 605–674, 1989.

[Sai75] Hiroshi Saito. *Automorphic forms and algebraic extensions of number fields*. 1975. Lectures in Math., Kyoto Univ.

[Ser79] Jean-Pierre Serre. *Local fields*, Vol. 67 of *GTM*. Springer Verlag, New York, 1979. Translation of "Corps Locaux" by M.J. Greenberg.

[Shi79] T. Shintani. On liftings of holomorphic cusp forms. In *Automorphic forms, representations and $L$-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2*, pp. 97–110. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[Tat79] J. Tate. Number theoretic background. In *Automorphic forms, representations and $L$-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2*, pp. 3–26. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[Tat86] J.T. Tate. Global classfield theory. In J. W. S. Cassels and A. Fröhlich, editors, *Algebraic number theory, Proceedings of the instructional conference held at the University of Sussex, Brighton, September 1–17, 1965*, pp. 162–203. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], London, 1986. Reprint of the 1967 original.

[Wei71] André Weil. *Automorphic forms and Dirichlet series*, Vol. 189 of *Lect. Notes in Math.* Springer-Verlag, 1971.

[Wei95] André Weil. *Basic number theory*. Springer-Verlag, Berlin, 1995. Reprint of the second (1973) edition.

[花村] 花村昌樹. 保型形式から $\ell$ 進表現、モティーフへ. この報告集。

[桂田] 桂田英典. Doi-naganuma lift およびそれに関連する話題. この報告集.

[織田] 織田孝幸. Cohomology groups of hilbert modular varieties. この報告集。

# 索引