$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ のヒルベルトモジュラー形式の対数微分を解にもつ微分方程式について

眞野　智行（京大・理）

e-mail: mano@math.kyoto-u.ac.jp

1.　ヒルベルトモジュラー形式のなす環

$K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ とし、$\mathcal{O}$ を K の整数環とする。$\mathcal{O}$ の基本単数を $\varepsilon_0 = 1+\sqrt{2}$ として

$$\Gamma(2) = \left\{ \gamma \in SL(2, \mathcal{O}); \gamma \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bmod (2) \right\}$$

および

$$D_{\varepsilon_0} = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0^{-1} \end{pmatrix}$$

によって生成される $SL(2, \mathcal{O})$ の部分群を Γ とする（ $SL(2, \mathcal{O})/\Gamma \cong S_4$ である）。このときモジュラー形式のなす環の構造について次の事実が知られている。([2] を参照)

事実 1. 群 Γ に関するヒルベルトモジュラー形式のなす環は

$$\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, x_4, c]/(x_1 + x_2 + x_3 + x_4, c^2 - C)$$

に同型である。ここで $C = x_1x_2x_3x_4(x_1x_2 + x_3x_4)(x_1x_3 + x_2x_4)(x_1x_4 + x_2x_3)$ であり、x_i は重さ 1 で c は重さ 5 である。さらに、x_i は対称モジュラー形式である（つまり $x_i(z_1, z_2) = x_i(z_2, z_1)$）。

2.　ヒルベルトモジュラーオービフォールドと一意化方程式

上に現れた x_i $(i = 1, \ldots, 4)$ に対して

$$y_1 = \frac{1}{2}(x_4 - x_3),\ y_2 = \frac{1}{2}(x_2 - x_1),\ y_3 = \frac{1}{2}(x_4 + x_3)$$

とおくと $\mathbb{H}\times\mathbb{H}$ から $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ への正則写像が得られる。以下 $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ の非斉次座標を $x=y_1/y_3,\ y=y_2/y_3$ と取る。x_i が対称モジュラー形式であることから $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ 上の因子 $D=(1-x^2)(1-y^2)(1-x^2y^2)(2-x^2-y^2)$ で 2 重に分岐していることが分かる。そこで $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ とその上の因子 D および分岐指数 2 からなるデータをヒルベルトモジュラーオービフォールド M と呼ぶ。

この逆写像を記述する微分方程式が佐々木武-吉田正章 [3] により与えられた。それは $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ 上の線形偏微分方程式系として書き下され、ヒルベルトモジュラーオービフォールド M の一意化方程式と呼ばれる。

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=l\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+pu \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=m\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial u}{\partial x}+d\frac{\partial u}{\partial y}+qu. \end{cases} \tag{1}$$

という形であり、係数は

$$l=-\frac{2-y^2-x^2y^2}{xy(1-x^2)},\quad m=-\frac{2-x^2-x^2y^2}{xy(1-y^2)}$$

$$\begin{aligned} a=&-\frac{3}{2}\frac{\partial}{\partial x}\log\frac{(1-x^2y^2)(2-x^2-y^2)}{(1-x^2)} \\ &+\frac{l}{2}\frac{\partial}{\partial y}\log\frac{(1-x^2y^2)^2(2-x^2-y^2)^2}{(1-y^2)^2(2-y^2-x^2y^2)} \end{aligned}$$

$$b=\frac{l}{2}\frac{\partial}{\partial x}\log\frac{(2-y^2-x^2y^2)(1-x^2y^2)(2-x^2-y^2)}{(1-x^2)^2}$$

$$c=\frac{m}{2}\frac{\partial}{\partial y}\log\frac{(2-x^2-x^2y^2)(1-x^2y^2)(2-x^2-y^2)}{(1-y^2)^2}$$

$$\begin{aligned} d=&-\frac{3}{2}\frac{\partial}{\partial y}\log\frac{(1-x^2y^2)(2-x^2-y^2)}{(1-y^2)} \\ &+\frac{m}{2}\frac{\partial}{\partial x}\log\frac{(1-x^2y^2)^2(2-x^2-y^2)^2}{(1-x^2)^2(2-x^2-x^2y^2)} \end{aligned}$$

$$p=\frac{-2(x^2-y^2)}{(1-x^2)^2(1-y^2)},\quad q=\frac{-2(y^2-x^2)}{(1-x^2)(1-y^2)^2}$$

で与えられる。

3. ヒルベルトモジュラー形式を解に持つ偏微分方程式系

次のような 10 個の従属変数を導入する：$i=1,2$ に対し

$$\begin{aligned}
A_i(z_1,z_2) &= \frac{\partial}{\partial z_i}\log\{y_3(z_1,z_2)\} && (2)\\
X_i(z_1,z_2) &= \frac{\partial}{\partial z_i}\log(x-1) && (3)\\
Y_i(z_1,z_2) &= \frac{\partial}{\partial z_i}\log(x+1) && (4)\\
Z_i(z_1,z_2) &= \frac{\partial}{\partial z_i}\log(y-1) && (5)\\
W_i(z_1,z_2) &= \frac{\partial}{\partial z_i}\log(y+1) && (6)
\end{aligned}$$

このとき、前節で述べた一意化方程式を用いることにより次を得る。

定理 1. 従属変数の組 $\{A_i,X_i,Y_i,Z_i,W_i\}_{i=1,2}$ は次の非線形偏微分方程式 $(7-16)$ および代数方程式系 $(17-20)$ の解となる。（この系を *HMS* と略記する）

$$\frac{\partial A_i}{\partial z_i}=A_i^2-X_iY_i-Z_iW_i, \tag{7}$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial z_1}=\frac{\partial A_1}{\partial z_2}=-\frac{1}{3}X_1Y_2-\frac{1}{3}Z_1W_2-\frac{1}{6}S_1T_2-\frac{1}{6}S_2T_1, \tag{8}$$

$$\frac{\partial X_i}{\partial z_i}=2X_iA_i+\frac{3}{2}X_iY_i+\frac{1}{2}X_i^2+\frac{1}{2}Z_iW_i+\frac{1}{2}\frac{X_iZ_iW_i}{Y_i}, \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X_1}{\partial z_2}&=\frac{\partial X_2}{\partial z_1}\\
&=-\frac{1}{2}X_1X_2+\frac{1}{2}X_1Y_2+\frac{1}{4}X_1(Z_2+W_2)+\frac{1}{4}X_2(Z_1+W_1),
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\frac{\partial Y_i}{\partial z_i}=2Y_iA_i+\frac{3}{2}X_iY_i+\frac{1}{2}Y_i^2+\frac{1}{2}Z_iW_i+\frac{1}{2}\frac{Y_iZ_iW_i}{X_i}, \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Y_1}{\partial z_2}&=\frac{\partial Y_2}{\partial z_1}\\
&=-\frac{1}{2}Y_1Y_2+\frac{1}{2}X_1Y_2+\frac{1}{4}Y_1(Z_2+W_2)+\frac{1}{4}Y_2(Z_1+W_1),
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\frac{\partial Z_i}{\partial z_i} = 2Z_iA_i + \frac{3}{2}Z_iW_i + \frac{1}{2}Z_i^2 + \frac{1}{2}X_iY_i + \frac{1}{2}\frac{Z_iX_iY_i}{W_i}, \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial Z_1}{\partial z_2} &= \frac{\partial Z_2}{\partial z_1}\\ &= -\frac{1}{2}Z_1Z_2 + \frac{1}{2}Z_1W_2 + \frac{1}{4}Z_1(X_2+Y_2) + \frac{1}{4}Z_2(X_1+Y_1),\end{aligned} \tag{14}$$

$$\frac{\partial W_i}{\partial z_i} = 2W_iA_i + \frac{3}{2}W_iZ_i + \frac{1}{2}W_i^2 + \frac{1}{2}Y_iX_i + \frac{1}{2}\frac{W_iY_iX_i}{Z_i}, \tag{15}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial W_1}{\partial z_2} &= \frac{\partial W_2}{\partial z_1}\\ &= -\frac{1}{2}W_1W_2 + \frac{1}{2}Z_1W_2 + \frac{1}{4}W_1(X_2+Y_2) + \frac{1}{4}W_2(X_1+Y_1),\end{aligned} \tag{16}$$

$$X_1Y_2 - X_2Y_1 = 0, \tag{17}$$

$$Z_1W_2 - Z_2W_1 = 0, \tag{18}$$

$$3S_1(Z_2+W_2) + 3S_2(Z_1+W_1) = 4(2X_1Y_2 - Z_1W_2 + S_1T_2 + S_2T_1), \tag{19}$$

$$3T_1(X_2+Y_2) + 3T_2(X_1+Y_1) = 4(-X_1Y_2 + 2Z_1W_2 + S_1T_2 + S_2T_1), \tag{20}$$

ただし $S_i = 2X_iY_i/(X_i+Y_i)$, $T_i = 2Z_iW_i/(Z_i+W_i)$ とおいた。

注意 1. 上の 4 つの代数関係式は独立である。よって HMS は本質的に 6 階の微分方程式系である。

4. 初期値問題と特殊解

HMS のほとんどすべての解（一般解）はヒルベルトモジュラー形式を用いて記述することが出来る。そのために HMS が持つ次の性質を用いる。

命題 1. *HMS* の解 $\{A_i, X_i, Y_i, Z_i, W_i\}_{i=1,2}$ が与えられたとき

$$A_1^T(z_1, z_2) = A_2(z_2, z_1), \tag{21}$$

$$A_2^T(z_1, z_2) = A_1(z_2, z_1) \tag{22}$$

等で定義される関数の組 $\{A_i^T, X_i^T, Y_i^T, Z_i^T, W_i^T\}_{i=1,2}$ も HMS の解となる。
さらに、$\gamma = \left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\right) \in SL(2,\mathbb{C}) \times SL(2,\mathbb{C})$ に対して

$$A_i^\gamma(z_1, z_2) = \frac{1}{(c_i z_i + d_i)^2} A_i\left(\frac{a_1 z_1 + b_1}{c_1 z_1 + d_1}, \frac{a_2 z_2 + b_2}{c_2 z_2 + d_2}\right) - \frac{c_i}{c_i z_i + d_i}, \tag{23}$$

$$G_i^\gamma(z_1, z_2) = \frac{1}{(c_i z_i + d_i)^2} G_i\left(\frac{a_1 z_1 + b_1}{c_1 z_1 + d_1}, \frac{a_2 z_2 + b_2}{c_2 z_2 + d_2}\right) \tag{24}$$

(ただし $G = X, Y, Z, W$) で定義される関数の組 $\{A_i^\gamma, X_i^\gamma, Y_i^\gamma, Z_i^\gamma, W_i^\gamma\}_{i=1,2}$ も HMS の解となる。

3 節で与えられた解と命題 1 を用いることによって、一般的な初期データに対して HMS の初期値問題を解くことが出来る。これは HMS の 6 個のパラメーターを含む一般解を与える。

以下では上の一般解に含まれない HMS の特殊解について述べる。まず、変数を対角成分に制限し $z_1 = z_2 = t$ とし、$A_1(t,t) = A_2(t,t)$, $X_1(t,t) = X_2(t,t) = 0$, $Y_1(t,t) = Y_2(t,t) = 0$, $Z_1(t,t) = Z_2(t,t)$, $W_1(t,t) = W_2(t,t)$ という条件を課すことにより HMS は t を独立変数とする常微分方程式系に帰着するが、これは Halphen 系と呼ばれるもので楕円モジュラー関数を用いて解くことが出来る。

次に HMS において $X_i(z_1, z_2) = Y_i(z_1, z_2)$, $Z_i(z_1, z_2) = W_i(z_1, z_2)$ という条件を課す。この条件のもとで HMS の完全積分可能条件は保たれて、$P_i = X_i + A_i$, $Q_i = Y_i + A_i$ とおくと HMS は次のような偏微分方程式系に帰着する。

$$\frac{\partial A_i}{\partial z_i} = -A_i^2 + 2(P_i + Q_i)A_i - P_i^2 - Q_i^2 \tag{25}$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial z_1} = \frac{\partial A_1}{\partial z_2} = -(P_1 - A_1)(P_2 - A_2) \tag{26}$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial z_i} = P_i^2 \tag{27}$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial z_1} = \frac{\partial P_1}{\partial z_2} = 0 \tag{28}$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial z_i} = Q_i^2 \tag{29}$$

$$\frac{\partial Q_2}{\partial z_1} = \frac{\partial Q_1}{\partial z_2} = 0, \tag{30}$$

また代数関係式より $P_i = Q_i$ $(i = 1, 2)$ か $P_1 = Q_1 = A_1$ のどちらかを満たさなければならない。この微分方程式系は直接に解くことが出来て、次の 6 通りの解から命題 1 を用いて得られるもので尽くされる。

1. $A_i = P_i = Q_i = 0$ $(i = 1, 2)$
2. $A_1 = 0, A_2 = \dfrac{1}{z_2}, P_i = Q_i = 0$
3. $A_i = \dfrac{1}{z_1 + z_2}, P_i = Q_i = 0$
4. $A_1 = 0, A_2 = \dfrac{\omega}{z_2}, P_1 = Q_1 = 0, P_2 = -\dfrac{1}{z_2}, Q_2 = 0$ $(\omega = e^{2\pi i/3})$
5. $A_1 = 0, A_2 = \dfrac{\omega^2}{z_2}, P_1 = Q_1 = 0, P_2 = -\dfrac{1}{z_2}, Q_2 = 0$
6. $A_1 = 0, A_2 = \dfrac{\omega + \omega^2 z_2^{\omega^2 - \omega}}{z_2(1 + z_2^{\omega^2 - \omega})}, P_1 = Q_1 = 0, P_2 = -\dfrac{1}{z_2}, Q_2 = 0$

参考文献

[1] 佐藤幹夫「代数解析学と私」"第 2 部, 第 3 部" 数理解析研究所講究録 **810** (1992), 198-217.

[2] F. Hirzebruch, *The ring of Hilbert modular forms for real quadratic fields of small discriminant,* Lectures Notes in Math. **627** (1977), 287-323.

[3] T. Sasaki and M. Yoshida, *Linear differential equations in two variables of rank four II. The uniformaizing equation of a Hilbert modular orbifold,* Math. Ann. **281** (1988), 95-111.

[4] T. Mano, *Differential equations for Hilbert modular forms of* $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ J. Math. Kyoto Univ. **44-3** (2004), 457-477.