Basis problem for Hilbert-Siegel modular forms (after J. Kuang)

上智大学理工学部　森山 知則
(Tomonori Moriyama)

0 序

本稿は J. Kuang の論文 [K] の解説である。表題の Hilbert-Siegel modular form とは，総実代数体 F 上の斜交群 $\mathrm{Sp}(n)$ の上の正則保型形式のことで，[K] の目的は Hilbert-Siegel modular form のなす線型空間が，適当な条件下で theta 級数で張られることの証明である (「basis problem」に対する一つの解答)。証明の方針は，Siegel-Weil の公式と Eisenstein 級数の Garrett's pull-back formula を組み合わせるというもので，すでに Siegel 保型形式のとき (i.e. $F = \mathbf{Q}$ のとき) に S. Böcherer が用いたものである。従って，アイデアそのものは，Böcherer の論文 [Bö] を見て頂いたほうがよいであろう。本稿では，むしろ，保型形式論で頻繁に出てくる事柄 — theta 級数, Eisenstein 級数，保型的 L 関数の積分表示，etc. — の解説に力点を置いてこの論文 [K] の紹介をしたい。なお，楕円保型形式や Hilbert 保型形式の場合の先行結果は，原論文 [K] に引用してある Eichler や Hijikata-Pizer-Shemanske etc. の論文を見て頂きたい。

記号は，なるべく，原論文にあるものか原論文との対応がすぐ分かるものを用いるようにした。

1 Hilbert-Siegel 保型形式

(1.1) Hilbert-Siegel 保型形式　F を d 次の総実代数体とし，O_F をその整数環とする。F の素点 v に対して, v に関する F の完備化を F_v と書く。F の実素点 v_i $(1 \leq i \leq d)$ に関する埋め込みを $F \ni x \mapsto x^{(i)} \in F_{v_i} \cong \mathbf{R}$ で表す。また，　有限素点 $v < \infty$ に対して, F_v の整数環を $\mathfrak{O}_v$, 素イデアルを $\mathfrak{P}_v$ と記し, $q_v := \sharp(\mathfrak{O}_v/\mathfrak{P}_v)$ とおく。また, $\widehat{O_F} := \prod_{v<\infty} \mathfrak{O}_v$ とする。

次数 n の斜交群 $G_n = \mathrm{Sp}(n)$ を

$$\mathrm{Sp}(n) := \{g \in \mathrm{GL}(2n) \big| gJ\,{}^tg = J\}, \quad J = J_n := \begin{pmatrix} 0_n & 1_n \\ -1_n & 0_n \end{pmatrix}$$

で定義する (F 上の代数群と見る)。次数 n の Siegel 上半空間は

$$\mathbf{H}_n := \{z \in M_n(\mathbf{C}) |\, {}^tz = z, \mathrm{Im}(z) > 0\}$$

で定義される。すると, $G_{n,\infty} := \prod_{v:\text{実素点}} G_{n,F_v} \cong \mathrm{Sp}(n,\mathbf{R})^d$ は，次数 n の Siegel 上半空間の $d=[F:\mathbf{Q}]$ 個の直積 $\mathbf{H}_n^d$ に

$$g\langle z\rangle = ((a_iz_i+b_i)(c_iz+d_i)^{-1})_{1\le i\le d},$$
$$g=(g_i)_{1\le i\le d} = (\begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix})_{1\le i\le d}, \quad z=(z_i)_{1\le i\le d}$$

で作用する。自然数 $k\geq 0$ に対して，$\mathbf{H}_n^d$ 上の正則関数の空間への $G_{n,\infty}$ の作用を

$$f|_k g(z) := \prod_{i=1}^d \det(c_iz_i+d_i)^{-k} f(g\langle z\rangle)$$

で定める。$\mathrm{Sp}(n,O_F)$ を埋め込み

$$\mathrm{Sp}(n,O_F) \ni \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (\begin{pmatrix} a^{(i)} & b^{(i)} \\ c^{(i)} & d^{(i)} \end{pmatrix})_{1\le i\le d} \in G_{n,\infty}$$

を通じて，$G_{n,\infty}$ の部分群と思う。不連続群 $\mathrm{Sp}(n,O_F)$ に関する，重さ k の Hilbert-Siegel 保型形式を

$$M_k(\mathrm{Sp}(n,O_F)) := \{f:\mathbf{H}_n^d\to\mathbf{C}|\ \text{正則関数},\ f|_k\gamma(z)=f(z),\quad \forall\gamma\in\mathrm{Sp}(n,O_F)\}$$

で定義する。但し，$F=\mathbf{Q}$ かつ $n=1$ のとき (i.e. 楕円保型形式) のときは，尖点での正則性を条件として追加する (この注意は，下の $M_k(\Gamma_0(\mathfrak{f}),\rho)$ に対しても有効である)。さらに，イデアル $\mathfrak{f}\subset O_F$ に対して合同部分群 $\Gamma_0(\mathfrak{f})$ を

$$\Gamma_0(\mathfrak{f}) \equiv \Gamma_0^n(\mathfrak{f}) := \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(n,O_F) | c\equiv 0 \pmod{\mathfrak{f}}\right\}$$

で定義する。このとき, level $\mathfrak{f}$ で, 指標 $\rho:(O_F/\mathfrak{f})^\times\to\mathbf{C}^\times$ を持つ, 重さ k の Hilbert-Siegel 保型形式の空間は

$$M_k(\Gamma_0(\mathfrak{f}),\rho) := \left\{f:\mathbf{H}_n^d\to\mathbf{C}|\ \text{正則関数},\ f|_k\gamma(z)=\rho(\det(a))f(z),\quad \forall\gamma=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\Gamma_0(\mathfrak{f})\right\}$$

で定義される。$f\in M_k(\mathrm{Sp}(n,O_F))\cup M_k(\Gamma_0(\mathfrak{f}),\rho)$ は，任意の $\gamma\in\mathrm{Sp}(n,O_F)$ に対して，

$$f|_\gamma(z) = \sum_{\xi\in\mathrm{Sym}^n(F)} c(\xi;\gamma)\exp(2\pi\sqrt{-1}\sum_{i=1}^d \mathrm{tr}(\xi^{(i)}z_i)), \qquad c(\xi;\gamma)\in\mathbf{C}$$

なるフーリエ展開を持つ。ここで，条件

ξ が totally positive definite でなければ，$c(\xi;\gamma)=0$,

が成り立つとき，f は尖点形式と呼ばれる。 $M_k(\mathrm{Sp}(n,O_F))$ (resp. $M_k(\Gamma_0(\mathfrak{f}),\rho)$) のうち尖点形式のなす部分空間を $C_k(\mathrm{Sp}(n,O_F))$ (resp. $C_k(\Gamma_0(\mathfrak{f}),\rho)$) で表す。

(1.2) アデール群上の保型形式 話を見通しよく進めるため，Hilbert-Siegel 保型形式を次のようにアデール群 $\mathrm{Sp}(n)_{\mathbf{A}}$ 上の関数として考える。まず，$z_0 := (\sqrt{-1}1_n, \cdots, \sqrt{-1}1_n) \in \mathbf{H}_n^d$，と置く。$z_0$ の $G_{n,\infty}$ における固定化部分群は

$$K_{n,\infty} = \left\{ \left(\begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{pmatrix} \right)_{1 \le i \le d} | a_i + \sqrt{-1} b_i \in U(n) \right\} \cong U(n)^d$$

であり，$G_{n,\infty}$ の極大コンパクト部分群である。$f \in M_k(\mathrm{Sp}(n, O_F))$ に対して，関数 $\widetilde{f} : G_{n,\infty} \to \mathbf{C}$ を

$$\widetilde{f}(g) := f|_k g(z_0) = \prod_{i=1}^{d} \det(c_i \sqrt{-1} + d_i)^{-k} f(g\langle z_0 \rangle)$$

で定義する。これは，

$$\widetilde{f}(\gamma g u_\infty) = \prod_{i=1}^{d} \det(a_i + \sqrt{-1} b_i)^k \tilde{f}(g),$$
$$\forall \gamma \in \mathrm{Sp}(n, O_F),\ \forall g_\infty \in G_{n,\infty},\ \forall u_\infty = \left(\begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{pmatrix} \right)_{1 \le i \le d} \in K_{n,\infty}$$

を満足する。F のアデール環を $\mathbf{A} = \mathbf{A}_F$ とし，$\mathbf{A} = \mathbf{A}_\infty \times \mathbf{A}_0$ を無限成分 $\mathbf{A}_\infty := \prod_{i=1}^d F_{v_i}$ および有限成分 $\mathbf{A}_0 := \prod'_{v<\infty} F_v$ への分解とする。アデール群 $G_{n,\mathbf{A}} = \mathrm{Sp}(n)_{\mathbf{A}}$ は, 任意の開コンパクト部分群 $K_{fin} \subset G_{n,\mathbf{A}_0}$ に対して，

$$G_{n,\mathbf{A}} = G_{n,F} G_{n,\infty} K_{fin}$$

なる分解を持つ (強近似定理からの帰結)。したがって，特に K_{fin} として $\mathbf{K}_{n,0} \equiv \mathbf{K}_0 := \prod_{v<\infty} \mathrm{Sp}(n)_{\mathfrak{O}_v}$ をとれば $\mathbf{K}_0 \cap G_{n,F} = \mathrm{Sp}(n, O_F)$ なので，全単射

$$\mathrm{Sp}(n, O_F) \backslash G_{n,\infty} \cong G_{n,F} \backslash G_{n,\mathbf{A}} / \mathbf{K}_0$$

を得る。この全単射を通じて $\tilde{f}$ をアデール群 $G_{n,\mathbf{A}}$ 上の関数とみなすことができる。$M_k(\Gamma_0(\mathfrak{f}), \rho)$ についても，K_{fin} を小さく取りなおせば，同様にして $G_{n,\mathbf{A}}$ 上の関数とみなせる。

より一般に，$G_{n,F} \backslash G_{n,\mathbf{A}}$ 上の smooth な関数 $\phi : G_{n,F} \backslash G_{n,\mathbf{A}} \to \mathbf{C}$ が, (i) 右 $K_{n,\infty} \times \mathbf{K}_0$-有限; (ii) $Z(\mathrm{Lie}(G_{n,\infty}))$-有限；(iii) 緩増大 の 3 条件を満たすとき，$\phi(g)$ を $G_{n,\mathbf{A}}$ 上の保型形式といい，その全体を $\mathcal{A}(G_{n,F} \backslash G_{n,\mathbf{A}})$ で表す ((i)-(iii) にある用語の説明は略す。[Bo-Ja], [SS5] 等を参照) 。さらに，$\phi \in \mathcal{A}(G_{n,F} \backslash G_{n,\mathbf{A}})$ は，そのすべての "constant term"が消えるとき，尖点形式といい，その全体を $\mathcal{A}_{cusp}(G_{n,F} \backslash G_{n,\mathbf{A}})$ で表す。正則保型形式の空間 $M_k(\mathrm{Sp}(n, O_F))$ や $M_k(\Gamma_0(\mathfrak{f}), \rho)$ は上の対応 $f \mapsto \widetilde{f}$ によって $\mathcal{A}(G_{n,\mathbf{Q}} \backslash G_{n,\mathbf{A}})$ の部分空間と思える。また，

$$C_k(\mathrm{Sp}(n, O_F)) = M_k(\mathrm{Sp}(n, O_F)) \cap \mathcal{A}_{cusp}(G_{n,F} \backslash G_{n,\mathbf{A}}),$$
$$C_k(\Gamma_0(\mathfrak{f}), \rho) = M_k(\Gamma_0(\mathfrak{f}), \rho) \cap \mathcal{A}_{cusp}(G_{n,F} \backslash G_{n,\mathbf{A}}).$$

である。混乱の恐れがないときには, $\tilde{f}(g)$ $(g \in G_{n,\mathbf{A}})$ を単に $f(g)$ と記す。$M_k(\mathrm{Sp}(n, O_F))$ は，$\mathcal{A}(G_{n,F}\backslash G_{n,\mathbf{A}})$ のなかで,

- $\phi(g u_{fin} u_\infty) = \prod_{i=1}^{d} \det(a_i + \sqrt{-1}b_i)^k \phi(g),$

$$\forall g \in G_{n,\mathbf{A}}, \forall u_{fin} \in \mathbf{K}_{n,0}, \forall u_\infty = (\begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{pmatrix})_{1\le i\le d} \in K_{n,\infty};$$

- $\phi(g; (X^-_{A_i})_{1\le i\le d}) = 0, \quad \forall X^-_{A_i} = \begin{pmatrix} A_i & -\sqrt{-1}A_i \\ -\sqrt{-1}A_i & -A_i \end{pmatrix} (A_i \in \mathrm{Sym}(n)_{\mathbf{R}}),$

なるものとして特徴付けられる。ここで, 2つ目の式は $(X^-_{A_i})_{1\le i\le d} \in \mathrm{Lie}(G_{n,\infty})$ を左不変微分作用素とみなして $\phi(g)$ に作用しているものとする。最後に，$\phi_1(g), \phi_2(g) \in \mathcal{A}(G_{n,F}\backslash G_{n,\mathbf{A}})$ の間の Petersson 内積を,

$$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle = \int_{G_{n,F}\backslash G_{n,\mathbf{A}}} \phi_1(g)\overline{\phi_2(g)}dg$$

で (積分が絶対収束するときに) 定める。

$\boxed{2}$ Siegel-Weil の公式

この節では，保型形式の２つの主要な構成法である theta 級数と Eisenstein 級数を導入し，これらの間の関係を与える Siegel-Weil の公式について説明する。

記号 $\tau : F\backslash\mathbf{A} \to \mathbf{C}^{(1)}$ を $\tau(x) = \mathbf{e}(\mathrm{tr}(x))$ なる指標とする。ただし，$\mathbf{e} : \mathbf{Q}\backslash\mathbf{A}_{\mathbf{Q}} \to \mathbf{C}^{(1)}$ を $\mathbf{e}(t_\infty) = \exp(2\pi\sqrt{-1}t_\infty)$ で特徴付けられる指標とし，$\mathrm{tr} : \mathbf{A} = \mathbf{A}_{\mathbf{Q}} \otimes_{\mathbf{Q}} F \to \mathbf{A}_{\mathbf{Q}}$ をトレース写像とする。

(2.1) Weil 表現 $Q \in \mathrm{Sym}(m)_F$ を m 次対称行列とする。$V := M_{m,1}(F)$ に, $(v_1, v_2)_Q = {}^t v_1 Q v_2$, $v_i \in V$ によって内積を入れる。一方, $W_1 := M_{1,2n}(F)$ に, $\mathrm{Sp}(n)_F$ を右掛算で作用させる。$\mathrm{Sp}(n)_F$ は，W_1 上の symplectic form $\langle w_1, w_1' \rangle := w_1 J_n {}^t w_1'$ $(w_1, w_1' \in W_1)$ を保つ。$W = V \otimes W_1 \cong M_{m,n}$ は，symplectic form

$$\langle w_1 \otimes v, w_1' \otimes v' \rangle := \langle w_1, w_1' \rangle (v, v')_Q, \quad v, v' \in V, \quad w_1, w_1' \in W_1$$

を持つ。W に付随する symplectic 群を $\mathrm{Sp}(mn) = \mathrm{Sp}(W)$ であらわす。

$$O(Q) \ni h \mapsto [W \ni v \otimes w_1 \mapsto h^{-1} \cdot v \otimes w_1 \in W] \in \mathrm{Sp}(mn)$$
$$\mathrm{Sp}(n) \ni g \mapsto [W \ni v \otimes w_1 \mapsto v \otimes w_1 \cdot g \in W] \in \mathrm{Sp}(mn)$$

でもって, 直交群 $O(Q)$ および symplectic 群 $\mathrm{Sp}(n)$ を, 大きな symplectic 群 $\mathrm{Sp}(mn)$ の部分群と見る。$O(Q)$ と $\mathrm{Sp}(n)$ は symplectic 群 $\mathrm{Sp}(mn)$ の中で互いの commutant である。

$M_{m,n}(\mathbf{A})$ 上の Schwartz-Bruhat 関数の空間を $\mathcal{S}(M_{m,n}(\mathbf{A}))$ で表す。このとき, Weil 表現 (oscillator 表現とも言う) と言われる $\mathrm{Sp}(nm)_{\mathbf{A}}$ の射影 (ユニタリ) 表現

$$\mathbf{W} : \mathrm{Sp}(mn)_{\mathbf{A}} \to \mathrm{Aut}(\mathcal{S}(M_{m,n}(\mathbf{A})))/\mathbf{C}^{(1)}$$

が存在する。さらに，この射影表現は，m が偶数のとき，$\mathrm{Sp}(nm)_{\mathbf{A}}$ の部分群 $O(Q)_{\mathbf{A}} \cdot \mathrm{Sp}(n)_{\mathbf{A}}$ の上で線型表現にすることができる ([Sai])。この線型表現（これも，同じ記号 $\mathbf{W}$ で表すことにする) は, $\mathrm{Sp}(n)_{\mathbf{A}}$ 上では次の (i)-(iii) で, $O(Q)_{\mathbf{A}}$ 上では (iv) で与えられる:

(i) $[\mathbf{W}(\begin{pmatrix} a & \\ & {}^t a^{-1} \end{pmatrix})\varphi](x) = \langle \det a, (-1)^{m/2} \det Q \rangle |\det(a)|^{m/2} \varphi(xa), \quad a \in GL(n)_{\mathbf{A}};$

(ii) $[\mathbf{W}(\begin{pmatrix} 1_n & b \\ & 1_n \end{pmatrix})\varphi](x) = \tau(\frac{1}{2}\mathrm{tr}({}^t xQxb))\varphi(x), \quad b = {}^t b \in \mathrm{Sym}(n)_{\mathbf{A}};$

(iii) $[\mathbf{W}(\begin{pmatrix} & 1_n \\ -1_n & \end{pmatrix})\varphi](x) = \int_{M_{m,n}(\mathbf{A})} \phi(y)\tau(\mathrm{tr}({}^t xQy))dy,$

(iv) $[\mathbf{W}(h)\varphi](x) = \varphi(h^{-1}x), \quad \forall h \in O(Q)_{\mathbf{A}}.$

ただし，(i) における $\langle , \rangle$ は F の Hilbert symbol である。ここで，$\mathrm{Sp}(n)_{\mathbf{A}}$ が, $\begin{pmatrix} a & \\ & {}^t a^{-1} \end{pmatrix}$ ($a \in \mathrm{GL}(n)_{\mathbf{A}}$), $\begin{pmatrix} 1_n & b \\ & 1_n \end{pmatrix}$ ($b \in \mathrm{Sym}(n)_{\mathbf{A}}$) 及び, $\begin{pmatrix} & -1_n \\ 1_n & \end{pmatrix}$ で生成されることから, (i)-(iii) で $\mathrm{Sp}(n)_{\mathbf{A}}$ の作用が決定されることに注意する。また，$\mathbf{W}(gh) = \mathbf{W}(hg)$ ($h \in O(Q)_{\mathbf{A}}, g \in \mathrm{Sp}(n)_{\mathbf{A}}$) であることはすぐ分かる。なお，元の射影表現は，m の偶奇によらず，$\mathrm{Sp}(nm)_{\mathbf{A}}$ の二重被覆群の上で線型化される。このことは大切だが，以下では直接には用いないので詳しい説明は略す (例えば, [Rao] を参照, [SS4],[SS8] にも解説がある) 。

(2.2) theta 積分 以下，対称行列 Q は, サイズ m は偶数で, すべての実素点で正定値であると仮定する。任意の Schwartz-Bruhat 関数 $\varphi \in \mathcal{S}(M_{m,n}(\mathbf{A}))$ に対して，theta 積分を

$$\vartheta_\varphi(g) := \int_{O(Q)_F \backslash O(Q)_{\mathbf{A}}} \sum_{\xi \in M_{m,n}(F)} [\mathbf{W}(gh)\varphi](\xi)dh$$

で定める。Q に対する上の仮定から，$O(Q)_F \backslash O(Q)_{\mathbf{A}}$ はコンパクトであるのでこの積分は収束する。$\vartheta_\varphi(g)$ は，$G_{n,\mathbf{A}}$ 上の保型形式であることも示せる。したがって,

$$\mathcal{S}(M_{m,n}(\mathbf{A})) \ni \varphi \mapsto \vartheta_\varphi(g) \in \mathcal{A}(G_{n,\mathbf{Q}} \backslash G_{n,\mathbf{A}})$$

なる $G_{n,\mathbf{A}}$-intertwiner (正確には，$(\mathrm{Lie}(G_{n,\infty}), K_{n,\infty}) \times G_{n,\mathbf{A}_0}$-intertwiner) を得る。theta 積分 $\vartheta_\varphi(g)$ を theta 級数と結びつけるために，φ は，$\varphi(x) = \prod_v \varphi_v(x_v)$ と decomposable で，各実素点 v_i においては,

$$\varphi(x_{v_i}) = \exp(-\pi \mathrm{tr}({}^t x_{v_i} Q^{(i)} x_{v_i}))$$

であるとする。$\varphi \in \mathcal{S}(M_{m,n}(\mathbf{A}))$ にたいして,

$$\mathbf{K}_{Q,\varphi} := \{h \in O(Q)_{\mathbf{A}} | \varphi(h^{-1}x) = \varphi(x),\ \forall x \in M_{mn}(\mathbf{A})\}$$

と置くと, $O(Q)_{\mathbf{A}_\infty} \subset \mathbf{K}_{Q,\varphi}$ である。このとき，theta 積分 $\vartheta_\varphi(g)$ は適当な level で重さ $m/2$ の正則保型形式であることを言いたい。これは，例えば，次のようにして分かる。まず,

$$O(Q)_{\mathbf{A}} = \bigsqcup_{j=1}^{s} O(Q)_F h_j \mathbf{K}_{Q,\varphi}$$

の代表元 h_j を $h_j \in O(Q)_{\mathbf{A}_0}$ と取っておく (剰余類の個数は有限個である)。すると，上述の theta 積分は,

$$\vartheta_\varphi(g) := \sum_{j=1}^{s} c_j \sum_{\xi \in M_{m,n}(F)} [\mathbf{W}(g)\varphi](h_j^{-1}\xi)$$

$$\text{但し} \quad c_j := \mathrm{vol}(O(Q)_F \backslash O(Q)_F h_j \mathbf{K}_{Q,\varphi})$$

となる。いま,

$$1 = \sum_{j=1}^{s} c_j = \sum_{j=1}^{s} \frac{1}{\sharp\big(\mathbf{K}_{Q,\varphi} \cap h_j^{-1} O(Q)_F h_j\big)} \cdot \mathrm{vol}(\mathbf{K}_{Q,\varphi})$$

なので,

$$c_j = \frac{1}{\sharp\big(\mathbf{K}_{Q,\varphi} \cap h_j^{-1} O(Q)_F h_j\big)} \Big/ \sum_{l=1}^{s} \frac{1}{\sharp\big(\mathbf{K}_{Q,\varphi} \cap h_l^{-1} O(Q)_F h_l\big)} \in \mathbf{Q}_{>0}$$

となる。Siegel 上半空間の直積の点 $z = (z_i) \in \mathbf{H}^d$ に対して,

$$g_z := \begin{pmatrix} 1_n & x \\ 0_n & 1_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^{1/2} & 0_n \\ 0_n & y^{-1/2} \end{pmatrix} = (\begin{pmatrix} 1_n & x_i \\ 0_n & 1_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_i^{1/2} & 0_n \\ 0_n & y_i^{-1/2} \end{pmatrix}) \in G_{n,\infty}$$

とおく。ここで，$y_i^{1/2}$ は $(y_i^{1/2})^2 = y_i$ で特徴付けられる正定値 n 次対称行列である。各 $1 \le j \le s$ に対して，$\sum_{\xi \in M_{m,n}(F)} [\mathbf{W}(g)\varphi](h_j^{-1}\xi)$ に (1.2) 節のやり方で対応する $\mathbf{H}_n^d$ 上の関数は,

$$\begin{aligned}
&\prod_{i=1}^{d} \det(y_i^{-1/2})^{m/2} \times \sum_{\xi \in M_{m,n}(F)} [\mathbf{W}(g_z h_j)\varphi](\xi) \\
=&\prod_{i=1}^{d} \det(y^{-1/2})^{m/2} \times \sum_{\xi \in M_{m,n}(F)} \tau(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d} \mathrm{tr}(\,{}^t\xi^{(i)} Q^{(i)} \xi^{(i)} x_i))[\mathbf{W}(\begin{pmatrix} y^{1/2} & 0_n \\ 0_n & y^{-1/2} \end{pmatrix} h_j)\varphi](\xi) \\
=& \sum_{\xi \in M_{m,n}(F)} \varphi(h_j^{-1}\xi y^{1/2}) \tau(\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\,{}^t\xi Q \xi x)) \\
=& \sum_{\xi \in M_{m,n}(F)} \varphi_{fin}(h_j^{-1}\xi_{fin}) \exp(\pi\sqrt{-1}\sum_{i=1}^{d} \mathrm{tr}(\,{}^t\xi^{(i)} Q^{(i)} \xi^{(i)} z_i)).
\end{aligned}$$

従って，　たとえば全ての有限素点 v で φ_v を $M_{m,n}(\mathfrak{O}_v)$ の定義関数に取れば, これは,

$$\theta(z,Q,L_j)=\sum_{\xi\in L_j}\exp(\pi\sqrt{-1}\sum_{i=1}^{d}\mathrm{tr}({}^t\xi^{(i)}Q^{(i)}\xi^{(i)}z_i)),$$
$$L_j\equiv h_j\cdot M_{m,n}(O_F):=\prod_{v<\infty}h_{j,v}M_{m,n}(\mathfrak{O}_v)\cap M_{m,n}(F)$$

なる theta 級数に等しい。

注意　theta 積分 $\vartheta_\varphi(g)$ は，$\Theta(gh):=\sum_{\xi\in M_{m,n}(F)}[\mathbf{W}(gh)\varphi](\xi)$ と $O(V)_{\mathbf{A}}$ 上の定数関数の積を $O(V)_F\backslash O(V)_{\mathbf{A}}$ 上で積分したものと見ることができる。より一般に, $O(V)_{\mathbf{A}}$ 上の保型形式と $\Theta(gh)$ との積の積分を考えることにより，$\mathrm{Sp}(n)_{\mathbf{A}}$ 上の保型形式が構成される。保型形式のこのような構成法を，theta lifting という。

(2.3) Eisenstein 級数 $G_{n,\mathbf{A}}$ 上の Eisenstein 級数を定義しよう。まず，G_n の放物部分群 $P_{n,r}$ $(0\le r<n)$ を，$r=0$ のときは,

$$P_{n,0}:=\left\{\begin{pmatrix}a & ab\\ 0_n & {}^ta^{-1}\end{pmatrix}\,|a\in\mathrm{GL}(n),b\in\mathrm{Sym}(n)\right\};$$

で，$0<r<n$ に対しては,

$$P_{n,r}:=\left\{\left(\begin{array}{cc|cc}A_1 & & & \\ & a & & b\\ \hline & & {}^tA_1^{-1} & \\ & c & & d\end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{cc|cc}1_{n-r} & * & * & *\\ & 1_r & * & \\ \hline & & 1_{n-r} & \\ & & * & 1_r\end{array}\right)|A_1\in\mathrm{GL}(n-r),\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in G_r\right\}$$

で定義する。放物部分群 $P_{n,r}$ は，しばしば，$r=0$ のとき Siegel 型，$0<r<n$ のとき Klingen 型 (ないしは Jacobi 型) と呼ばれる。各 $s\in\mathbf{C}$ について，Siegel 型放物部分群 $P_{n,0,\mathbf{A}}$ からの誘導表現 $I_{P_{n,0,\mathbf{A}}}^{G_{n,\mathbf{A}}}(s)$ が

$$I_{P_{n,0,\mathbf{A}}}^{G_{n,\mathbf{A}}}(s):=\{\epsilon:G_{n,\mathbf{A}}\to\mathbf{C}|\text{smooth },\epsilon(\begin{pmatrix}a & *\\ 0_n & {}^ta^{-1}\end{pmatrix}g)=|\det(a)|^s\epsilon(g),$$
$$\forall\begin{pmatrix}a & *\\ 0_n & {}^ta^{-1}\end{pmatrix}\in P_{n,0,\mathbf{A}}\},$$
$$[g_1\cdot\epsilon](g):=\epsilon(gg_1),\qquad g,g_1\in G_{n,\mathbf{A}}$$

で定義される (正確には，右 $K_{n,\infty}$-有限性を課す。以後この種の注意は繰り返さない)。この表現 $I_{P_{n,0,\mathbf{A}}}^{G_{n,\mathbf{A}}}(s)$ を <u>退化主系列表現</u> と呼ぶ。$s=m/2$ のとき, 退化主系列表現の元 $\epsilon\in I_{P_{n,0,\mathbf{A}}}^{G_{n,\mathbf{A}}}(m/2)$ に対して，Eisenstein 級数 $E(g;\epsilon)$ を

$$E(g;\epsilon)=\sum_{\gamma\in P_{n,0,F}\backslash G_{n,F}}\epsilon(\gamma g),\qquad g\in G_{n,\mathbf{A}},$$

で定義する ([SS13, Yamauchi, Kon-no] も参照)。これは，$m > 2n+2$ で絶対収束し，$G_{n,\mathbf{A}}$ 上の保型形式を定める。この意味で退化主系列表現の空間 $I_{P_{n,0,\mathbf{A}}}^{G_{n,\mathbf{A}}}(m/2)$ を Eisenstein kernel の空間と呼ぶこともある。

さて，$\underline{m \equiv 0 \pmod 4), \det(Q) \in (F^\times)^2}$ を仮定する。$\varphi \in \mathcal{S}(M_{m,n}(\mathbf{A}))$ に対して，$G_{n,\mathbf{A}}$ 上の関数 $\epsilon_\varphi(g)$ を

$$\epsilon_\varphi(g) := [\mathbf{W}(g)\varphi](0_{m,n}), \qquad g \in G_{n,\mathbf{A}}$$

で定めると，これは退化主系列表現 $I_{P_{n,0,\mathbf{A}}}^{G_{n,\mathbf{A}}}(m/2)$ の空間に属すことが容易に確かめられる。従って，$E_{n,\varphi}(g) \equiv E_\varphi(g) = E(g;\epsilon_\varphi)$ と書くことにすると，

$$\mathcal{S}(M_{m,n}(\mathbf{A})) \ni \varphi \mapsto E_\varphi(g) \in \mathcal{A}(G_{n,F}\backslash G_{n,\mathbf{A}})$$

は $G_{n,\mathbf{A}}$-intertwiner である。

<u>例</u> $F = \mathbf{Q}$ とし, $I_{P_{n,0,\mathbf{A}}}^{G_{n,\mathbf{A}}}(m/2)$ の元として,

$$\epsilon(u_{fin}u_\infty) = \det(a+\sqrt{-1}b)^{m/2}, \quad \forall u_{fin} \in \mathbf{K}_{n,0}, \quad \forall u_\infty = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in K_{n,\infty}$$

で特徴づけられるものをとる。$z = x+\sqrt{-1}y \in \mathbf{H}_n$ に対して,

$$\begin{aligned} E(\begin{pmatrix} y^{1/2} & xy^{-1/2} \\ 0_n & y^{-1/2} \end{pmatrix}, \epsilon) &= \sum_{\gamma \in P_{n,0,\mathbf{Q}}\backslash G_{n,\mathbf{Q}}} \epsilon(\gamma \begin{pmatrix} y^{1/2} & xy^{-1/2} \\ 0_n & y^{-1/2} \end{pmatrix}) \\ &= \sum_{\gamma \in P_{n,0,\mathbf{Z}}\backslash G_{n,\mathbf{Z}}} \epsilon(\gamma \begin{pmatrix} y^{1/2} & xy^{-1/2} \\ 0_n & y^{-1/2} \end{pmatrix}) \end{aligned}$$

を考える。$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G_{n,0,\mathbf{Z}}$ とおくと, $\gamma \begin{pmatrix} y^{1/2} & xy^{-1/2} \\ 0_n & y^{-1/2} \end{pmatrix}$ は

$$\begin{pmatrix} (\mathrm{Im}\gamma\langle z\rangle)^{1/2} & * \\ 0_n & (\mathrm{Im}\gamma\langle z\rangle)^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mathrm{Im}\gamma\langle z\rangle)^{1/2}(cx+d)y^{-1/2} & -(\mathrm{Im}\gamma\langle z\rangle)^{1/2}cy^{1/2} \\ (\mathrm{Im}\gamma\langle z\rangle)^{1/2}cy^{1/2} & (\mathrm{Im}\gamma\langle z\rangle)^{1/2}(cx+d)y^{-1/2} \end{pmatrix}$$

と $P_{n,\infty} \cdot K_{n,\infty}$ の形に分解できるので,

$$\begin{aligned} &\epsilon(\gamma \begin{pmatrix} y^{1/2} & xy^{-1/2} \\ 0_n & y^{-1/2} \end{pmatrix}) \\ &= \det(\mathrm{Im}\gamma\langle z\rangle)^{m/4} \times \det\bigl((\mathrm{Im}\gamma\langle z\rangle)^{1/2}(cx+d)y^{-1/2} + \sqrt{-1}(\mathrm{Im}\gamma\langle z\rangle)^{1/2}cy^{1/2}\bigr)^{-m/2} \\ &= \det(cz+d)^{-m/2}\det(y)^{m/4}. \end{aligned}$$

これより, $E(g,\epsilon)$ に対応する Siegel 上半空間の関数は,

$$\det(y^{-1/2})^{m/2}E(\begin{pmatrix} y^{1/2} & xy^{-1/2} \\ 0_n & y^{-1/2} \end{pmatrix}, \epsilon) = \sum_{\gamma \in P_{n,0,\mathbf{Z}}\backslash G_{n,\mathbf{Z}}} \det(cz+d)^{-m/2}$$

となる。これは $\mathbf{H}_n$ 上の重さ $m/2$ の Siegel-Eisenstein 級数である。

(2.4) Siegel-Weil の公式 以上の準備の下で，Siegel-Weil の公式を述べることができる。

定理 1. $m > 2n+2$ で，$m \equiv 0 \pmod 4$ であるとする。$Q \in \mathrm{Sym}(m)_F$ を，全ての実素点で正定値 *(totally positive definite)* であり，$\det(Q) \in (F^\times)^2$ であるとする。このとき，

$$E_\varphi(g) = \vartheta_\varphi(g), \qquad \forall\varphi \in \mathcal{S}(M_{m,n}(\mathbf{A})).$$

証明は，両辺のフーリエ係数を比較することで得られる (両辺の生成する表現の局所成分についての情報も用いる)。詳しい解説は，[SS4, Ikeda] を参照。また，条件 $m > 2n+2$ をはずした場合や 2 次形式 Q についての条件を緩めたときにも，複素パラメータ付きの実解析的 Eisenstein 級数を持ち出すなどして定式化することができる。詳しくは，S. Kudla, S. Rallis, T. Ikeda, A. Ichino らの論文を参照。

3 Eisenstein 級数の pull-back formula

前節で定義した Eisenstein 級数 $E_{n,\varphi}(g)$ の部分群 $G_{n_1,\mathbf{A}} \times G_{n_2,\mathbf{A}}$ への制限を記述する Garrett の pull-back formula [G] について説明する。ここで， 尖点形式の standard L 関数の特殊値が現れる。

(3.1) 両側剰余分解 $n = n_1 + n_2$ $(n_i \geq 0)$ とする。埋め込み

$$\iota = \iota_{n_1,n_2} : G_{n_1} \times G_{n_2} \hookrightarrow G_n, \quad \iota(g_1, g_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} a_1 & & b_1 & \\ & a_2 & & b_2 \\ \hline c_1 & & d_1 & \\ & c_2 & & d_2 \end{array}\right), \quad g_i := \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \in G_{n_i}$$

を通じて, $G_{n_1} \times G_{n_2}$ を G_n の部分代数群と見る。以下しばしば，略記法

$$g_1^{\uparrow} := \iota(g_1, 1_{n_2}) \in G_n, \qquad g_2^{\downarrow} := \iota(1_{n_1}, g_2) \in G_n$$

も用いる。さて，両側剰余 $P_{n,0,F} \backslash G_{n,F} / G_{n_1,F} \times G_{n_2,F}$ について，次が成立する。

命題 2. (i) $G_{n,F} = \bigsqcup_{r=0}^{\min\{n_1,n_2\}} P_{n,0,F} \cdot \zeta_r \cdot \iota(G_{n_1,F} \times G_{n_2,F})$. ここで，

$$\zeta_r := \left(\begin{array}{c|c} 1_n & 0_n \\ \hline \widetilde{\eta_r} & 1_n \end{array}\right), \quad \widetilde{\eta_r} := \begin{pmatrix} 0 & \eta_r \\ {}^t\eta_r & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_r := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_r \end{pmatrix} \in M_{n_1,n_2}(F)$$

である。
(ii) $\Omega_r := P_{n,0,F} \cdot \zeta_r \cdot \iota(G_{n_1,F} \times G_{n_2,F})$ と置くと，次の全単射が存在する。

$$G_{r,F} \times (P_{n_1,r,F} \backslash G_{n_1,F}) \times (P_{n_1,r,F} \backslash G_{n_1,F}) \ni (\gamma_0, \gamma_1\gamma_2) \mapsto \zeta_r \cdot \iota(\gamma_0^{\downarrow}\gamma_1, \gamma_2) \in P_{n,0,F} \backslash \Omega_r$$

ここで，$\gamma_0 \in G_r$ にたいして，$\gamma_0^{\downarrow} = \iota_{n_1-r,r}(1_{n_1-r}, \gamma_0) \in G_{n_1}$ と見ている。

(3.2) Klingen 型 Eisenstein 級数 この両側剰余分解から，Eisenstein 級数 $E_{n,\varphi}(g)$ の $G_{n_1,\mathbf{A}} \times G_{n_2,\mathbf{A}}$ への引き戻しは，

$$E_{n,\varphi}(g_1^{\uparrow} g_2^{\downarrow}) = \sum_{r=0}^{\min\{n_1,n_2\}} \Big[\sum_{\gamma_1}\sum_{\gamma_2}\sum_{\gamma_0} \epsilon_{\varphi}(\zeta_r \cdot \iota(\gamma_0^{\downarrow}\gamma_1 g_1, \gamma_2 g_2))\Big]$$

となる。ここで，$(\gamma_0,\gamma_1,\gamma_2)$ の走る範囲は，上の分解定理の通りである。$0 \le r \le \min\{n_1,n_2\}$ ごとに

$$\sum_{\gamma_1}\sum_{\gamma_2}\sum_{\gamma_0} \epsilon_{\varphi}(\zeta_r \cdot \iota(\gamma_0^{\downarrow}\gamma_1 g_1, \gamma_2 g_2))$$

を調べる。ここから先，テスト関数 $\varphi(x) \in \mathcal{S}_{m,n}(\mathbf{A})$ は，$\varphi(x_1,x_2) = \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)$ ($\varphi_i(x_i) \in \mathcal{S}_{m,n_i}(\mathbf{A})$) というように分解しているとする。

まず $r=0$ の項は，

$$\sum_{\gamma_1}\sum_{\gamma_2} \epsilon_{\varphi}(\iota(\gamma_1 g_1, \gamma_2 g_2)) = E_{n_1,\varphi_1}(g_1)E_{n_2,\varphi_2}(g_2)$$

と，G_{n_1} 上の Eisenstein 級数と G_{n_2} 上の Eisenstein 級数の積にかける。次に，$0 < r \le \min\{n_1,n_2\}$ のときを考える。そのために，Klingen 型 Eisenstein 級数 を導入する。$G_{n_i,\mathbf{A}}$ 上の smooth かつ右 $\mathbf{K}_{n_i}$-有限な関数のうち，つぎの条件

- $\epsilon^{(r)}(p_i g_i) = |\det A_i|^s\, \epsilon^{(r)}(g_i), \qquad \forall p_i = \left(\begin{array}{cc|cc} A_i & * & * & * \\ & 1 & * & \\ \hline & & {}^tA_i^{-1} & \\ & & * & 1 \end{array}\right) \in P_{n_i,r,\mathbf{A}},\ \forall g_i \in G_{n_i,\mathbf{A}};$
- 任意の $g_i \in G_{n_i}$ に対して，$G_{r,\mathbf{A}} \ni h \mapsto \epsilon^{(r)}(h^{\downarrow} g_i) \in \mathbf{C}$ は，$G_{r,\mathbf{A}}$ 上の尖点形式である

を満たすものの全体を，(ここだけの用語で)$P_{n_i,r}$ に付随した一般化主系列表現の空間 といい，$I^{G_{n_i}}(s, \mathcal{A}_{cusp}(G_{r,F}\backslash G_{r,\mathbf{A}}))$ で表す。一般化主系列表現の空間の元 $\epsilon^{(r)}$ に対して，Klingen 型 Eisenstein 級数を

$$E(g_i;\epsilon^{(r)}) := \sum_{\gamma_i \in P_{n_i,r,F}\backslash G_{n_i,F}} \epsilon^{(r)}(\gamma_i g_i) \in \mathcal{A}(G_{n_i,F}\backslash G_{n_i,\mathbf{A}})$$

で定義する ($\mathrm{Re}(s) \gg 0$ のとき絶対収束)。ここで，次が成立する：

命題 3. テスト関数 $\varphi(x) = \prod_v \varphi_v(x_v)$ を， 各実素点 v_i で $\varphi_{v_i}(x_{v_i}) = \exp(-\pi\, {}^t x_{v_i} Q^{(i)} x_{v_i})$ となっているようにとる。$G_{n_1,\mathbf{A}} \times G_{n_2,\mathbf{A}}$ 上の関数 $\epsilon_{\varphi}^{(r)}(g_1,g_2)$ を

$$\epsilon_{\varphi}^{(r)}(g_1,g_2) := \sum_{\gamma_0 \in G_{r,F}} \epsilon_{\varphi}(\zeta_r \cdot \iota(\gamma_0^{\downarrow} g_1, g_2))$$

で定義する。このとき，g_2 を固定するごとに，$\epsilon_{\varphi}^{(r)}(g_1,g_2)$ は g_1 の関数として $P_{n_1,r}$ に付随した一般化主系列表現の空間 $I^{G_{n_1}}(m/2, \mathcal{A}_{cusp}(G_r(F)\backslash G_r(\mathbf{A})))$ に属す。また，g_1 と g_2 を入れ替えた主張も成立する。

したがって,
$$\sum_{\gamma_1\in P_{n_1,r,F}\backslash G_{n_1,F}}\sum_{\gamma_2\in P_{n_2,r,F}\backslash G_{n_2,F}}\epsilon_\varphi^{(r)}(\gamma_1 g_1,\gamma_2 g_2)$$
は $G_{n_1,\mathbf{A}}$ 及び $G_{n_2,\mathbf{A}}$ の Klingen 型 Eisenstein 級数の積の有限線型結合で書ける。これをより具体的に書く。

(3.3) Explicit pull-back formula (full-modular の場合) $Q\in \mathrm{Sym}(m)_F$ がつぎの条件 1-4 を満たすと仮定する:

1. Q はすべての実素点で正定値；
2. $\det(Q)\in (F^\times)^2$;
3. 各 $v<\infty$ について，$\det({}^t x Q_v x)\in 2\delta_F^{-1}\mathfrak{O}_v\ \forall x\in M_{m,n}(\mathfrak{O}_v)$;
4. 各 $v<\infty$ について，$\det({}^t x Q_v y)\in \delta_F^{-1}\mathfrak{O}_v\ (\forall y\in M_{m,n}(\mathfrak{O}_v))$ ならば，$x\in M_{m,n}(\mathfrak{O}_v)$.

テスト関数 $\varphi(x)=\prod_v \varphi_v(x_v)$ を
(i) $v_i|\infty$ (実素点) では，$\varphi_{v_i}(x_i)=\exp(-\pi\,{}^t x_i Q^{(i)} x_i)$;
(ii) $v<\infty$ (有限素点) では，$\varphi_v(x_v)=\mathrm{ch}(M_{m,n}(\mathfrak{O}_v))(x_v)$,
と取る。このとき，$\epsilon_\varphi^{(r)}(g_1,g_2)$ は右 $\mathbf{K}_{n_1,0}\times\mathbf{K}_{n_2,0}$ 不変である (Q についての条件から)。命題 3 と岩澤分解によって $\epsilon_\varphi^{(r)}(g_1,g_2)$ は $\epsilon_\varphi^{(r)}(h_1^\downarrow\nu_1,h_2^\downarrow\nu_2)$, $h_i\in G_{r,\mathbf{A}}$, $\nu_i\in\mathbf{K}_{n_i}$ によって決まる。しかも $\epsilon_\varphi^{(r)}(h_1^\downarrow,h_2^\downarrow)\in C_k(\mathrm{Sp}(r,\mathfrak{O}_F))\otimes C_k(\mathrm{Sp}(r,\mathfrak{O}_F))$ である。$\{f_j|1\le j\le d_r\}$ ($d_r:=\dim_{\mathbf{C}} C_k(\mathrm{Sp}(r,\mathfrak{O}_F))$ を $C_k(\mathrm{Sp}(r,\mathfrak{O}_F)$ の直交基底とすると, $\epsilon_\varphi^{(r)}(h_1^\downarrow,h_2^\downarrow)$ は
$$\epsilon_\varphi^{(r)}(h_1^\downarrow,h_2^\downarrow):=\sum_j\frac{\langle\epsilon_\varphi^{(r)}(h_1^\downarrow,h_2^\downarrow),f_j(h_1)\rangle_{h_1\in G_{r,\mathbf{A}}}}{\langle f_j,f_j\rangle}f_j(h_1)$$
と展開される。$\{f_j\}$ は Hecke-eigen form であると仮定してよい。内積 $\langle\epsilon_\varphi^{(r)}(h_1^\downarrow,h_2^\downarrow),f_j(\cdot)\rangle$ を計算し, $G_{r.\mathbf{A}}$ 上の尖点形式の standard L-関数の特殊値が現れることを見よう。まず，形式的な式変形で,
$$\begin{aligned}&\langle\epsilon_\varphi^{(r)}(h_1^\downarrow,h_2^\downarrow),f_j(h_1)\rangle_{h_1\in G_{r,\mathbf{A}}}\\ &=\int_{G_{r,\mathbf{A}}}\epsilon_\varphi(\zeta_r\cdot\iota(1,h))f_j^\natural(h_2h^{-1})dh,\qquad f_j^\natural(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}):=\overline{f_j(\begin{pmatrix}d&c\\b&a\end{pmatrix})}\end{aligned}$$
となる。この積分を計算するために, 各素点ごとに次のような等式を証明する:
$$\begin{aligned}&\int_{G_{r,F_v}}\epsilon_{\varphi_v}(\zeta_r\cdot\iota(1,h_v))f_j^\natural(h_2h_v^{-1})dh_v=s_v(f_j)f_j^\natural(h_2);\\ &\epsilon_{\varphi_v}(g_v)=[\mathbf{W}_v(g_v)\varphi_v](0_{m,n}),\qquad g_v\in G_{n,\mathbf{A}}\end{aligned}$$
但し，　$\mathbf{W}_v: G_{n,F_v}\times O(Q)_{F_v}\to \mathrm{Aut}(\mathcal{S}(M_{m,n}(F_v)))$ は local な Weil 表現で，　$s_v(f_j)\in\mathbf{C}$ は次で与えられる定数である:

(i) $v|\infty$ (無限素点):

$$s_v(f_j) = const. \times \frac{\left(\Gamma(\frac{m-r-1}{2})\right)^r}{\prod_{0\leq j\leq r-1}\Gamma(\frac{m-j}{2})}.$$

(ii) $v < \infty$ (good prime)

$$s_v(f_j) = \frac{L_v(m/2-r, f_j^\natural, \mathrm{std})}{\zeta_v(m/2)\prod_{i=1}^r \zeta_v(m-2i)}$$

但し，$L_v(m/2-r, f_j^\natural, \mathrm{std})$ は下に定義する $f_j^\natural$ に付随した local standard L-関数である。

(ii) の計算の概略を述べよう。まず，$\mathrm{Sp}(r)_{F_v}$ 上のコンパクト台を持つ連続関数 ϕ : $\mathrm{Sp}(r)_{F_v} \to \mathbf{C}$ で条件

$$\phi(u_1 g u_2) = \phi(g), \qquad \forall u_i \in \mathrm{Sp}(r)_{\mathfrak{O}_v}, \quad \forall g \in \mathrm{Sp}(r)_{F_v}$$

を満たすものの全体を $\mathrm{Sp}(r)_{F_v}$ の Hecke 環といい，$\mathcal{H}_v \equiv \mathcal{H}(\mathrm{Sp}(r,F_v)//\mathrm{Sp}(r,\mathfrak{O}_v))$ で表す。これは，合成積によって $\mathbf{C}$-代数となる。$\mathcal{H}_v$ の $\mathrm{Sp}(r)_{F_v}$ の不分岐主系列表現への作用を見ることにより

$$\mathcal{H}_v \cong \mathbf{C}[t_i, t_i^{-1}|1\leq i\leq r]^W, \qquad W = S_r \ltimes (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^r$$

なる $\mathbf{C}$-代数としての同型 (佐武同型) を得る ([Sat], [Ca], [SS3, Kato] を参照)。$f \in C_k(\mathrm{Sp}(r,\mathfrak{O}_F))$ を Hecke-eigen form とすると，

$$f \star \phi = \lambda_{v,f}(\phi) f, \qquad \phi \in \mathcal{H}_v$$

なる $\mathbf{C}$-代数の環準同型 $\lambda_{v,f} : \mathcal{H}_v \to \mathbf{C}$ がある。これを用いて，f に付随した local standard L 関数 $L(s,f,\mathrm{std})$ が

$$L(s,f,\mathrm{std}) := (1-q_v^{-s})^{-1} \times \prod_{i=1}^r [(1-\lambda_{v,f}(t_i)q_v^{-s})(1-\lambda_{v,f}(t_i)^{-1}q_v^{-s})]^{-1}$$

で定義される ([K] にある定義を，$(1-q_v^{-s})^{-1}$ 倍してある。このほうが普通)。いま，$h_v \in G_{r,F_v}$ の関数 $\epsilon_{\varphi_v}(\zeta_r \cdot \iota(1,h_v))$ は，コンパクト台ではないが両側 $\mathrm{Sp}(r)_{\mathfrak{O}_v}$ 不変ではある。Hecke 環の定義から，コンパクト台であるという条件をはずしたものを $\mathcal{H}_v^\frown$ とすると

$$\mathcal{H}_v^\frown \cong \mathbf{C}[[t_i, t_i^{-1}|1\leq i\leq r]]^W$$

となる。この同型における $\epsilon_{\varphi_v}(\zeta_r \cdot \iota(1,h_v))$ の像を計算することで, $s_v(f^\natural)$ が上のように計算される。

S を F の素点の有限集合に対して

$$G_{n,S} := \prod_{v\in S} G_{n,F_v} \times \prod_{v\notin S} \mathrm{Sp}(n,\mathfrak{O}_v)$$

と書くと, 求める積分は

$$\lim_S \int_{G_{r,S}} \epsilon_\varphi(\zeta_r \cdot \iota(\nu_1, h\nu_2)) f_j^\natural(h_2 h^{-1}) dh$$

となるが, S の濃度を１つ大きくするごとに $s_v(f_j)$ 倍されていくから,　結局

$$\langle \epsilon_\varphi^{(r)}(h_1,h_2), f(h_1)\rangle = \Big(\prod_v s_v(f)\Big) \times f^\natural(h_2)$$

を得る。$s(f) := \prod_v s_v(f) \neq 0$ に注意。以上より,

命題 4.

$$\begin{aligned} &E_{n,\varphi}(g_1^\uparrow g_2^\downarrow) \\ =&E_{n_1,\varphi_1}(g_1)E_{n_2,\varphi_2}(g_2) + \sum_{r=1}^{\min\{n_1,n_2\}} \sum_{j=1}^{d_r} \frac{s(f_j^{(r)})}{\langle f_j^{(r)}, f_j^{(r)}\rangle} E_{n_1,r}(g_1;\epsilon_{n_1}(f_j^{(r)}))E_{n_2,r}(g_2;\epsilon_{n_2}(f_j^{(r),\natural}))\end{aligned}$$

ここで，$f_j^{(r)} \in C_k(\mathrm{Sp}(r,\mathfrak{O}_F))$ に対して $\epsilon_{n_i}(f_j^{(r)}) \in I^{G_{n_i}}(m/2, \mathcal{A}_{cusp}(G_{r,F}\backslash G_{r,\mathbf{A}}))$ は次で与えられる一般化主系列表現の元である。

$$\epsilon_{n_i}(f_j^{(r)})(\left(\begin{array}{cc|cc} A_i & * & * & * \\ & a & * & b \\ \hline & & {}^tA_i^{-1} & \\ & c & * & d \end{array}\right) u_\infty u_{fin}) = |\det(A_1)|^{m/2} f_j^{(r)}(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}) \prod_{v|\infty} \det(a'_v + \sqrt{-1}b'_v)^{m/2}$$

$$\forall u_\infty = (\begin{pmatrix} a'_v & b'_v \\ -b'_v & a'_v\end{pmatrix})_{v|\infty} \in K_{n_i,\infty}, \quad \forall u_{fin} \in \mathbf{K}_{n_i,0}.$$

注意 上の計算で，$E_{n,\varphi}$ を複素パラメータつきの実解析的 Eisenstein 級数で置き換えれば，尖点形式 $f_j^\natural$ の standard L 関数の積分表示を得る。保型形式に付随した L 関数の研究では，このような Rankin-Selberg 型の積分表示が有用である。[Bö] , [SS13, Okazaki] も参照。

(3.4) Explicit pull-back formula (level 付きの場合)　Q についての仮定は, (3.3) 節のままとする。$n=2l$, $n_1=n_2=l$ という状況で考える。$\mathfrak{f}$ を square-free な F の整イデアルとし，$\rho : (O_F/\mathfrak{f})^\times \to \mathbf{C}^\times$ を非自明な指標とする。このとき，次が成立 ([K, Prop 6.6, 6.7]):

命題 5. v を $\mathfrak{f}$ を割る有限素点とする。$\varphi_v(x_1,x_2) = \varphi_{1,v}(x_1)\varphi_{2,v}(x_2) \in \mathcal{S}(M_{m,2l}(F_v))$ ($x_i \in M_{ml}(F_v)$) で次の性質を満たすものが存在する:
(i) $0 < \forall r < l$ 及び $\forall \nu_1,\nu_2 \in \mathrm{Sp}(l)_{\mathfrak{O}_v}$, $\forall h \in \mathrm{Sp}(r)_{F_v}$ に対して，

$$[\mathbf{W}_v(\zeta_r\iota(\nu_1, h^\downarrow\nu_2))\varphi_v](O_{m.2l}) = 0.$$

(ii) $\eta(g) := [\mathbf{W}_v(\zeta_l\iota(1,g))\varphi_v](0_{m.2l})$ ($g \in \mathrm{Sp}(l)_{F_v}$) は

$$\mathbf{K}_v^\natural = \left\{g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(l)_{\mathfrak{O}_v} \middle| b \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}}_v\right\}$$

に台をもつ。また，$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} \in \mathbf{K}_v^\natural$ に対して，$\eta(g) = N_1 \times \rho(\det(a))$ ($\exists N_1 > 0$) である。

さて，テスト関数 $\varphi(x)=\varphi_{\mathfrak{f},\rho}(x)=\prod_v \varphi_v(x_v)$ を実素点及び $\mathfrak{f}$ を割らない有限素点については，(3.3) と同じように取り，$\mathfrak{f}$ を割る有限素点については，上の命題のように取る。すると，命題 5 (i) から, $0<r<l$ ならば, $\epsilon_\varphi^{(r)}(g_1,g_2)=0$ となる。一方, $r=l$ のときは, $\epsilon_\varphi^{(l)}(g_1,g_2)$ は g_1 の関数として $C_k(\Gamma_0^l(\mathfrak{f}),\rho)$ に属す。命題 5 (ii) を用いて計算すると, $f\in C_k(\Gamma_0^l(\mathfrak{f}),\rho)$ が Hecke 環 $\mathcal{H}_v$ $(v\not|\mathfrak{f})$ たちの同時固有関数ならば,

$$\langle \epsilon_\varphi^{(r)}(h_1,h_2), f(h_1)\rangle_{h_1\in G_{r,\mathbf{A}}}=s(f)\times f^\natural(h_2), \qquad s(f)\neq 0$$

となる。したがって, 次の pull-back formula を得る：

命題 6. $\varphi_{\mathfrak{f},\rho}(x)=\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)$ $(x_i\in M_{ml}(\mathbf{A}))$ と書く。

$$\begin{aligned}&E_{2l,\varphi_{\mathfrak{f},\rho}}(g_1^\uparrow g_2^\downarrow)\\=&E_{l,\varphi_1}(g_1)E_{l,\varphi_2}(g_2)+\sum_j\frac{s(f_j^{(l)})}{\langle f_j^{(l)},f_j^{(l)}\rangle}f_j^{(l)}(g_1)f_j^{(l),\natural}(g_2), \qquad (s(f_j^{(l)})\neq 0).\end{aligned}$$

ここで，$\{f_j^{(l)}\}$ は $G_{l,\mathbf{A}}$ 上の尖点形式の空間 $C_k(\Gamma_0^l(\mathfrak{f}),\rho)$ の直交基底で，各 $f_j^{(l)}$ は *Hecke* 環 $\mathcal{H}_v$ $(v\not|\mathfrak{f})$ たちの同時固有関数であるとする。

$\boxed{4}$ Basis problem

(4.1) Basis problem に対する結果 一般に,『保型形式の空間が theta 級数たちで線型空間として生成されるか否か』という問題を basis problem という。正則 Hilbert-Siegel 保型形式の空間の basis problem について Kuang が与えた結果を述べよう。F の狭義類数 h_F^+ を 1 とする。F の different ideal の生成元 δ_F を総正にとれる。$m>0$ を $m\equiv 0 \pmod 8$ とし, 対称行列 Q_0 を $Q_0=(\delta_F^{-1}E_8)^{\oplus m/8}\in \mathrm{Sym}(m)_F$ とする。ただし, E_8 は E_8-型ルート系のカルタン行列である ([K, p.974] にあるものは, これと $\mathbf{Z}$ 上同値なもの):

$$E_8=\begin{pmatrix}2&0&-1&0&0&0&0&0\\0&2&0&-1&0&0&0&0\\-1&0&2&-1&0&0&0&0\\0&-1&-1&2&-1&0&0&0\\0&0&0&-1&2&-1&0&0\\0&0&0&0&-1&2&-1&0\\0&0&0&0&0&-1&2&-1\\0&0&0&0&0&0&-1&2\end{pmatrix}.$$

E_8 は，整数係数で，unimodular(行列式が１）, even-diagonal, かつ正定値な対称行列である（よく知られているように，そのようなものは，行列サイズが 8 の倍数のときのみ存在し，サイズが 8 のときは，$\mathbf{Z}$ 上の同値を除いて E_8 に限る)。従って，Q_0 は (3.3) 節の条件 1-4 をみたす。(原論文 [K] では，狭義類数 h_F^+ が >1 のときも，$m\equiv 0 \pmod{8h_F^+}$ なら

ば，条件 1-4 を満たす $Q_0 \in \mathrm{Sym}(m)_F$ が存在すると言っているが，筆者はもう少し仮定を強める必要がある気がする。以下，安全のため $\underline{h_F^+ = 1\text{ を仮定する}}$）。さて, full modular case では, 次が Kuang の結果 [K, Theorem 8.2 and its Corollary.] である。

定理 7. $m \equiv 0 \pmod 8$, $m > 2n+2$ かつ $h_F^+ = 1$ とする。$\varphi \in \mathcal{S}(M_{mn}(\mathbf{A}))$ を，*(3.3)* 節のようにとって，

$$\varphi_j(x) := \varphi(h_j^{-1}x), \quad O(Q_0)_{\mathbf{A}} = \bigsqcup_{j=1}^{s} O(Q_0)_F h_j \mathbf{K}_{Q_0,\varphi}$$

と置く。このとき, *Hilbert-Siegel* 保型形式の空間 $M_{m/2}^n(\mathrm{Sp}(n, O_F))$ は, つぎの $G_n(\mathbf{A})$ 上の *theta* 級数

$$\theta_n(g, Q_0, \varphi_j) := \sum_{\xi \in M_{mn}(F)} [\mathbf{W}(g)\varphi_j](\xi) \qquad\qquad 1 \le i \le s$$

たちで $\mathbf{C}$-線型空間として張られる。

ここに現れた theta 級数を Siegel 上半空間の直積 $\mathbf{H}_n^d$ 上の関数として書くと次のようになる。まず, $\quad \mathbf{K}_{Q_0,\varphi} = O(Q_0)_{\widehat{O_F}}$ および

$$O(Q_0)_{\mathbf{A}_0}/O(Q_0)_{\widehat{O_F}} \hookrightarrow GL(m)_F GL(m)_{\widehat{O_F}}/GL(m)_{\widehat{O_F}} \subset GL(m)_{\mathbf{A}_0}/GL(m)_{\widehat{O_F}}$$

なる包含関係に注意する ($SL(m)$ の強近似定理を使う。実は, $h_F = 1$ より中辺と右辺は一致する)。中辺は $GL(m)_F/GL(m)_{O_F}$ に同型で, これは F^m の free O_F-lattice の全体と同一視される。左辺の中辺における像は,

$$GL(m)_F \cap O(Q_0)_{\mathbf{A}_0} GL(m)_{\widehat{O_F}} \Big/ GL(m)_{O_F}$$

となる。したがって, $O(Q_0)_F$ で左から割ると全単射

$$\begin{aligned}
&O(Q_0)_F \backslash O(Q_0)_{\mathbf{A}_0}/O(Q_0)_{\widehat{O_F}} \\
\cong\, &O(Q_0)_F \backslash GL(m)_F \cap O(Q_0)_{\mathbf{A}_0} GL(m)_{\widehat{O_F}}/GL(m)_{O_F} \\
\cong\, &\left\{ Q \in \mathrm{Sym}(m)_F \middle| \begin{array}{c} \exists \gamma \in GL(m)_F \ s.t. Q[\gamma] = Q_0, \\ \exists k = (k_v) \in GL(m)_{\widehat{O_F}} \ s.t. Q[k] = Q_0. \end{array} \right\} \Big/ GL(m)_{O_F}
\end{aligned}$$

を得る。但し, $\widetilde{h_j} \in GL(m)_F \cap O(Q_0)_{\mathbf{A}_0} GL(m)_{\widehat{O_F}}$ に対して, $Q_j := Q_0[\widetilde{h_j}] = {}^t\widetilde{h}_j Q_0 \widetilde{h}_j$ を対応させる (cf. [P-R, §8.1])。すると, $\theta_n(g, Q_0, \varphi_j)$ に (1.2) 節のやり方で対応する $\mathbf{H}_n^d$ 上の保型形式は,

$$\theta_n(z; Q_j; M_{mn}(O_F)) := \sum_{\xi \in M_{mn}(O_F)} \exp(\pi\sqrt{-1} \sum_{i=1}^{d} \mathrm{tr}({}^t\xi^{(i)} Q_j^{(i)} \xi^{(i)} z_i)),$$

となる。

一方, level つきの場合については，次が Kuang の結果 [K, Theorem 8.3] である:

定理 8. $m \equiv 0 \pmod 8$, $m > 2l+2$ かつ $h_F^+ = 1$ とする。$\mathfrak{f}$ を *square-free* な F の整イデアルとし，$\rho : (O_F/\mathfrak{f})^\times \to \mathbf{C}^\times$ を非自明な指標とする。テスト関数

$$\varphi_{\mathfrak{f},\rho}(x_1, x_2) = \varphi'_{\mathfrak{f},\rho}(x_1)\varphi''_{\mathfrak{f},\rho}(x_2) \in \mathcal{S}(M_{m,2l}(\mathbf{A}))$$

を *(3.4)* 節のようにとって，

$$\varphi'_{i,\mathfrak{f},\rho}(x_1) := \varphi'_{\mathfrak{f},\rho}(h_i^{-1}x_1), \quad O(Q_0)_{\mathbf{A}} = \bigsqcup_{j=1}^{s} O(Q_0)_F h_j \mathbf{K}_{Q_0,\varphi_{\mathfrak{f},\rho}}$$

と置く。このとき，*Hilbert-Siegel* 尖点形式の空間 $C_{m/2}(\Gamma_0^l(\mathfrak{f}), \rho)$ は，つぎの $G_l(\mathbf{A})$ 上の *theta* 級数

$$\theta_l(g, Q_0, \varphi'_{i,\mathfrak{f},\rho}) := \sum_{\xi \in M_{ml}(F)} [\mathbf{W}(g)\varphi'_{i,\mathfrak{f},\rho}](\xi), \qquad 1 \le i \le s$$

たちで $\mathbf{C}$-線型空間として張られる。

注意 この場合も，$\theta_l(g, Q_0, \varphi'_{i,\mathfrak{f},\rho})$ を $\mathbf{H}_l^d$ 上の theta 級数として書くことが出来るはずであるが，　書き下すには命題 5 のテスト関数の具体形 ([K, §6]) を見る必要がある。

(4.2) 証明 定理 8 (level 付き) の証明のみ述べる。定理 7 (full modular の場合）も，すこし面倒になるが命題 4 と下の補題 9 を用いれば同じ考え方で出来る (cf. [K, Theorem 8.2] の証明)。

$$\theta_l(g, Q_0, \varphi''_{i,\mathfrak{f},\rho}) := \sum_{\xi \in M_{ml}(F)} [\mathbf{W}(g)\varphi''_{i,\mathfrak{f},\rho}](\xi), \quad \varphi''_{i,\mathfrak{f},\rho}(\xi) := \varphi''_{\mathfrak{f},\rho}(h_i^{-1}\xi)$$

とおく。命題 6 の式において，

$$E_{2l,\varphi_{\mathfrak{f},\rho}}(g_1^{\uparrow}g_2^{\downarrow}) = \sum_{i=1}^{s} c_i \theta_l(g_1, Q_0, \varphi'_{i,\mathfrak{f},\rho})\theta_l(g_2, Q_0, \varphi''_{i,\mathfrak{f},\rho})$$

$$E_{l,\varphi_1}(g_1) = \sum_{i=1}^{s} c_i \theta_l(g_1, Q_0, \varphi'_{i,\mathfrak{f},\rho}), \qquad E_{l,\varphi_2}(g_2) = \sum_{i=1}^{s} c_i \theta_l(g_2, Q_0, \varphi''_{i,\mathfrak{f},\rho})$$

を得る。したがって，

$$\Theta' := \mathbf{C}\text{-span}\{\theta_l(g_1, Q_0, \varphi'_{i,\mathfrak{f},\rho}) | 1 \le i \le s\}, \qquad \Theta'' := \mathbf{C}\text{-span}\{\theta_l(g_2, Q_0, \varphi''_{i,\mathfrak{f},\rho}) | 1 \le i \le s\},$$

と置くと，

$$\sum_j \frac{s(f_j^{(l)})}{\langle f_j^{(l)}, f_j^{(l)} \rangle} f_j^{(l)}(g_1) f_j^{(l),\natural}(g_2) \in \Theta' \otimes \Theta''$$

となる。したがって，　定理は次の「線型代数」([K, Lemma 8.1]) から従う:

補題 9. $f_1', f_2', \cdots, f_N' \in \mathcal{A}(G_{n_1,F}\backslash G_{n_1,\mathbf{A}})$ および $f_1'', f_2'', \cdots, f_N'' \in \mathcal{A}(G_{n_2,F}\backslash G_{n_2,\mathbf{A}})$ をそれぞれ一次独立な N 個の保型形式の組とする。$V_i \subset \mathcal{A}(G_{n_i,F}\backslash G_{n_i,\mathbf{A}})$ を線型部分空間とする。もし, 複素数の列 a_j $(\forall a_j \neq 0)$ が存在して,

$$\sum_{j=1}^{N} a_j f_j'(g_1) f_j''(g_2) \in V_1 \otimes V_2,$$

であるとする。このとき, $f_j'(g_1) \in V_1$ かつ $f_j''(g_2) \in V_2 (1 \leq \forall j \leq N)$ が成立する。

謝辞 講演の機会を与えて下さった世話人の方々に感謝致します。

References

[Bö] Böcherer, S. Siegel modular forms and theta series, Proc. Sympos. Pure Math., **49-2**, Amer. Math. Soc., (1989) 3–17.

[B-J] Borel, A. and Jacquet, H. Automorphic forms and automorphic representations, Proc. Sympos. Pure Math., **33-1**, Amer. Math. Soc., (1979) pp. 189–207 .

[Ca] Cartier, P. Representations of p-adic groups : A survey , Proc. Sympos. Pure Math., **33-1**, Amer. Math. Soc., (1979) pp. 111–155.

[G] Garrett, P. Pullbacks of Eisenstein series; applications, In: Automorphic forms of several variables (Katata, 1983), 114–137, Progr. Math., 46, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1984.

[K] Kuang, J. On the linear representability of Siegel-Hilbert modular forms by theta series, Amer. J. Math. **116** (1994), 921–994.

[P-R] Platonov, V. and Rapinchuk, A. *Algebraic Groups and Number Theory* , Academic Press (1994).

[Rao] Rao, R. On some explicit foumulas in the theory of Weil representation, Pacific. J. Math. **157** (1993) 335-371.

[Sai] Saito, M. Representations unitaires des groupes symplectiques. J. Math. Soc. Japan **24** (1972), 232–251.

[Sat] Satake, I. Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over p-adic fields., Publ. I.H.E.S.**18** (1963) 1–69.

[SSn] 第 n 回整数論サマースクール報告集 (報告書), (1992+n(+1)).

Department of Mathematics, Sophia University, 7-1 Kioi-cho, Chiyoda-ku, Tokyo, 102-8554 Japan