SERRE の p 進 MODULAR 形式について

長岡昇勇（近畿大学・理工学部）

この論説の目標は 1970 年代の初頭に発表された Serre の論文

“Formes modulaires et fonctions zêta p-adiques”

（の一部）の紹介と若干の「課題」について述べることである．

この論文は既に古典のひとつといえるが，Serre はこの中で，それまで得られていた「modular 形式のもつ p 進的性質」に関する諸結果をまとめ，「p 進 modular 形式」の概念を定義した（現在では，Serre の p 進 modular 形式と呼ばれている）．さらに，その応用として総実代数体上の p 進 zeta 関数も構成している．その後の発展，特に Katz 流の幾何学的取り扱いについては，この報告集の山上氏の論説を参照されたい．

論文の目次は以下の通り：

以上のうち紹介する部分は，

1 章 1.1-1.6 と 2 章 2.1

3 章 3.1-3.4

5 章 5.1-5.3

でそれぞれの部分の内容の要点は次のようである：

の部分の内容の要点

- p 進 modular 形式の定義：p 進 modular 形式 f を $\mathbb{Q}$ 係数 modular 形式の列 $\{f_i\}$ が $\mathbb{Q}_p[\![q]\!]$ 内で一様収束したものとして定義
- p 進 modular 形式の weight の定義：Fourier 係数間の合同が weight 間の合同に遺伝すること
- p 進 Eisenstein 級数の定義
- p 進 Eisenstein 級数の定数項として p 進 L-関数が現れること

の部分の内容の要点

- $\mathbb{Q}$ 係数の $\Gamma_0(p)$ 上の modular 形式は p 進 modular 形式となること
- $\mathbb{Q}(\mu_{p-1})$ 係数の $\Gamma_0(p)$ 上の Neben 型の modular 形式は p 進 modular 形式と見なせること

の部分の内容の要点

- 総実代数体 K の p 進ゼータ関数を構成する．その道筋:K 上の Hilbert modular 群上の Eisenstein 級数 $F_k(\mathfrak{u};z_1,\ldots,z_r)$ を考え，これを diagonal に制限すると $SL_2(\mathbb{Z})$ 上の modular 形式になる事実を用いる．

1. p 進 modular 形式

1.1. 記号

a) 合同

p を素数，v_p を p 進体 $\mathbb{Q}_p$ の付値で $v_p(p)=1$ と正規化されたものとする．$\mathbb{Q}_p$ の元 x は $\mathbb{Z}_p$ に含まれるとき，すなわち $v_p(x)\geq 0$ のとき $\boldsymbol{p}$ **整**であるという．
不定元 q の形式的ベキ級数環の元 $f=\sum a_n\ q^n\in\mathbb{Q}[\![q]\!]$ に対して

$$v_p(f)=\inf\ v_p(a_n)$$

とおく．したがって $v_p(f)\geq 0$ のときは $f\in\mathbb{Z}_p[\![q]\!]$ となる．$v_p(f)\geq m$ は $f\equiv 0 \pmod{p^m}$ を意味する．
$\{f_i\}$ を $\mathbb{Q}[\![q]\!]$ の元の列とする．f_i の係数が f の係数に一様に収束するとき，すなわち $v_p(f-f_i)\to+\infty$ のとき f_i は f に**一様**に収束するという．

b)　Eisenstein 級数

k を ≥ 2 なる偶数とするとき

$$G_k=-\frac{B_k}{2k}+\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(n)q^n\quad(q=e^{2\pi iz})$$

$$E_k=-\frac{2k}{B_k}G_k=1-\frac{2k}{B_k}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(n)q^n$$

とおく．ここで B_k は k 番目の Bernoulli 数で $\sigma_{k-1}(n)=\sum_{d|n}d^{k-1}$ である．$k\geq 4$ ならば, G_k と E_k は（群 $SL_2(\mathbb{Z})$ に関する）weight が k の modular 形式となる．

c) 級数 P, Q, R
Ramanujan にしたがって

$$
\begin{aligned}
P =& E_2 = 1 - 24 \sum \sigma_1(n) q^n \\
Q =& E_4 = 1 + 240 \sum \sigma_3(n) q^n \\
R =& E_6 = 1 - 504 \sum \sigma_5(n) q^n
\end{aligned}
$$

とおく．級数 Q と R は modular 形式のなす graded 環の生成元である．すなわち weight k の任意の modular 形式は Q と R の weight k の isobaric 多項式として一意的に表される．例えば

$$
\begin{aligned}
E_8 =& Q^2, \quad E_{10} = QR, \quad E_{12} = \frac{441Q^3 + 250R^2}{691}, \quad E_{14} = Q^2 R, \\
\Delta =& 2^{-6} 3^{-3} (Q^3 - R^2) = q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^n.
\end{aligned}
$$

級数 P は通常の意味での modular 形式ではないが，weight 2 の「p 進 modular 形式」であることが示される（2.1 参照）．
d) 合同の例
Kummer によれば，k が $p-1$ で割り切れなければ，$\frac{B_k}{k}$ は p 整であり，$v_p(G_k) = 0$ が導かれる．さらにその上 $k' \equiv k \pmod{p-1}$ ならば $\frac{B_k}{k} \equiv \frac{B_{k'}}{k'} \pmod{p}$ が成り立つ．$\sigma_{k-1}(n)$ に対しても同様の合同式が成り立つから，結局次が成り立つ：

$$
k' \equiv k \not\equiv 0 \pmod{p-1} \quad \text{ならば} \quad G_{k'} \equiv G_k \pmod{p}.
$$

(これは，Bernoulli 数の合同の G_k 上への拡張である．)
これに対して，k が $p-1$ で割り切れる場合は Clausen-von Staudt の定理により，$v_p(\frac{B_k}{k}) = -1 - v_p(k)$ が得られる．$v_p(\frac{k}{B_k}) \geq 1$ であるから次を得る：

$$
k \equiv 0 \pmod{p-1} \quad \text{ならば} \quad E_k \equiv 1 \pmod{p}.
$$

より精確には次が成り立つ：

$$
\begin{aligned}
E_k \equiv 1 \pmod{p^m} &\iff k \equiv 0 \pmod{(p-1)p^{m-1}} \quad (p \neq 2 \text{ のとき}) \\
E_k \equiv 1 \pmod{2^m} &\iff k \equiv 0 \pmod{2^{m-2}}.
\end{aligned}
$$

1.2. mod p の modular 形式の algebra

$k \in \mathbb{Z}$ に対して，weight k の modular 形式

$$
f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, q^n
$$

で全ての係数 a_n が p 整であるもの全体のなす集合を M_k で表す．$f \in M_k$ のとき，f の reduction mod p したもの $\tilde{f}$ は $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 上の形式的ベキ級数環 $\mathbb{F}_p[\![q]\!]$ に含まれる．このように得られる集合を $\tilde{M}_k$ で表す．そこで

$$
\tilde{M} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{M}_k
$$

とおく．これは $\mathbb{F}_p[\![q]\!]$ の subalgebra でこれを **mod p modular 形式の algebra** と呼ぶことにする．$\tilde{M}$ の構造は Swinnerton-Dyer によって決定されている [22]．その

結果を手短に述べてみる（詳細は，[15] または [22] を参照のこと）:

(i) $p \geq 5$ **の場合**

1.1 で見たように，$E_{p-1} \equiv 1 \pmod p$ であるから $\tilde{E}_{p-1} = 1$ である．E_{p-1} を M_k の元に掛ければ $\tilde{M}_{k+p-1}$ に入るから，次の列が得られる：

$$\tilde{M}_k \subset \tilde{M}_{k+p-1} \subset \cdots \subset \tilde{M}_{k+n(p-1)} \subset \cdots.$$

$\alpha \in \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ のとき，mod $p-1$ で α となる k に対する $\tilde{M}_k$ の和集合を $\tilde{M}^\alpha$ で表すことにする．Swinnerton-Dyer の結果により，$\tilde{M}$ は $\alpha \in \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ に対する $\tilde{M}^\alpha$ の**直和**となる．換言すれば $\tilde{M}$ は $\alpha \in \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ に次数を持つ graded algebra である．α が奇数なら，すなわち $\alpha \in \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ のなかで 2 で割り切れない元であれば $\tilde{M}^\alpha = 0$ である．さらにその上 $\tilde{M}$ は**多項式環** $\mathbb{F}_p[Q,R]$ **を** $\tilde{A}-1$ **で生成される単項イデアルで割った剰余環**と同一視される．ここで $\tilde{A}(Q,R)$ は weight $p-1$ の isobaric な多項式で，$E_{p-1} = A(Q,R)$ で決まる多項式 A を reduction mod p して得られるものである．

この $\tilde{M}$ の表示より，$\tilde{M}$ は (resp. その subalgebra $\tilde{M}^0$) は，$\mathbb{F}_p$ 上 smooth な代数曲線 Y(resp. $\tilde{Y}^0$) の affine algebra である．Y と Y^0 の「幾何学的」解釈は [15], p.416-05 にある．Y と Y^0 は smooth だから $\tilde{M}$ と $\tilde{M}^0$ は **Dedekind 環**となる．

例

$p = 11$ のとき．$E_{p-1} = QR$ であるから

$$\tilde{M} = \mathbb{F}_{11}[Q,R]/(QR-1), \quad \tilde{M}^0 = \mathbb{F}_{11}[Q^5, R^5]/(Q^5R^5-1)$$

となり，対応する曲線の種数はともに 0 である．

$p = 13$ のとき．$E_{p-1} = \frac{441Q^3+250R^2}{691}$ であり

$$\tilde{M} = \mathbb{F}_{13}[Q,R]/(Q^3+10R^2-11), \quad \tilde{M}^0 = \mathbb{F}_{13}[Q^3]$$

となり，対応する曲線の種数はそれぞれ 1, 0 である．

(ii) $p = 2, 3$ **の場合**

この場合 $\tilde{Q} = \tilde{R} = 1$ である．$\tilde{M}$ が Δ の reduction mod p で生成される多項式環 $\mathbb{F}_p[\tilde{\Delta}]$ と同一視されることは容易にわかる．$\tilde{M}_{k-2} \subset \tilde{M}_k$ であり，k が 12 で割り切れないときは $\tilde{M}_{k-2} = \tilde{M}_k$ となる．この場合 $\tilde{M}^0 = \tilde{M}$ である．

1.3. modular 形式の mod p^m の合同

定理 1: m を ≥ 1 なる整数とする．f と f' をともに有理数係数を持つ modular 形式で，それぞれの weight を k, k' とする．$f \neq 0$ かつ

$$v_p(f-f') \geq v_p(f) + m$$

とすると次が成り立つ：

$$\begin{aligned} k' &\equiv k \pmod{(p-1)p^{m-1}} \quad (p \geq 3 \text{ のとき}) \\ k' &\equiv k \pmod{2^{m-2}} \quad (p = 2 \text{ のとき}). \end{aligned}$$

証明. 適当な定数を掛けることにより，$v_p(f) = 0$ と仮定してよい．このとき仮定は

$$f' \equiv f \pmod{p^m}$$

と同値である．特に f' と f の係数は p 整で $\tilde{f} = \tilde{f}' \neq 0$ である．$p \geq 5$ なら，$\tilde{f}$ と $\tilde{f}'$ は $\tilde{M}$ の同じ成分 $\tilde{M}^\alpha$ に含まれる．言い換えるとこれは $k' \equiv k \pmod{p-1}$ を意味する．k' と k は偶数だから $p = 2$ または 3 のときも同じ合同式が成り立つ．これで

定理は $m=1$ のとき証明された．
$m \geq 2$ と仮定する．$h = k' - k$ とおく．f' を

$$f' E_{(p-1)p^n}$$

で置き換え，n を十分大にとることにより $h \geq 4$ と仮定してよい．すると E_h は weight h の modular 形式で，h は $p-1$ で割り切れるから，$E_h \equiv 1 \pmod p$ が成り立つ．$p \geq 3$ の時は $r = v_p(h)+1$, $p=2$ の時は $r = v_p(h)+2$ とおく．目標は $r \geq m$ を示すことである．$r < m$ と仮定する．$f \cdot E_h - f' = f - f' + f(E_h - 1)$ である．ここで $f - f' \equiv 0 \pmod{p^m}$ かつ $E_h - 1 \equiv 0 \pmod{p^r}$ (1.1 参照) である．したがって $f \cdot E_h - f' \equiv 0 \pmod{p^r}$ であり

$$p^{-r}(f \cdot E_h - f') \equiv p^{-r} f(E_h - 1) \pmod p$$

が成り立つ．ここで右辺の一部分は

$$p^{-r}(E_h - 1) = \lambda\phi, \quad \phi = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{h-1}(n) q^n$$

と書け，Clausen-von Staudt の定理より $v_p(\lambda) = 0$ とできる．すると，上記の合同式は次と同値である：

$$f\,\phi \equiv g \pmod p.$$

ここで g は weight k' の modular 形式 $\lambda^{-1}p^{-r}(f \cdot E_h - f')$).
$\tilde{f} \neq 0$ だから，$\tilde{\phi} = \tilde{g}/\tilde{f}$ と表せ，$\tilde{\phi}$ は $\tilde{M}$ の商体の元となる．さらに，$\tilde{g}$ と $\tilde{f}$ は mod $p-1$ で同じ weight を持つから，$\tilde{\phi}$ は $\tilde{M}^0$ の商体の元である．さらに

$$\tilde{\phi} - \tilde{\phi}^p = \tilde{\psi}, \quad \text{ここで}\ \ \psi = \sum_{(p,n)=1} \sigma_{h-1}(n) q^n$$

と書け，

$$\psi \equiv \theta^{h-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) q^n\right) \pmod p, \quad \text{ここで}\ \ \theta = q\frac{d}{dq}$$

となることが容易にわかる ([22]).
2 つの場合に分けて考え，矛盾を導く．
(i) $p \geq 5$ の場合
この場合

$$\tilde{\psi} = -\frac{1}{24}\theta^{h-1}(\tilde{P}) = -\frac{1}{24}\theta^{p-2}(\tilde{E}_{p+1})$$

が成り立ち，theta-作用素の性質

$$f \in \tilde{M}_k \implies 12\theta f = k\,Pf + \partial f \in \tilde{M}_{k+p+1}$$

（[15], [22] 参照）より，$\tilde{\psi} \in \tilde{M}^0$ がわかる．方程式 $\tilde{\phi} - \tilde{\phi}^p = \tilde{\psi}$ は $\tilde{\phi}$ が $\tilde{M}^0$ 上**整**であることを示しており，$\tilde{M}^0$ は整閉だから，$\tilde{M}^0$ に含まれる．これは，[15]，p.11 の補題に述べられている事実「k が $p-1$ で割り切れるとき、$\tilde{\phi}$ は $\tilde{M}_k$ の元ではありえない」と矛盾する．
(ii) $p=2$ または 3 の場合
関数 $\tau(n)$ の modulo 6 での合同より $\tilde{\psi} = \tilde{\Delta}$ が得られる．$\tilde{M} = \mathbb{F}_p[\tilde{\Delta}]$ で，方程式 $X - X^p = \tilde{\Delta}$ は $\mathbb{F}_p(\tilde{\Delta})$ 上明らかに既約で，再び矛盾を得る．**証明終.**

1.4. p 進 modular 形式

a) 群 $\boldsymbol{X}$

m を ≥ 1 なる整数とする（$p=2$ のときは ≥ 2）．

$$\boldsymbol{X}_m := \mathbb{Z}/(p-1)p^{m-1}\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/p^{m-1}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z} \qquad (p \neq 2 \text{ のとき})$$
$$\boldsymbol{X}_m := \mathbb{Z}/2^{m-2}\mathbb{Z} \qquad (p = 2 \text{ のとき})$$

とおく．$\{\boldsymbol{X}_m\}$ は射影系をなす．その極限を $\boldsymbol{X}$ で表す：

$$\boldsymbol{X} := \varprojlim \boldsymbol{X}_m = \begin{cases} \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z} & p \neq 2 \text{ のとき}, \\ \mathbb{Z}_2 & p = 2 \text{ のとき}. \end{cases}$$

ここで $\mathbb{Z}_p$ は p 進整数環である．自然な準同型写像 $\mathbb{Z} \to \boldsymbol{X}$ は injective でその像と $\mathbb{Z}$ を同一視する．
群 $\boldsymbol{X}$ は，しばしば p 進単数群 $\mathbb{Z}_p^*$ の（p 進）指標群としてとらえられる．詳しく述べる．V_p を $\mathbb{Z}_p^*$ の連続準同型全体の群とし，一様収束の位相を入れておく．$\mathbb{Z}$ から V_p の中への自然な写像は，連続な準同型 $\varepsilon : \boldsymbol{X} \to V_p$ に拡張される．この準同型は $p=2$ のとき injective, $p \neq 2$ なら bijective となる．$k \in \boldsymbol{X}$ と $v \in \mathbb{Z}_p$ に対して，v を $\mathbb{Z}_p$ の自己準同型 $\varepsilon(k)$ で移したものを v^k で表す．$k \in \boldsymbol{X}$ を $k=(s,u)$，$s \in \mathbb{Z}_p$, $u \in \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ と表す．v を $v_1 v_2$ と分解する．ここで $v_1^{p-1}=1$ かつ $v_2 \equiv 1 \pmod{p}$. すると $v^k = v_1^k v_2^k = v_1^u v_2^s$ となる．
$k \in \boldsymbol{X}$ が**偶数**であるとは，部分群 $2\boldsymbol{X}$ に含まれることをいう．すなわち，$(-1)^k = 1$ であることをいう．これは，$p \neq 2$ の場合は k の 2 番目の成分が $\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ の偶数であることを意味し，$p=2$ のときは k が $2\mathbb{Z}_2$ に入ることを意味する．

b) p 進 modular 形式の定義

***p* 進 modular 形式**とは形式的ベキ級数

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$$

で係数が $a_n \in \mathbb{Q}_p$ で次の性質を持つものである：
(*)　有理係数を持つ weight k_i の modular 形式の列 $\{f_i\}$ が存在して，$\lim f_i = f$ となる．
(1.1 で注意したように，$\lim f_i = f$ は $v_p(f_i - f)$ が $+\infty$ に近づくことである．すなわち，f_i の係数が f の係数に一様に収束することを意味する．)

c) p 進 modular 形式の weight

定理 2: f を $\neq 0$ となる p 進 modular 形式とし，$\{f_i\}$ を weight$\{k_i\}$ の有理係数を持つ modular 形式の列でその極限が f となるものとする．すると $\{k_i\}$ は群 $\boldsymbol{X} = \varprojlim \boldsymbol{X}_m$ に極限をもち，それは f に収束する列 $\{f_i\}$ のとり方によらない．

証明. 仮定より $v_p(f_i - f_j) \to +\infty$ である．一方，十分大なる i に対しては $v_p(f_i)$ は $v_p(f)$ に一致する．定理 1 を適用すれば，全ての $m \geq 1$ に対して，k_i の $\boldsymbol{X}_m$ 内の像は一定となることがわかる．これは k_i が $\boldsymbol{X}$ に極限 k を持つことを意味する．極限がとり方によらないことは直ちにわかる．**証明終**

k_i の極限 k を f の **weight** とよぶ．これは $\boldsymbol{X}$ の偶数元である．$k \in 2\boldsymbol{X}$ に対して，0 も weight k の p 進 modular 形式であると考えると，与えられた weight k をもつ p 進 modular 形式全体は $\mathbb{Q}_p$-ベクトル空間となる（ノルム v_p をもつ p 進 Banach 空間となる）．
weight k_i の p 進 modular 形式 f_i が形式的ベキ級数 f に収束すれば f も p 進 modular 形式となる．さらに $f \neq 0$ なら k_i は $\boldsymbol{X}$ に極限 k をもち，f は weight k である．

例. $p = 2, 3, 5$ ならば $Q \equiv 1 \pmod p$ であるから

$$\frac{1}{Q} = \lim_{m\to\infty} Q^{p^m-1}$$

がなりたち，$1/Q$ は p 進 modular 形式となることがわかる．同様にして級数 $1/j = \Delta/Q^3$ が weight 0 の形式となることがわかる．($p = 2, 3, 5$ に対して)f が weight 0 の p 進 modular 形式であることと，

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{j^n} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \Delta^n Q^{-3n}$$

($b_n \in \mathbb{Q}_p$ かつ $v_p(b_n) \to +\infty$) と書けることとは同値である．

1.5. p 進 modular 形式の基本的性質

f を p 進 modular 形式とすると，$v_p(f) \neq -\infty$ である．すなわち，ある p ベキ p^N が存在して $p^N f \in \mathbb{Z}_p[\![q]\!]$ となる．これは定義から導かれる．さらに次が成り立つ：

定理 1': m を ≥ 1 なる整数とする．f と f' をそれぞれの weight が k, k' の零でない p 進 modular 形式とする．

$$v_p(f - f') \geq v_p(f) + m$$

ならば，k と k' は $\boldsymbol{X}_m$ で同じ image をもつ．

証明. f (resp. f') に収束する modular 形式を f_i (resp. f'_i) とし，それらの weight を k_i(resp. k'_i) とする．十分大なる i に対して次が成り立つ：

$$v_p(f_i) = v_p(f) = v_p(f') = v_p(f'_i),\ v_p(f_i - f'_i) \geq v_p(f) + m.$$

定理 1 から，k_i と k'_i は $\boldsymbol{X}_m$ で同じ image をもち，これが定理の結果である．**証明終**

系 1: $f = a_0 + a_1 q + \cdots + a_n q^n + \cdots$ を weight $k \in \boldsymbol{X}$ の p 進 modular 形式とする．m を ≥ 0 なる整数で k の $\boldsymbol{X}_{m+1}$ での image が $\neq 0$ となるものとする．すると

$$v_p(a_0) + m \geq \inf_{n\geq 1} v_p(a_n)$$

となる．(換言すると，a_n が全ての $n \geq 1$ について p 整なら，$p^m a_0$ もそうである．)
証明. $a_0 = 0$ なら既に示されている．そうでないときは定数 $f' = a_0$ は weight 0 で

$$v_p(f - f') = \inf_{n\geq 1} v_p(a_n)$$

が成り立つ．f と f' の weight は $\boldsymbol{X}_m$ で異なるから，定理 1' より $v_p(f) + m + 1 \geq v_p(f - f')$ が成り立つ．$v_p(a_0) \geq v_p(f)$ であるから求める結果が得られる．**証明終**

注意: k が $p-1$ で割り切れないとき，すなわち，$\boldsymbol{X}$ 内の部分群 $\mathbb{Z}_p$ に含まれない時，系において $m = 0$ とおける．したがって，a_n が全ての $n \geq 1$ について p 整なら，a_0 も同様であることがわかる．

系 2:

$$f^{(i)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(i)} q^n$$

を weight $k^{(i)}$ の p 進 modular 形式とする．次を仮定する：
(a) $a_n (n \geq 1)$ は $a_n \in \mathbb{Q}_p$ に一様に収束する;
(b) $k^{(i)}$ は $\boldsymbol{X}$ 内に極限 $k \neq 0$ をもつ．
すると $a_0^{(i)}$ は極限 $a_0 \in \mathbb{Q}_p$ をもち，級数

$$f = a_0 + a_1 q + \cdots + a_n q^n + \cdots$$

は weight k の p 進 modular 形式になる．

証明．仮定 $\lim k^{(i)} \neq 0$ より，整数 m が存在して，すべての $k^{(i)}$ が $\boldsymbol{X}_m$ で零でない像をもつ．一方，(a) より $t \in \mathbb{Z}$ が存在して，全ての $n \geq 1$，全ての i に対して $v_p(a_n^{(i)}) > t$ が成り立つ．したがって系 1 より，全ての i について $v_p(a_0^{(i)} > t - m$ が成り立つ．$\{a_0^{(i)}\}$ は $\mathbb{Q}_p$ の相対コンパクト部分集合となる．$\{i_j\}_j$ を $\{i\}$ の部分列で，$a_0^{(i_j)}$ が $\mathbb{Q}_p$ の元 a_0 に収束するものとすれば，級数

$$f = \lim f^{(i_j)} = a_0 + a_1 q + \cdots + a_n q^n + \cdots$$

はあきらかに weight k の p 進 modular 形式となる．さらに，$\{i'_j\}_j$ を $\{i\}$ の他の部分列で，$a_0^{(i'_j)}$ が a'_0 に収束するものとする．級数 $f' = a'_0 + a_1 q + \cdots + a_n q^n + \cdots$ は weight k の p 進 modular 形式で，$f - f' = a_0 - a'_0$ も同様である．$a_0 = a'_0$ でないとすれば，$a_0 - a'_0$ は weight 0 であるから矛盾である．この様にして，a_0 は部分列 $\{i_j\}_j$ のとり方によらず決まり，これは $a_0^{(i)}$ がそこに収束することを示している．**証明終**

1.6. 例：p 進 Eisenstein 級数

$k \in \boldsymbol{X}$ とする．n が ≥ 1 である整数のとき，次で定義される p 進整数を $\sigma^*_{k-1}(n)$ で表す：

$$\sigma^*_{k-1}(n) = \sum d^{k-1},$$

ここで，和は n の因子 d で p と**素**なもの全体を動く．d は p 進整数だから，d^{k-1} は意味をもつ．1.4 節，a) 参照.
今 k を**偶**とする．偶数 $k_i \geq 4$ の列を普通の意味で無限大になり（$|k_i| \to \infty$ で表す），$\boldsymbol{X}$ の中で k にいくものとする．このようなものは明かにとれる．すると次を得る：

$$\lim \sigma_{k_i-1}(n) = \sigma^*_{k-1}(n) \quad \text{in} \quad \mathbb{Z}_p.$$

実際 d^{k_i-1} は，d が p で割り切れば（$|k_i| \to \infty$ だから）0 に収束し，そうでないときは（$k_i \to k$ in $\boldsymbol{X}$ だから）d^{k-1} に収束する．さらにその収束は n に関して一様である．$\sigma_{k_i-1}(n)$ は Eisenstein 級数

$$G_{k_i} = -\frac{B_{k_i}}{2k_i} + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k_i-1}(n) q^n$$

の ≥ 1 なる index の係数で，定数項は $\frac{1}{2}\zeta(1-k_i)$ だから $-\frac{B_{k_i}}{2k_i}$ に等しい．定理 1' の系 2 より，$k \neq 0$ なら，G_{k_i} は weight k の p 進 modular 形式 G_k^* への極限を持つ：

$$G_k^* = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}^*(n) q^n, \quad \text{where} \qquad a_0 = \frac{1}{2} \lim_{i \to \infty} \zeta(1-k_i).$$

この極限は列 k_i のとり方によらず決まり，**weight $\boldsymbol{k}$ の$\boldsymbol{p}$ 進 Eisenstein 級数**と呼ばれる．定数項 a_0 を $\frac{1}{2}\zeta^*(1-k)$ で表せば，

$$G_k^* = \frac{1}{2}\zeta^*(1-k) + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}^*(n) q^n \quad (k \in \boldsymbol{X}, k: \text{偶} \neq 0)$$

である．関数 ζ^* は $\boldsymbol{X}-1$ の奇数元上にも定義され，定理 1' の系 2 よりこの関数が**連続**であることがわかる（G_k^* は k の連続性のみに依存している）．ζ^* は基本的には **Kubota-Leopoldt の$\boldsymbol{p}$ 進ゼータ関数**[13] である．精確には次の通りである：

定理 3: (i) $p \neq 2$ かつ (s,u) を $\neq 1$ なる $\boldsymbol{X} = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ の奇数元とすると

$$\zeta^*(s,u) = L_p(s, \omega^{1-u})$$

となる．ここで $L_p(s,\chi)$ は指標 χ の p 進 L 関数（Iwasawa [9], p.29-30）で ω は [9], p.18 に定義されている Teichmüller 指標と呼ばれているもの．
(ii) $p=2$ かつ s が $\neq 1$ なる $\boldsymbol{X} = \mathbb{Z}_2$ の奇数元とすれば

$$\zeta^*(s) = L_2(s;\chi^0)$$

である（[9],p.29-30）．

証明. ζ' を

$$\begin{aligned} (s,u) &\longrightarrow L_p(s, \omega^{1-u}) && \text{if} \quad p \neq 2 \\ s &\longrightarrow L_p(s;\chi^0) && \text{if} \quad p = 2 \end{aligned}$$

で定義される関数とする．[9] の結果より，ζ' は連続で

$$k \in 2\mathbb{Z}, \quad k \geq 2 \text{ のとき} \quad \zeta'(1-k) = (1-p^{k-1})\zeta(1-k)$$

が成り立つ．$k \in 2\boldsymbol{X}$，$k \neq 0$ であり，$\{k_i\}$ を k に収束する列とすれば

$$\zeta'(1-k) = \lim_{i \to \infty} \zeta'(1-k_i) = \lim_{i \to \infty} (1-p^{k_i-1})\zeta(1-k_i)$$

が成り立つ．しかしながら，$|k_i|$ は $+\infty$ にいくから $\lim_{i\to\infty}(1-p^{k_i-1}) = 1$ であり，結局

$$\zeta'(1-k) = \lim_{i \to \infty} \zeta(1-k_i) = \zeta^*(1-k)$$

が示され，$\zeta' = \zeta^*$ が示される．**証明終**

例：

素数 p を $p \equiv 3 \pmod 4$ かつ $p \neq 3$ とする．k を $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ の元 $(1, \frac{p+1}{2})$ とする．すると次が示される：

$$G_k^* = \frac{1}{2}h(-p) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{d|n} \left(\frac{d}{p}\right) q^n,$$

ここで $h(-p)$ は虚 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ の類数．

2. Hecke 作用素

2.1. 作用素 T_ℓ, U, V, θ の p 進 modular 形式上の作用

$\mathbb{Q}_p$ に係数をもつ形式的ベキ級数

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$$

に対して

$$f|U = \sum_{n=0}^{\infty} a_{pn} q^n, \quad f|V = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^{pn}$$

とおく．$\neq p$ なる素数 ℓ と，$k \in \boldsymbol{X}$ にたいして

$$f|_k T_\ell = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\ell n} q^n + \ell^{k-1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^{\ell n}$$

とおく．k がわかっている場合は $f|_k T_\ell$ の代りに $f|T_\ell$ と表す．

定理 4: f を weight k の p 進 modular 形式とすれば，

$$f|U, \qquad f|V, \qquad f|_k T_\ell \ \ (\ell: \text{ prime} \neq p)$$

もそうである．

証明. $f_i = \sum\ a_{n,i} q^n$ を有理係数をもつ（通常の意味の）modular 形式で

$$\lim_{i\to\infty} f_i = f$$

となるものとする．場合によっては f_i を $f_i E_{(p-1)p^i}$ で置き換えることにより，f_i の weight k_i が $|k_i| \to \infty$ となると仮定してよい．すべての素数 ℓ に対して，f_i を Hecke 作用素 T_ℓ で移した $f_i|T_\ell$ は，weight k_i の modular 形式となり次で与えられる（例えば [3], [17] 参照）：

$$f_i|T_\ell = \sum\ a_{\ell n,i} q^n + \ell^{k_i-1} \sum\ a_{n,i} q^{\ell n}.$$

$\ell \neq p$ の場合（この場合 ℓ は p 進単数だから）$\lim_{i\to\infty} \ell^{k_i-1} = \ell^{k-1}$ となり，$\ell = p$ の場合（今 $|k_i| \to \infty$ だから）$\lim_{i\to\infty} \ell^{k_i-1} = 0$ が成り立つ．したがって $f_i|T_\ell$ は $\ell \neq p$ なら $f|T_\ell$ に収束し，$\ell = p$ なら $f|U$ に収束することがわかり，これより $f|T_\ell$ と $f|U$ が weight $\lim_{i\to\infty} k_i = k$ の p 進 modular 形式であることが導かれる．f_i に上の結果を適用すれば，$f_i|U$ は weight k_i の p 進 modular 形式であり，$f_i|T_p$ は weight k_i の modular 形式であるから, 結局 $f_i|V = p^{1-k_i}(f_i|T_p - f_i|U)$ が weight k_i の p 進 modular 形式となることがわかる．$f|V = \lim_{i\to\infty} f_i|V$ であるから，$f|V$ も weight k の p 進 modular 形式となる．**証明終**

注意: p と素な整数 m にたいして，同様に Hecke 作用素 T_m が定義される．それらの作用は相互に可換で，U や V とも可換であり，次が成り立つ：

$$(m,n) = 1 \text{ ならば } \quad T_m T_n = T_n T_m = T_{mn},$$

$$\ell\text{が素数で } n \geq 1 \text{ ならば } T_\ell T_{\ell^n} = T_{\ell^{n+1}} + \ell^{k-1} T_{\ell^{n-1}}.$$

例: 次が成り立つ：

$$G_k^*|T_\ell = (1+\ell^{k-1}) G_k^* \quad \text{かつ} \quad G_k^*|U = G_k^*.$$

k が ≥ 2 の偶数ならば，直ちに

$$G_k^* = G_k - p^{k-1} G_k|V = G_k|(1 - p^{k-1}V)$$

が得られる．これより

$$G_k = G_k^*|(1-p^{k-1}V)^{-1} = G_k^* + p^{k-1}G_k^*|V + \cdots + p^{m(k-1)}G_k^*|V^m + \cdots$$

が得られる．$k=2$ とすれば，この公式から $G_2 = -P/2$ が weight 2 の p 進 modular 形式の級数の和となる．したがって P は **weight 2 のp 進 modular 形式**である．

定理 5: $f = \sum a_n q^n$ を weight k の p 進 modular 形式とする．
(a) 級数

$$\theta f = q\frac{df}{dq} = \sum n\, a_n\, q^n$$

は weight $k+2$ の p 進 modular 形式である．
(b) 全ての $h \in \boldsymbol{X}$ に対して，級数

$$f|R_h = \sum_{(n,p)=1} n^h a_n\, q^n$$

は weight $k+2h$ の p 進 modular 形式である．

証明. $\{f_i\}$ を有理係数をもつ modular 形式の列で $\lim_{i\to\infty} f_i = f$ となるものとし，f_i の weight を k_i とする．$\theta f_i = \frac{k_i}{12}Pf_i + g_i$ で g_i は weight k_i+2 と書ける（[15], [22] 参照）．P は weight 2 の p 進 modular 形式だから，θf_i は weight k_i+2 の p 進 modular 形式となり，極限をとれば θf が weight $k+2$ の p 進 modular 形式になることがわかる．
正整数の列 h_i で

$$h_i \to h \quad \text{in } \boldsymbol{X} \quad \text{かつ} \quad |h_i| \to \infty$$

となるものを選ぶ．先に述べたことにより $\theta^{h_i} f$ は weight が $k+2h_i$ の p 進 modular 形式である．$i\to\infty$ のとき $\theta^{h_i} f$ は $f|R_h$ に行くから，$f|R_h$ は weight $k+2h$ の p 進 modular 形式となる．**証明終.**

注意: 次の式が成り立つ：

$$(\theta f)|U = p\theta(f|U), \quad f|R_h|U = 0,$$

$$\theta(F|V) = p(\theta f)|V, \;\; (\theta f)|_{k+2}T_\ell = \ell\theta(f|_k T_\ell), \;\; f|V|R_h = 0$$

また，$\neq p$ なる全ての素数 ℓ に対して

$$(f|R_h)|_{k+2h}T_\ell = \ell^h (f|_k T_\ell)|R_h$$

が成り立つ．

例:
$h=0$ のときは

$$f|R_0 = \lim_{m\to\infty} \theta^{(p-1)p^m} f = f|(1-UV) = \sum_{(n,p)=1} a_n\, q^n$$

を得る．
$h = (0, \frac{p-1}{2}) \in \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}, \quad p \geq 3$ ならば，

$$f|R_h = \lim_{m\to\infty} \theta^{(p-1)p^m/2} f = \sum \left(\frac{n}{p}\right) a_n\, q^n$$

が成り立つ．

2 章， 以下の節省略

2.2. 縮約 (contraction) の性質
2.3. p 進 modular 形式の定数項の計算への応用

3. $\Gamma_0(p)$ **上の modular 形式**
この節の目的は経験的にはよく知られた次の原理を証明することである：

$\Gamma_0(p)$ **上の任意の modular 形式は**, $SL_2(\mathbb{Z})$ **上**p **進的である．**

興味深い方法は Atkin によるもので，Eisenstein 級数の係数の性質を用いるものである．別の方法は Deligne の定理に基づくもので Katz[10] や Koike[12] に見られる．
3.1. 注意
a) **記号**
f を複素上半空間 $\mathbb{H} = \{z \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ 上の関数とする；$\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ を $\det > 0$ なる実行列，k を整数；$\mathbb{H}$ 上の関数 $f|_k\gamma$ を

$$(f|_k\gamma)(z) = \det(\gamma)^{k/2}(cz+d)^{-k}\, f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)$$

で定義する．すると $(f|_k\gamma)|_k\gamma' = f|_k\gamma\gamma'$ である．k が既知なら $f|_k\gamma$ の代わりに単に $f|\gamma$ と書くことにする．

b) $\Gamma_0(p)$ **上の modular 形式**
群 $\Gamma_0(p)$ は行列 $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ で $c \equiv 0 \pmod p$ を満たすもののなす $SL_2(\mathbb{Z})$ の部分群として定義される．これは $SL_2(\mathbb{Z})$ の index $p+1$ の部分群である．これは $GL_2(\mathbb{Q})$ の中で行列 $W = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ p & 0 \end{smallmatrix}\right)$ によって正規化される．
k を整数とする．$\Gamma_0(p)$ 上の **weight**k **の modular 形式**とは次を満たす $\mathbb{H}$ 上の正則関数のことである：

(i) **全ての**$\gamma \in \Gamma_0(p)$ **に対して**$f|_k\gamma = f$;
(ii) **関数**f **と関数**$f|_kW$ **は全ての**$z \in \mathbb{H}$ **について(すなわち，下記の**$|q| < 1$ **なる全ての**q **について) 収束するような級数展開**

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n, \qquad f|_kW = \sum_{n=0}^{\infty} b_n q^n,$$
$$(q = e^{2\pi iz},\ a_n \in \mathbb{C},\ b_n \in \mathbb{C})$$

を持つ．

f が modular 形式なら $f|W$ もそうで，$f|W^2 = f$ が成り立つ．
k が < 0 の場合や奇数の場合は，weight k の全ての modular 形式は，零である．したがって，k は偶数で ≥ 0 の場合を考えればよい．

c) $\Gamma_0(p)$ **上の modular 形式のトレース**
f を $\Gamma_0(p)$ 上の weight k の modular 形式とする．$\Gamma_0(p)\backslash SL_2(\mathbb{Z})$ の代表系 $\gamma_1, \ldots, \gamma_{p+1}$ を選んで

$$\mathrm{Tr}(f) = \sum_{j=1}^{p+1} f|_k\gamma_j$$

とおく．$\mathrm{Tr}(f)$ は γ_j 達のとり方によらず決まり，$SL_2(\mathbb{Z})$ の weight k の modular 形式となり，f の**トレース**と呼ばれる．その級数展開は次の様になる：

補題 7. $f=\sum a_nq^n$, $f|_kW=\sum b_nq^n$ とすれば
$$\mathrm{Tr}(f)=\sum a_nq^n+p^{1-k/2}\sum b_{pn}q^n=f+p^{1-k/2}(f|_kW)|U$$
である．

代表元として $\gamma_j=\left(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&j\end{smallmatrix}\right)$, $1\le j\le p$, と $\gamma_{p+1}=1$ をとる．項 $f|_k\gamma_{p+1}$ は f である．その他の項を計算しよう．$g=f|_kW$ とおき，γ_j $(1\le j\le p)$ を $W\beta_j$ の形に書く．ここで $\beta_j=\left(\begin{smallmatrix}\frac{1}{p}&\frac{j}{p}\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ である．すると次が得られる．
$$\sum_{j=1}^{p}f|_k\gamma_j=\sum_{j=1}^{p}g|_k\beta_j.$$
で，これは関数
$$z\longmapsto p^{-k/2}\sum_{j=1}^{p}g\left(\frac{z+j}{p}\right)$$
である．簡単な計算により
$$\sum_{j=1}^{p}g\left(\frac{z+j}{p}\right)=p(g|U)(z)$$
がわかり補題が示された．

注意
1) 上の計算は，必ずしも正則とは限らない weight k の **modular 関数**についても適用できる．その差は級数に負ベキの項が表れることだけである．
2) 補題 7 を $f|_kW$ に適用すれば
$$\mathrm{Tr}(f|_kW)=f|_kW+p^{1-k/2}f|U$$
が得られ，これは $f|U$ が $\Gamma_0(p)$ 上の weight k の modular 形式であることを示す．
f が $SL_2(\mathbb{Z})$ 上の modular 形式ならば，$f|_kW=p^{k/2}f|V$ を得る．これは $W=\left(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ と分解して f が $\left(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ で不変であることを使えばよい．以上のことから
$$\mathrm{Tr}(f|_kW)=p^{k/2}f|V+p^{1-k/2}f|U=p^{1-k/2}f|_kT_p$$
が得られる．この様に Hecke 作用素 T_p は作用素 Tr に還元される．
3) $k\ge 4$ とする．$\Gamma_0(p)$ 上の weight k の modular 形式 f で $\mathrm{Tr}(f)=\mathrm{Tr}(f|_kW)=0$ となるものは Atkin-Lehner[3] の「new forms」の一次結合に他ならない．

d) **有理性と整性**
省略

3.2 $\Gamma_0(p)$ から$SL_2(\mathbb{Z})$ への移行

定理 10. $f=\sum a_n q^n$ を $\Gamma_0(p)$ 上の weight k の modular 形式とする．a_n が有理数なら f は（1.4 節の意味で）weight が k の p 進 modular 形式である．
(換言すれば，f は 1.4 節の空間 $\boldsymbol{X}$ 内で k に行く weight が k_m の $SL_2(\mathbb{Z})$ 上の modular 形式 f_m の極限である．)

$a \geq 4$ を $p-1$ で割り切れる偶数とし

$$g = E_a - p^{a/2}\, E_a|_a W = E_a - p^a\, E_a|V$$

とおく．ここで E_a は weight が a の Eisenstein 級数である（1.1 節参照）．g が $\Gamma_0(p)$ 上の weight a の modular 形式になることは明らかである（3.1 節参照）．さらに次が成り立つ：

補題 8. $g \equiv 1 \pmod p$ かつ $g|_a W \equiv 0 \pmod{p^{1+a/2}}$ が成り立つ．
(合同の意味は, g と $g|_a w$ の q の有理係数に関するものである．)

実際 $g \equiv 1 \pmod p$ は $E_a \equiv 1 \pmod p$ の結果である．
一方

$$g|_a W = E_a|_a W - p^{a/2} E_a = p^{a/2}(E_a|V - E_a)$$

を得る．$E_a \equiv 1 \equiv E_a|V \pmod p$ だから，結局 $g|_a W$ が mod $p^{1+a/2}$ で 0 と合同であることがでる．

定理 10 の証明に戻る．f に関する仮定より, f は $\mathbb{Q}$ 上有理的で $f|_k W$ もそうである (3.1 節参照)．m を ≥ 0 なる整数とすれば，$f\, g^{p^m}$ は $\Gamma_0(p)$ 上の weight $k_m = k + ap^m$ の modular 形式で，$\mathbb{Q}$ 上有理的である．それゆえ，その**トレース**$f_m = \mathrm{Tr}(f\, g^{p^m})$ は $SL_2(\mathbb{Z})$ 上の modular 形式で，有理係数をもち，weight k_m である．k_m は $\boldsymbol{X}$ 内で k に行くから，$\lim f_m = f$ であること，すなわち m が無限大に行く時，$v_p(f_m - f)$ が無限大になることを示せば定理が証明されたことになる．次の結果はこれを精密に述べたものである：

定理 9. 次の不等式が成り立つ:

$$v_p(f_m - f) \geq \inf\left(m + 1 + v_p(f), p^m + 1 + v_p(f|_k W) - \frac{k}{2}\right).$$

($f \neq 0$ なら，$v_p(f)$ と $v_p(f|_k W)$ は**有限**であることに注意する．これは f と $f|_k W$ の係数の分母が有界であることによる．3.1 節参照).

$f_m - f$ を $(f_m - fg^{p^m}) + f(g^{p^m} - 1)$ の形に書く．補題 8 によれば，$g \equiv 1 \pmod p$ より，$g^{p^m} \equiv 1 \pmod{p^{m+1}}$ となり

$$v_p(f(g^{p^m} - 1)) \geq m + 1 + v_p(f)$$

を得る．一方，補題 7 より

$$f_m - fg^{p^m} = p^{1-k_m/2}(fg^{p^m}|_{k_m} W)|U$$

となり

$$v_p(f_m - fg^{p^m}) \geq 1 - k_m/2 + v_p(f|_k W) + p^m v_p(g|_a w)$$

が得られる．補題 8 を適用すれば結局次が得られる：

$$\begin{aligned} v_p(f_m - fg^{p^m}) &\geq 1 - (k + ap^m)/2 + v_p(f|_k W) + p^m(1 + a/2) \\ &\geq p^m + 1 + v_p(f|_k w) - k/2. \end{aligned}$$

補題 9 はこれらの公式と次の不等式から明らかである：

$$v_p(f_m - f) \geq \inf(v_p(f_m - fg^{p^m}), v_p(f(g^{p^m} - 1))).$$

我々は f は 2 点 $i\infty, 0$ で正則と仮定した．これは，f が $i\infty$ **で正則，**0 **で有理型であること**で十分である．証明は上と同様で，形式 g が 0 で消え，従って十分大なる m に対して，fg^{p^m} が modular 形式となり，$f = \lim \mathrm{Tr}(fg^{p^m})$ である．
さらに

$$j = \frac{Q^3}{\Delta} = q^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c(n)q^n$$

とおくと定理 10 を関数 $f = j|U = \sum c(pn)q^n$ に適用できて，これは点 0 で位数 p の極をもつ．結局 $j|U$ **が weight** 0 **の**p **進 modular 形式**となることがわかる．これは Deligne の定理の弱い形の結果の再発見である．

3.4 $\Gamma_0(p)$ 上の "Neben 型"の形式について

$p \geq 3$ とする．ε を mod p の指標，すなわち，乗法群 $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ から $\mathbb{C}^*$ への準同型とする．整数 n に対して，その reduction mod p を $\tilde{n}$ で表すとき

$$\tilde{n} = 0 \text{ のとき } \quad \varepsilon(n) = 0 \qquad \text{そうでないとき } \quad \varepsilon(n) = \varepsilon(\tilde{n})$$

とおく．
ε を $\Gamma_0(p)$ に拡張する:

$$\gamma = \begin{pmatrix} a\ b \\ c\ d \end{pmatrix} \text{に対して} \quad \varepsilon(\gamma) = \varepsilon(a)^{-1} = \varepsilon(d).$$

これは $ad \equiv 1 \pmod p$ であるから意味をもつ．

$k \in \mathbb{Z}$ とする．次の条件を満たす $\mathbb{H}$ 上の関数 f を $\Gamma_0(p)$ **上の**(k, ε) **型の modular 形式**と呼ぶ **(Neben 型の modular 形式)：**
(i) すべての $\gamma \in \Gamma_0(p)$ に対して $f|_k\gamma = \varepsilon(\gamma)f$;
(ii) 前記 (ii) と同じ．

$\varepsilon = 1$ の場合（Hecke [7], p.809 の "Haupttypus"）は 3.1 節の意味での weight k の modular 形式の再説で，$\varepsilon \neq 0$ の場合は Hecke の"Neben 型"の modular 形式と呼ばれる．
$f \neq 0$ ならば，$k \geq 0$ かつ $\varepsilon(-1) = (-1)^k$ となる．換言すれば，k は $\varepsilon(-1) = 1$ なら偶数，$\varepsilon(-1) = -1$ なら奇数である．
f は級数展開

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$$

をもつ．ここで $a_n \in \mathbb{C}$. 1 の $(p-1)$-乗根のなす群を μ_{p-1} で表すことにする．我々は a_n が体 $\mathbb{Q}(\mu_{p-1})$ に含まれる時，級数 f が p 進 modular 形式となることを示そう

（これは定理 10 の一般化である）．精確に述べる．p は体 $\mathbb{Q}(\mu_{p-1})$ の中で次数 1 の素イデアル

$$\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r, \quad ここで\ r = \phi(p-1) = [\mathbb{Q}(\mu_{p-1}) : \mathbb{Q}]$$

に完全分解する． 素イデアルを一つ固定すれば，$\mathbb{Q}(\mu_{p-1})$ を p 進体 $\mathbb{Q}_p$ への埋めこみ σ が定義される．p 進体 $\mathbb{Q}_p$ の 1 の $(p-1)$-乗根のなす群は（「乗法的」に表現して）$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ に canonical に同一視されるので，σ が μ_{p-1} と $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ の**同型**を与えることがわかり，さらに全ての同型はこのように (適当に $\mathfrak{p}_i$ を選ぶ) ことにより得られる．$\varepsilon : (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \longrightarrow \mu_{p-1}$ と $\sigma : \mu_{p-1} \longrightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ を合成すると $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ の自己同型が得られ，これは必然的に $x \longmapsto x^\alpha$ の形をしている．ここで $\alpha \in (\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z})^*$ である．この記号のもとで次を得る：

定理 12. $f = \sum a_n q^n$ を $\Gamma_0(p)$ 上の (k, ε) 型の modular 形式で, 全ての n に対して $a_n \in \mathbb{Q}(\mu_{p-1})$ となるものとする．すると級数

$$f^\sigma = \sum a_n^\sigma q^n, \quad 係数\ a_n^\sigma \in \mathbb{Q}_p$$

は weight $k + \alpha$ の p 進 modular 形式となる．
（精確には，α は weight の群 $\boldsymbol{X} = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ のなかで，元 $(0, \alpha)$ と同一視し，$k + \alpha$ は $(k, k+\alpha)$ と同一視するものとする．$f \neq 0$ と考えることができて，そのとき $\varepsilon(-1) = (-1)^k$ で，$k + \alpha$ は $\boldsymbol{X}$ の**偶元**である.)

$\varepsilon = 1$ の時は f は有理係数を持つ（3.1 節の意味での）weight k の modular 形式の $\mathbb{Q}_p$-線形結合として表され，定理 12 はこの場合定理 10 の結果である．したがって $\varepsilon \neq 1$ と考えてよい．
特別な場合から始める：

補題 10. $k \geq 1$ かつ $\varepsilon(-1) = (-1)^k$ とすれば，級数

$$G_k(\varepsilon) = \frac{1}{2} L(1-k, \varepsilon) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{d|n} \varepsilon(d) d^k \right) q^n$$

は $\Gamma_0(p)$ 上の (k, ε) 型の modular 形式である．その係数は $\mathbb{Q}_p(\mu_{p-1})$ に含まれ，

$$G_k(\varepsilon)^\sigma = G_h^*$$

が成り立つ．ここで G_h^* は，1.6 節の意味で weight $h = k + \alpha$ の p 進 modular 形式になる．
$G_k(\varepsilon)$ が (k, ε) 型であることは level p の Eisenstein 級数の Hecke の結果である（cf. [7], p.461-486, さらに 5 節の付録参照）．精確に述べると， [7] の記号を使えば，$G_k(\varepsilon)$ は定数を除いて関数

$$\sum_{\lambda \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*} \varepsilon(\lambda)^{-1} G_k(z; 0, \lambda, p)$$

と一致する．$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(p)$ なら $G_k(z; 0, \lambda, p)|_k \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = G_k(z; 0, d\lambda, p)$ であるから，$G_k(\varepsilon)|_k \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = \varepsilon(d) G_k(\varepsilon)$ が導かれ，これは $G_k(\varepsilon)$ が (k, ε) 型であることを示す．その係数は，ε の値が生成する体に含まれ，それらは $\mathbb{Q}(\mu_{p-1})$ に含まれる．$G_k(\varepsilon)^\sigma$ が G_h^* に一致することを示す．$n \geq 1$ ならば，$G_k(\varepsilon)^\sigma$ の n 番目の係数 a_n^σ は $\sum \varepsilon(d)^\sigma d^{k-1}$，$n$ の p と素な因子 d にわたる和，に一致する．d を $\omega(d) < d >$ の形に書き表す．こ

こで $\omega(d)^{p-1}=1, <d>\equiv 1 \pmod p$ である (Iwasawa [9], p.18, 参照)．α の定義によれば，$\varepsilon(d)^\sigma=\omega(d)^\alpha=d^\alpha$ が成り立つ．これより

$$a_n^\sigma=\sum d^{k+\alpha-1}=\sigma_{h-1}^*$$

が成り立ち，これは G_h^* の n 番目の係数である．n 番目の係数が等しいことが示された．

一方，$L(1-k,\varepsilon)^\sigma$ は Iwasawa [9], §3 での記号を使えば，

$$-\frac{B_{k,\omega^\alpha}}{k}=L_p(1-k,\omega^{k+\alpha})$$

に一致する．1.6 節の定理 3 より

$$L(1-k,\varepsilon)^\sigma=\zeta^*(1-k,1-k-\alpha)=\zeta^*(1-h)$$

が得られる．$G_k(\varepsilon)^\sigma$ の定数項が G_h^* のそれに一致することが確かめられた．これで補題の証明が完成した．**補題の証明終**

定理 12 の証明に戻る． $\boldsymbol{X}$ 内で α に収束し，全ての n について $k_n-\alpha\in\boldsymbol{X}$ となるような整数の列 $k_n\geq 1$ をとる．

$$g_n=\lambda_n^{-1}\,G_{k_n}(\varepsilon^{-1})$$

とおく．ここで λ_n は級数 $G_{k_n}(\varepsilon^{-1})$ の定数項である（補題 10 参照）．積 fg_n は $\Gamma_0(p)$ 上 $(k+k_n,1)$ 型の modular 形式である．より詳しく $f^\sigma g_n^\sigma$ は weight $k+k_n$ の p 進 modular 形式になる．一方，定理 10 を k_n と ε^{-1} で適用すれば，$g_n^\sigma=E_{h_n}$ を得る．ここで $h_n=k_n-\alpha$. h_n は $\boldsymbol{X}$ 内で 0 に行くから，結果として g_n^σ は $E_0^*=1$ に行く．ここで $\lim f^\sigma g_n^\sigma=f^\sigma$ で，f^σ は weight $k+\alpha=\lim(k+k_n)$ の p 進 modular 形式となり，証明が完結した．

注意

定理 12 の仮定のもとで，$f|_kW$ が (k,ε^{-1}) 型で，$\mathbb{Q}(\mu_{p-1})$ に係数をもつことが証明できる．$f|_kW^2=\varepsilon(-1)f$ が得られる．

以下省略

4. p 進 modular 形式の解析族

4.1. 岩澤代数（$p\neq 2$）

4.2. 岩澤代数（$p=2$）

4.3.Λ の元の級数展開による特徴付け

4.4.Λ の元の補間による特徴付け

4.5. 例： p 進 Eisenstein 級数の係数

4.6. p 進 modular 形式の族 （weight が $p-1$ で割り切れない場合）

4.7. p 進 modular 形式の族 （weight が $p-1$ で割り切れる場合）

5. p 進ゼータ関数

5.1. 記号

文字 K は $\mathbb{Q}$ 上の r 次総実代数体を表すものとする：$K\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$ は $\mathbb{R}^r$ と同型である．K の整数環を $\mathcal{O}_K$，その（$\mathbb{Z}$ に関する）差積（Differente）を $\mathfrak{d}$ で表し，判別式を d とする．

x（resp. $\mathfrak{a}$）を K の元（resp. イデアル）とするとき，Nx（resp. $N\mathfrak{a}$）でそのノル

ムを表す．それは $\mathbb{Q}$ の元（resp. 正元）で，例えば $d = N\mathfrak{d}$ である．x のトレースを $\mathrm{Tr}(x)$ で表す．
K の元 x が**総正**であるとは，全ての埋めこみ $\sigma : K \longmapsto \mathbb{R}$ に対して，$\sigma(x) > 0$ となることをいう．これを $x \gg 0$ で表し，このとき $\mathrm{Tr}(x) > 0$ が成り立つ．
K のゼータ関数は次の式で定義される：

$$\zeta_K(s) = \sum N\mathfrak{a}^{-s} = \prod (1 - N\mathfrak{p}^{-s})^{-1}$$

ここで，$\mathfrak{a}$（resp. $\mathfrak{p}$）は $\mathcal{O}_K$ の $\neq 0$ であるイデアル（resp. $\neq$ なる素イデアル）全体をわたる．この式は $\mathrm{Re}(s) > 1$ で成り立っている．ζ_K は $\mathbb{C}$ 上に有理型関数として拡張され，$s = 1$ で唯一の（simple な）極をもつ．関数

$$d^{s/2}\pi^{-rs/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^r \zeta_K(s)$$

は $s \longmapsto 1 - s$ について不変である（“関数等式”）．その結果，n が ≥ 1 なる整数のとき

$$\begin{aligned} &n \text{ が奇数ならば}(r = 1,\ n = 1 \text{ の場合を除いて}) \quad \zeta_K(1-n) = 0 \\ &n \text{ が偶数ならば} \quad \zeta_K(1-n) \neq 0. \end{aligned}$$

さらに Hecke[7] によって述べられ，Siegel[19] によって証明されたように，$\zeta_K(1-n)$, $n \geq 1$ は**有理数**となる．

5.2. K に付随する modular 形式

k を ≥ 2 なる偶数とする．形式的ベキ級数 g_k を

$$g_k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(g_k) q^n$$

で定義する。ここで，

$$\begin{aligned} a_0(g_k) &= 2^{-r}\zeta_K(1-k) \\ a_n(g_k) &= \sum_{\substack{\mathrm{Tr}(x)=n \\ x \in \mathfrak{d}^{-1}, x \gg 0}} \sum_{\mathfrak{a} | x\mathfrak{d}} N(\mathfrak{a})^{k-1} \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

であり，最初の和においては，x は $\mathfrak{d}^{-1}$ 内の総正な元でトレースが n であるもの全体を動き，2 番目の和においては $x\mathfrak{d})$ を含む $\mathcal{O}_K$ のイデアル $\mathfrak{a}$ を動く（和は $x \in \mathfrak{d}^{-1}\mathfrak{a}$, $x \gg 0,\ \mathrm{Tr}(x) = n$ を満たす対 $(x, \mathfrak{a})$ 全体を動くといってもよく，これは有限和である）．

定理 19 （Hecke-Siegel）．$r = 1,\ k = 2$ の場合を除いて，級数 g_k は $SL_2(\mathbb{Z})$ 上の weight rk の modular 形式となる．
（$r = 1$，すなわち $K = \mathbb{Q}$ の場合は，$g_k = G_k$ となり，$r = 2$ の場合を除かなければならない．1.1 節参照）

$\mathfrak{u}$ を K の一つの分数イデアルとするとき，Siegel([20], p.93) は Hecke の意味で体 K 上の **Eisenstein 級数**（[7], p.381-404）と呼ばれる関数

$$F_k(\mathfrak{u}, z_1, \cdots, z_r), \quad \mathrm{Im}(z_i) > 0$$

を定義した．これは r 個の上半空間の積 $\mathbb{H}^r$ に作用する群 $SL_2(\mathcal{O}_K)$ に関する weight k の modular 形式である．

$F_k(\mathfrak{u}, z_1, \cdots, z_r)$ を $\mathbb{H}^r$ の対角成分 $\mathbb{H}$ への制限すれば関数

$$\Phi_k(\mathfrak{u}, z) = F_k(\mathfrak{u}, z, \ldots, z)$$

は通常の意味での weight rk の modular 形式である．$\Phi_k(\mathfrak{u}, z)$ の係数は [20]，p.94 の式 (19) で与えられている．関数 $F_k(\mathfrak{u}, z_1, \cdots, z_r)$ と $\Phi_k(\mathfrak{u}, z)$ は $\mathfrak{u}$ に単項イデアルを掛けても変化しない．

$$\Phi_k(z) = \sum_{\mathfrak{u}} \Phi_k(\mathfrak{u}, z)$$

とおく．ここで，$\mathfrak{u}$ は K のイデアル類の代表系を動く．Siegel[20] の式 (18) と (19) より次が得られる：

$$n \geq 1 \text{ に対して } a_n(\Phi_k) = e_k\, a_n(g_k) \text{ ここで } e_k = d^{\frac{1}{2}-k}\left(\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!}\right)^r.$$

さらに

$$a_0(\Phi_k) = \zeta_K(k)$$

となり，ζ_K の関数等式より，最後の式は

$$a_0(\Phi_K) = e_k\, 2^{-r}\zeta_K(1-k) = e_k\, a_0(g_k)$$

の形に書き換えことができる．それゆえ $g_k = e_k^{-1}\Phi_k$ が得られ，これは g_k が weight rk の modular 形式であることを示している．

系.
(i) $rk \not\equiv 0 \pmod{p-1}$ ならば，$\zeta_K(1-k)$ は p 整である．
(ii) $rk \equiv 0 \pmod{p-1}$ ならば

$$v_p(\zeta_K(1-k)) \geq -1 - v_p(rk) \quad (p \neq 2),$$
$$v_p(\zeta_K(1-k)) \geq r - 2 - v_p(rk) \quad (p = 2).$$

結果は $a_n(g_k)$ が全ての $n \geq 1$ に対して p **整**であることを考慮に入れれば，1.5 節の定理 1' の系より導かれる（同様に [15] の定理 6 と定理 6' を見よ）．

5.3. 体 K の p 進ゼータ関数

k を $rk \neq 0$ となる $\boldsymbol{X}$ の偶元とする．k にたいして，5.2 節の形式 g_k の極限をとることによって，**weight rk の p 進 modular 形式 g_k^*** を付随させる．その手続きは 1.6 節の $\mathbb{Q}$ の場合と同様である．偶数 $k_i \geq 4$ の列で $|k_i| \to \infty$ かつ $\boldsymbol{X}$ 内で $k_i \to k$ となるものを選ぶ．u を p 進整数とすれば

$$u \equiv 0 \pmod{p} \text{ なら } \lim_{i\to\infty} u^{k_i} = 0,$$
$$\text{それ以外の場合 } \lim_{i\to\infty} u^{k_i} = u$$

が得られ，この収束は u について一様である．結局

$$\lim_{i\to\infty} a_n(g_{k_i}) = \sum_{x,\mathfrak{a}} (N\mathfrak{a})^{k-1}, \quad (n \geq 1)$$

を得る．ここで，和は対 $x, \mathfrak{a}$ で $\mathfrak{a}$ は p と素な $\mathcal{O}_K$ のイデアル，x は $x \in \mathfrak{d}^{-1}\mathfrak{a}$, $x \gg 0$ かつ $\mathrm{Tr}(x) = n$ を満たすようなものを動く．さらにこの収束は n について一様である．1.5 節の定理 1' の系 2 を適用すれば，**g_{k_i} が weight rk の p 進 modular 形**

式 g_k^* を極限を持つことがわかり，それは k_i のとり方によらない．g_k^* の定数項を $2^{-r}\zeta_K^*(1-k)$ で表すと，次を得る：

$$a_0(g_k^*) = 2^{-r}\zeta_K^*(1-k) = 2^{-r}\lim_{i\to\infty}\zeta_K(1-k_i),$$
$$a_n(g_k^*) = \sum_{\substack{\mathrm{Tr}(x)=n\\ x\in\mathfrak{d}^{-1},x\gg 0}}\ \sum_{\substack{\mathfrak{a}|x\mathfrak{d}\\ (\mathfrak{a},p)=1}} N(\mathfrak{a})^{k-1}, \quad n\geq 1.$$

上で定義した関数 ζ_K^* は体 K の $\boldsymbol{p}$ **進ゼータ関数**と呼ばれる．これは $\mathbb{Q}_p$ に値を持っている．

定理 20. k を ≥ 2 なる偶整数とすれば
$$\zeta_K^*(1-k) = \zeta_{K,S}(1-k) = \zeta_K(1-k)\prod_{\mathfrak{p}\in S}(1-N\mathfrak{p}^{k-1})$$
を得る．（S は p を割る素イデアル $\mathfrak{p}$ の集合である．）

前節の級数 g_k^* を思い出す．定理 19' によれば，この級数は $\Gamma_0(p)$ 上の weightrk の modular 形式で，従って weight rk の p 進 modular 形式である（3.2 節，定理 10 参照）．$n\geq 1$ に対して $a_n(g_k') = a_n(g_k^*)$ だから，$a_0(g_k') = a_0(g_k^*)$ が結論付けられ，定理が得られる．

注意

ζ_K^* が集合 $\{1-k|k:偶数, rk\neq 0\}$ 上連続であることは直ちにわかる．定理 20 はその特徴付け，すなわち，<0 なる奇数の集合上の関数
$$m\longmapsto \zeta_{K,S}(m)$$
の連続的拡張である事実を提供する．（特に，K が $\mathbb{Q}$ 上**アーベル**であるときは，ζ_K^* は Kubota-Leopoldt の意味で K の p 進ゼータ関数に一致する．[13], p.62，これは，後者の関数と同様の性質をもつからである．）ζ_K^* は実際にはさらに**解析的**となる．これを精確に述べる．$k\in\boldsymbol{X}$ を (s,u), $s\in\mathbb{Z}_p$, $u\in\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ と分解する．従って条件 $rk\neq 0$ は $s\neq 0$, $ru\neq 0$ を意味する．$\zeta_K^*(1-k)$ を $\zeta_K^*(1-s,1-u)$ の形に書く．次を得る：

定理 21. u を $\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$, $p\neq 2$ の偶元とする．
(a) $ru\neq 0$ なら，関数 $s\longmapsto\zeta_K^*(1-s,1-u)$ は 4 章で述べた岩澤代数 $\Lambda=\mathbb{Z}_p[\![T]\!]$ に含まれる．
(b) $ru=0$ ならば，関数 $s\longmapsto\zeta_K^*(1-s,1-u)$ は $h(T)/((1+T)^r-1)$, $h\in\Lambda$ の形をしている．

定理 21'. $p=2$ ならば，関数 $s\longmapsto\zeta_K^*(1-s,1-u)$ は $2^r h(T)/((1+T)^r-1)$, $h\in\Lambda$ の形をしている．
（$p=2$ の時は $\zeta_K^*(1-s)$ は $s\in 2\mathbb{Z}_2, s\neq 0$ に対して定義されている．）

以上が Serre の論文の紹介であるが，緒言で述べた様にその後様々な方面に拡張されてきている．実際，Katz 流の幾何学的取り扱いは，Serre の論文と同じ巻に論文として掲載されている．また，最終章に述べられた総実体のゼータ関数の p 進的な性質の解明については，Deligne-Ribet により直ちに結果が得られた．これについては，特に最近 Goren 等が Hilbert modular 形式の場合に研究を行なって結果を得ている（[6]）．

しかし，もっと「素朴な意味」においてもいくつかの問題が残されていると思われる．例えば，Siegel modular 形式の場合に同様の結果が成立するかどうかは余り調べられていないように思われる．そのいくつかを述べておこう：

- 1 章の結果で使われた基本的事実である weight $p-1$ で $f \equiv 1 \pmod{p}$ を満たす modular 形式 f の存在を一般の Siegel modular 形式の場合に示せ．(Hilbert modular 形式の場合は Goren の結果があり，Siegel modular 形式の場合も Deligne による「予想」がある)．
- 1 変数の場合の基本的な結果である定理 1 を Siegel modular 形式の場合に拡張せよ．すなわち，p 進 Siegel modular 形式の概念を直接的に定義せよ．
- 2 章の Hecke 作用素やその他の作用素の p 進 modular 形式への作用に関する結果を Siegel modular 形式の場合に拡張せよ．

等が挙げられる．

References

[1] Y. Amice: Interpolation p-adique, Bull. Soc. Math. France, **92**, 1964, 117-180.
[2] A.O.L. Atkin: Congruences for modular forms, Computers in math. reserch(R.F. Churchhouse and J-C. Herz ed.), 8-19, North-Holland, Amsterdam, 1968.
[3] A.O.L. Atkin and J. Lehner: Hecke operators on $\Gamma_0(m)$, Math. Ann., **185**, 1970, 134-160.
[4] J. Coates and S. Lichtenbaum: On l-adic zeta functions, Ann. of Math. **98**, 1973,498-550.
[5] J. Fresnel: Nombres de Bernoulli et fonctions L p-adiques, Ann. Inst.Fourier, **17**, 1967, 281-333.
[6] E.Z. Goren: "Lectures on Hilbert modular Varieties and Modular Forms", CRM Monograph Series, Vol. **14**, American Mathematical Society, 2002.
[7] E. Hecke: Mathematische Werke, Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen, 1959 (zw.Aufl. 1970).
[8] K. Iwasawa: On p-adic L functions, Ann. of Math., **89**, 1969,p.198-205.
[9] K. Iwasawa: Lectures on p-adic L functions, Ann. Math. Studies **74**, Princeton Univ. Press, 1972.
[10] N. Katz: p-adic properties of modular schemes and modular forms. Lecture Notes in Math. **350**, 69-190, Springer Verlag, 1973.
[11] H.D. Kloosterman: Theorie der Eisensteinschen Reihen von mehreren Veränderlichen, Abh. Math. Sem. Ham., **6**, 1928, 163-188.
[12] M. Koike: Congruences between cusp forms and linear representations of the Galois group, Nagoya Math. J. **64**, 1976, 63-85.
[13] T.Kubota and H.W.Leopoldt: Eine p-adische Theorie der Zetawerte, J. Crelle, 214-215, 1964, 328-339.
[14] J.-P.Serre: Cohomologie des groupes discrets, Ann. Math. Studies 70, 77-169, Princeton Univ. Press, 1971.
[15] J.-P.Serre: Congruences et formes modulaires (d'apres H.P.F.Swinnerton-Dyer), Sém.Bourbaki, 1971/72,Annuaire du College de France, 1972/73, Paris, p.55-60.
[16] J.-P.Serre: Résumé des cours 1971/1972, Annuaire de College du France, 1972/73, Paris, 55-60.
[17] G. Shimura: Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions, Princeton, 1971.
[18] K. Shiratani: Kummer's congruence for generalized Bernoulli numbers and its application, Mem. Kyushu Univ. **26**, 1972, 119-138.
[19] C.L. Siegel: Über die analytische Theorie der quadratischen Formen III, Ann. of Math., **38**,1937, p.212-291 (Gesam.Abh. I, p.469-548).
[20] C.L. Siegel: Berechnung von Zetafunktionen an ganzzahligen Stellen, Göttigen Nach., **10**, 1969, p.87-102.
[21] C.L. Siegel: Über die Fourierschen Koeffizienten von Modulformen, Göttigen Nach., **3**, 1970, p.15-56.
[22] H.P.F.Swinnerton-Dyer:On l-adic representations and congruences for coefficients of modular forms, Lecture Notes in Math. **350**, Springer Verlag, 1973.