D. Lanphier: Petersson norms and liftings of Hilbert modular formsの紹介

岡崎 武生　大阪大学

Introduction

D. Lanphierの結果は次の3パートからなります。

$\mathfrak{H}_{2n}$ 上の Siegel-Eisenstein 級数 $E(\mathscr{Z})$ を埋め込み $\iota : \mathfrak{H}_n \times \mathfrak{H}_n \ni (z, w) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} z & 0 \\ 0 & w \end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{H}_{2n}$ で引き戻したものを $z \in \mathfrak{H}_n$ の保型形式とみなす。このとき、次数 n の Hecke eigen cuspform $f(z)$ に対して Petersson 内積を取ると standard L-関数の特殊値付き倍の $f(w)$ が得られる、という Pullback formula(定理 1.1) の解説。

Pullback formula と、Siegel-Eisenstein 級数の Fourier 係数は $\mathbb{Q}$ に含まれるという M. Harris の結果から、f の stadard L-関数の特殊値の代数性が導かれる。

更に、その特殊値の $\sigma(\in Aut(\mathbb{C}/\mathbb{Q}))$ による共役は、f^σ(f の Fourier 係数の σ-共役を取る事で得られる保型形式) の特殊値に等しいといった性質が導かれる。(定理 2.5) (このような、保型形式から何らかの作業で得た数値を σ で写したものは、元の保型形式の σ-共役から得た数値と等しいという性質を Galois Equivalence Property と呼ぶ。G.E.P と略記する。)

斎藤-黒川リフト (Hecke eigen 楕円保型形式から Hecke eigen Siegel 保型形式を構成する方法) において、preimage と image の standard L-関数の関係と　の G.E.P から、両者の Petersson norm の商が、preimage の Fourier 係数の生成する体に含まれる事と、G.E.P を持つ事がわかる。(定理 3.4) また、斎藤-黒川リフトの Hilbert 保型形式版や池田リフトにおいても同様の事がいえる。(定理 3.5)

0　準備

係数環 A の $2n \times 2n$-size の行列環 $M_{2n}(A)$ の元 $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ にたいし、$n \times n$-size の block 達を $a_g = a, b_g = b, c_g = c, d_g = d$ と書く事にする。

k を $[k : \mathbb{Q}] = m$ の総実代数体とし、$\mathfrak{O}$ で k の整数環をあらわす。整 ideal $\mathfrak{n}$ にたいし、次数 n の symplectic group $Sp_n(\mathfrak{O}) = \{g \in GL_{2n}(\mathfrak{O}) \mid {}^t g \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) g = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\}$ の主合同部分群を $\Gamma(\mathfrak{n}) = \{\gamma \in Sp_n(\mathfrak{O}) \mid 1 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{n}}\}$ であらわす。次数 n の Siegel 上半空間 $\mathfrak{H}_n = \{z = {}^t z \in M_n(\mathbb{C}) \mid \Im z > 0\}$ への $g \in Sp_n(\mathbb{R})$ の作用を $g(z) := (a_g z + b_g)(c_g z + d_g)^{-1}$ とする。保型因子を $j(g, z) := \det(c_g \cdot z + d_g)^{-1}$ と定義する。次数 n、重さ κ、合同部分群

$\Gamma \subset Sp_n(\mathfrak{O})$ に関する、(classical) 正則 Hilbert Siegel 保型形式 F とは、全ての $z \in \mathfrak{H}_n^m, \gamma \in \Gamma$ に対して

$$F(\gamma(z))j(\gamma, z)^\kappa = F(z)$$

を満たす $\mathfrak{H}_n^m$ 上の正則関数の事である。但し、ここでは $\gamma \cdot z = (\gamma_1 \cdot z_1, \ldots, \gamma_m \cdot z_m)$, ($\gamma_j$ は $\gamma \in Sp_n(k)$ の j 番目の共役) $j(\gamma, z)^\kappa = \prod_j j(\gamma_j, z_j)^\kappa$ という意味で使っている。$M_\kappa^n(\Gamma) = M_\kappa(\Gamma)$ でこのような関数全体の空間をあらわす。

このclassical な $F \in M_\kappa(\Gamma)$ は強近似定理 ($Sp_n(k)Sp_n(\mathbb{R})^m$ は $Sp_n(\mathbb{A}_k)$ の稠密集合) により idéle 群 $Sp_n(\mathbb{A}_k)$ 上の関数に次の様にして拡張できる。

なお、$\mathbb{A}_k$-module M の元 x にたいし、x_∞, x_0 で x の無限 part, 有限 part をあらわすことにする。まず、$\tilde{f}(g_\infty) = F(g_\infty(i)) \det(a_{g_\infty} + ib_{g_\infty})^\kappa, g_\infty \in Sp_n(\mathbb{R})^m$ で、$Sp_n(\mathbb{R})^m$ 上の関数に拡張する。$\Gamma(\mathfrak{n})$ を Γ に含まれる最大の主合同部分群とし、$g \in Sp_n(\mathbb{A}_k)$ に対して、強近似定理により

$$g = \delta g_\infty u, \delta \in Sp_n(k), g_\infty \in Sp_n(\mathbb{R})^m, u \in \prod_{v<\infty} \Gamma(\mathfrak{n})_v$$

と表示して、$f(g) = \tilde{f}(g_\infty)$ とおく。$Sp_n(\mathbb{A}_k)$ 上の関数 f は、全ての $\delta \in Sp_n(k), g \in Sp_n(\mathbb{A}_k), u_\infty \in \mathbf{K}_\infty^m, u_0 \in \prod_v \Gamma_n(\mathfrak{n})_v$ に対して

$$f(\delta g u_\infty u_0) = f(g) \det(a_{u_\infty} + ib_{u_\infty})^\kappa,$$

を満たす。ここで $\mathbf{K}_\infty (\subset Sp_n(\mathbb{R}))$ は i を固定する compact maximal subgroup をあらわしている。

このように $F \in M_\kappa(\Gamma)$ から得られた $Sp_n(\mathbb{A}_k)$ 上の関数 f 全体も同じ $M_\kappa(\Gamma)$ であらわす。この拡張の仕方は無矛盾で、f から F が再現可能である。本稿では、もっぱら $Sp_n(\mathbb{A}_k)$ 上の関数を扱う事にする。

f の Fourier 係数を次の様に定義する。

定義 1 (Fourier 係数) まず、$\mathbb{A}_\mathbb{Q}$ 上の指標 ψ_0 を $\psi_0(x) = \exp(2\pi i x), x \in \mathbb{R}$ から、強近似定理で拡張し、$\mathbb{A}_k$ 上の指標を $\psi = \psi_0 \circ Tr_{k/\mathbb{Q}}$ で定義する。

すると、$T = {}^tT \in M_n(k)$ に関する f の *(whole)Fourier* 係数 $W_{f,\,T}(g), g \in Sp_n(\mathbb{A}_k)$ は

$$W_{f,\,T}(g) := \int_{U(k)\backslash U(\mathbb{A}_k)} \overline{\psi}(Trace(Tx)) f(u(x)g))\ dx$$

と定義される。ここで、$U = \{u(x) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mid x$ は対称行列 $\}$ で $U(k)\backslash U(\mathbb{A}_k)$ の *volume* が 1 となる様に *Haar* 測度 dh を取っている。更に、f は正則な F から得られているので、$g = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & {}^ta^{-1} \end{smallmatrix}\right) \in Sp_n(\mathbb{A}_k) \mid a \in GL_n(\mathbb{A}_k)\}$ において、

$$W_{f,\,T}(g) = V_{f,\,T}(a_0)(\det a_\infty)^\kappa \exp(-2\pi\, Trace(T a_\infty {}^t a_\infty))$$

と書ける。(ここで a_∞, a_0 は a の無限 *part*, 有限 *part* をあらわしている。)

我々はこの a_0 のみに依存する関数 $V_{f,\,T}(a_0)$ を f の *Fourier* 係数とよぶ。特に $a_0 = 1_0$ のとき、$V_{f,\,T}(1_0)$ は *classical* な F の *Fourier* 係数。 □

$f \in M_\kappa(\Gamma)$ が全ての非正値な T において $V_{f,\,T}(a_0) = 0$ となるとき、f は cuspform であるという。$M_\kappa(\Gamma)$ の cuspform 全体の部分空間を $S_\kappa(\Gamma)$ であらわす。

次に、Hecke 作用素と standard L-関数の定義を復習する。(c.f. [17])

定義 2 (Hecke 環、Hecke 作用素) 有限素点 v における *Hecke* 環 $H_v(Sp_n(k_v), Sp_n(\mathfrak{O}_v))$ を、$\eta(k_1 g k_2) = \eta(g), k_i \in Sp_n(\mathfrak{O}_v), g \in Sp_{2n}(k_v)$ で *compact support* を持ち連続となるような関数 η 全体とし、*convolution* 積 $*$ を $\eta_1 * \eta_2(g) := \int_{Sp_n(k_v)} \eta_1(gh^{-1})\eta_2(h)dh$ と入れる。(dh は $Sp_n(\mathfrak{O}_v)$ を *1* とする *Haar* 測度)

この時、*Hecke* 作用素 $T_\eta, \eta \in H_v(Sp_n(k_v), Sp_n(\mathfrak{O}_v))$ を

$$T_\eta f(g) := \int_{Sp_n(k_v)} f(gh^{-1})\eta(h)\ dh$$

と定義する。$f \in M_\kappa(\Gamma(\mathfrak{n}))$ が、全ての $v \nmid \mathfrak{n}$ で全ての $\eta \in H_v(Sp_n(k_v), Sp_n(\mathfrak{O}_v))$ に対して、$T_\eta f = \lambda_v(\eta) f, \lambda_v(\eta) \in \mathbb{C}$ となるとき *Hecke eigenform* という。λ_f で f に付随する準同型 $\otimes_{v \nmid \mathfrak{n}} H_v(Sp_n(k_v), Sp_n(\mathfrak{O}_v)) \to \mathbb{C}$ をあらわす。($H_v(Sp_n(k_v), Sp_n(\mathfrak{O}_v))$ は佐武同型により可換代数である。) $\square$

$\dim_{\mathbb{C}} S_\kappa(\Gamma(\mathfrak{n})) < \infty$ で、T_η は $S_\kappa(\Gamma(\mathfrak{n}))$ への adjoint 作用素であるから、$S_\kappa(\Gamma(\mathfrak{n}))$ は eigenforms で張れる事と、$\lambda_v(\eta)$ は totally algebraic である事がわかる。また、2 節で $\{\lambda_f(\eta) \mid \eta \in \otimes_{v \nmid \mathfrak{n}} H_v(Sp_n(k_v), Sp_n(\mathfrak{O}_v))\}$ の生成する体が有限次総実体である事もわかる。

定義 3 (Satake parameter、standard L-関数) 佐武同型により、

$$S_U : H_v(Sp_n(k_v), Sp_n(\mathfrak{O}_v)) \simeq \mathbb{C}[X_1^\pm, \ldots, X_n^\pm]^W$$

である事が知られている。右辺は *Weyl* 群 W による多項式環 $\mathbb{C}[X_1^\pm, \ldots, X_n^\pm]$ の不変元全体。W は n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ と $w_i : X_i \to X_i^{-1}$ で生成される。

次の意味で、佐武同型が f から誘導する *parameter* $\{\alpha_1^{\pm 1}, \ldots, \alpha_n^{\pm 1}\}$ を f の (v における)*Satake parameter* と呼ぶ。$S_U(\eta) = p(X_1, \ldots, X_n)$ ならば、$T_\eta f = p(\alpha_1, \ldots \alpha_n) f$。また、$f$ の *standard L*-関数 $L_S(s, f)$ は

$$L_S(s,f) := \prod_{v \notin S} \left((1 - q^{-s}) \prod_{i=1}^{n} (1 - \alpha_i q^{-s})(1 - \alpha_i^{-1} q^{-s}) \right)^{-1},\ q = N_{k/\mathbb{Q}}(v)$$

と定義する。ここで $S = \{\infty_j\}_{1 \le j \le m} \cup \{v < \infty \mid v \mid \mathfrak{n}\}$ なる素点集合である。 $\square$

1 Pullback formula

まず最初に、Pullback formula の土台となる、k 上の次数 $2n$ の正則 Hilbert Siegel Eisenstein series $E_{2n}(g; \kappa, \mathfrak{n}, \theta) \in M_\kappa^{2n}(\Gamma(\mathfrak{n})), \kappa > 2n+1$ を定義する。

それは、各素点 v において Eisensten kernel ε_v を以下の様に指定する事で定義される。(v が無限素点のとき)

$u \in \mathbf{K}_\infty$ にたいして

$$\rho_\kappa(u) := \det(a_u + i_{2n} b_u)^\kappa$$

とし、$g=(g_j)\in Sp_{2n}(\mathbb{R})^m$ を $g_j=\left(\begin{smallmatrix}1 & S_j\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}A_j & 0\\ 0 & {}^tA_j^{-1}\end{smallmatrix}\right)u_j, u_j\in\mathbf{K}_\infty$ と岩沢分解して

$$\varepsilon_\infty(g,\kappa):=\prod_{j=1}^{m}|\det(A_j)|_v^\kappa\rho_\kappa(u_j)$$

($v\nmid\mathfrak{n}$ な有限素点のとき)
$g\in Sp_{2n}(k_v)=\left(\begin{smallmatrix}1 & S\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}A & 0\\ 0 & {}^tA^{-1}\end{smallmatrix}\right)u, u\in Sp_{2n}(\mathfrak{O}_v)$ と岩沢分解して、

$$\varepsilon_v(g;\kappa,\mathfrak{n}):=|\det(A)|_v^\kappa,$$

($v\mid\mathfrak{n}$ な有限素点のとき)
$g\in Sp_{2n}(k_v)$ が、$g=pu, p\in P_{2n}(k_v), u\in\Gamma_{2n}(\mathfrak{n}_v)$ と書けるとき、

$$\varepsilon_v(g;\kappa,\mathfrak{n}):=|\det(A)|_v^\kappa,$$

それ以外では zero。

以上、各 $\varepsilon_v,\ v<\infty$ の定義はこれで十分なのだが、後の computation の為、以下のように異なる定義の仕方を与える。

$$\varepsilon_v(g_v;\kappa,\mathfrak{n}):=\beta^{-1}\int_{GL_{2n}(k_v)}|\det(t)|^\kappa\phi_v(t(0_{2n},1_{2n})g_v)dt.$$

ここで、$v\neq\mathfrak{n}$ のとき、ϕ_v は $M_{2n\times 4n}(\mathfrak{O}_v)$ の特性関数。$v\mid\mathfrak{n}$ のとき、ϕ_v は $\{(u,v)\equiv(0_{2n},1_{2n})\pmod{\mathfrak{n}_v}\}$ の特性関数。$\beta\in\mathbb{C}^\times$ で $\varepsilon_v(1;\kappa,\mathfrak{n})=1$ となる様に調整しておく。

すると、global な Eisenstein kernel ε を $\varepsilon(g;\kappa,\mathfrak{n})=\varepsilon_\infty(g;\kappa)\times\prod_{v:finite}\varepsilon_v(g;\kappa,\mathfrak{n})$ とおいて、Eisenstein series は

$$E_{2n}(g;\kappa,\mathfrak{n},\theta):=\sum_{\gamma\in P_{2n}(k)\backslash Sp_{2n}(k)}\varepsilon(\gamma g\theta;\kappa,\mathfrak{n}),\qquad g\in Sp_{2n}(\mathbb{A}_k)$$

と定義される。(P_{2n} は Siegel parabolic subgroup) 但し、我々は今後の computation の為、E_{2n} を以下の $\theta\in\prod_{v<\infty}Sp_{2n}(\mathfrak{O}_v)$ で動かした。θ は $v\nmid\mathfrak{n}$ の成分を 1、$v\mid\mathfrak{n}$ の成分を θ_v により

$$(0_{2n},1_{2n})\theta_v^{-1}=\begin{pmatrix}1_n & 1_n & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1_n & 1_n\end{pmatrix}$$

となる様にとる。(とれる。また、$\theta\in\prod_{v<\infty}Sp_{2n}(\mathfrak{O}_v)$ の取り方によらず、$E_{2n}(g;\kappa,\mathfrak{n},\theta)\in M_\kappa(\Gamma(\mathfrak{n}))$:

$$E(\delta gu;\kappa,\mathfrak{n},\theta)=E(g;\kappa,\mathfrak{n},\theta)$$

が任意の $\delta\in Sp_{2n}(k),\ g\in Sp_{2n}(\mathbb{A}_k),\ u\in\Gamma(\mathfrak{n})_v, v<\infty$ に対して成立する。) 埋め込み $\iota: Sp_n\times Sp_n\to Sp_{2n}$ を

$$\iota: Sp_n\times Sp_n\ni\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a' & b'\\ c' & d'\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}a & 0 & b & 0\\ 0 & a' & 0 & b'\\ c & 0 & d & 0\\ 0 & c' & 0 & d'\end{pmatrix}\in Sp_{2n}$$

とし、この ι で引き戻す事で Eisenstein series を $Sp_n(\mathbb{A}_k)\times Sp_n(\mathbb{A}_k)$ の保型形式と見なす。この引き戻した $E_{2n}((g_1,g_2);\kappa,\mathfrak{n},\theta)$ を、以後 $E(g_1,g_2)$ と書くことにする。

Petersson 内積を、少なくとも一方は cuspform のペア $f_1,f_2\in M_\kappa^n(\Gamma(\mathfrak{n}))$ に対して

$$<f_1,f_2>:=\int_{Sp_n(k)\backslash Sp_n(\mathbb{A}_k)} f_1(g)\overline{f_2(g)}dg$$

(dg は各 $K_v=\mathbf{K}_\infty$、$Sp_n(\mathfrak{O}_v)$ の volume を 1 とする Haar 測度。) と定義する。

$Sp_n(\mathbb{A})$ における involution $\natural$ を $g^\natural = (\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix})g(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix})$ とおき、$S_\kappa(\Gamma(\mathfrak{n}))$ における involution $\natural$($\mathbb{C}$-anti linear) を

$$\natural : f(g)\longmapsto f^\natural(g)=\overline{f(g^\natural)}$$

とする。$f^\natural$ の Fourier 係数は f のそれの複素共役 (定義 1 から従う。)

すると Pullback formula は次の様に述べられる。

定理 1.1 (Pullback formula) $f\in S_\kappa(\Gamma(\mathfrak{n}))$ を *Hecke eigenform* とする。$f(g_1)$ と $E(g_1,g_2)$ との *Petersson* 内積を取ると、

$$\begin{aligned} <E(g_1,g_2),f(g_1)> &= [Sp_{2n}(\mathfrak{O}):\Gamma(\mathfrak{n})]^{-1}(i^{n\kappa}2^{\frac{(n^2+3n)}{2}-n\kappa+1}\pi^{n(n+1)/2})^m \\ &\quad \times\Big(\frac{\nu(\kappa-\frac{(n+1)}{2})}{\nu(\kappa)}\Big)^m\frac{L_S(\kappa-n,f)f^\natural(g_2)}{\zeta_S(\kappa)\prod_{j=1}^n\zeta_S(2\kappa-2j)} \end{aligned} \tag{1.1}$$

ここで、$\nu(s)=\prod_{j=1}^n\Gamma(s-\frac{(j-1)}{2})$ とガンマ関数の積で書かれる s の関数である。 □

以下、この Pullback formula の得られる課程を見ていく。

$$\xi_j=\begin{pmatrix} 1_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 1_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & \mathrm{diag}[0_{n-j},1_j] & 1_n & 0_n \\ \mathrm{diag}[0_{n-j},1_j] & 0_n & 0_n & 1_n \end{pmatrix}\ j\neq n,\quad \xi_n=\begin{pmatrix} 0_n & 0_n & -1_n & 0_n \\ 0_n & 1_n & 0_n & 0_n \\ 1_n & 1_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & -1_n & 1_n \end{pmatrix}$$

とおくと、次が成立する。

補題 1.2 (Garrett [6], [8]) $\mathcal{K}$ を任意の可換体とする。$Sp_{2n}(\mathcal{K})$ は次の軌道分解を持つ。

$$Sp_{2n}(\mathcal{K})=\bigsqcup_{1\le j\le n}P_{2n}(\mathcal{K})\xi_j\cdot\iota(Sp_n(\mathcal{K})\times Sp_n(\mathcal{K})) \tag{1.2}$$

そして、ξ_j の *isotropy group*

$$\Xi_j=\{(g_1,g_2)\in Sp_n(\mathcal{K})\times Sp_n(\mathcal{K})\mid P_{2n}(\mathcal{K})\xi_j\cdot\iota(g_1,g_2)=P_{2n}(\mathcal{K})\xi_j\}$$

は、特に $j=n$ のとき

$$\Xi_n=\{(g,g^\natural))\}\cong Sp_n(\mathcal{K}) \tag{1.3}$$

が成立する。 □

ι で引き戻された $E(g_1,g_2)$ は、上の分解 (1.2) に沿って

$$E(g_1,g_2) = \sum_{0\le j\le n}\omega_j(g_1,g_2),$$
$$\omega_j(g_1,g_2) = \sum_{\gamma\in\Xi_j\backslash Sp_n(k)\times Sp_n(k)}\varepsilon(\xi_j\gamma(g_1,g_2)\theta;\kappa,\mathfrak{n})$$

と部分級数に分解されるが、次が成立する。

補題 1.3 $1\le j\le n-1$ ならば、$\omega_j(g_1,g_2)=0$ □

(証明) $1\le j\le n-1$ の範囲で、$v\mid\mathfrak{n}$ において

$$\varepsilon_v(\xi_j\iota(g_1,g_2)\theta;\kappa,\mathfrak{n}) = \beta^{-1}\int_{GL_{2n}(k_v)}|\det(t)|^\kappa\phi_v(t(0_{2n},1_{2n})\xi_j\iota(g_1,g_2)\theta)dt \qquad (1.4)$$

が zero である事を示せば良い。実際、$t\in GL_{2n}(k_v), g_1,g_2\in Sp_n(k_v)$ に対して積分内の関数が nonzero である為には、(ϕ_v は $\{(u,v)\equiv(0_{2n},1_{2n}) \pmod{\mathfrak{n}_v}\}$ の特性関数であるから)

$$t(0_{2n},1_{2n})\xi_j\iota(g_1,g_2)\equiv(0_{2n},1_{2n})\theta^{-1} \pmod{\mathfrak{n}_v}$$

である事が必要。これは、

$$t\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{diag}[0_{n-j},1_j] & 1_n & 0 \\ \mathrm{diag}[0_{n-j},1_j] & 0 & 0 & 1_n\end{pmatrix}\iota(g_1,g_2)\equiv\begin{pmatrix}1_n & 1_n & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1_n & 1_n\end{pmatrix} \pmod{\mathfrak{n}_v}$$

だが、この両辺の $2n\times 4n$-size の行列から $1\sim n$ 列と $2n+1\sim 3n$ 列を取り出すと、

$$t\begin{pmatrix} 0 & 1_n\\ \mathrm{diag}[0_{n-j},1_j] & 0\end{pmatrix}g_1\equiv\begin{pmatrix}1_n & 0\\ 0 & -1_n\end{pmatrix} \pmod{\mathfrak{n}_v}$$

となる。しかし、両辺の rank は異なっているので、(1.4) 積分内の関数は常に zero。 (証終)

補題 1.3 から、Pullback formula (1.1) の左辺は、結局

$$< E(g_1,g_2), f(g_1) > = < \omega_n(g_1,g_2), f(g_1) > \qquad (1.5)$$

なので、以下、(1.5) の右辺を計算していく。unfolding method により、

$$\begin{aligned}&< \omega_n(g_1,g_2), f(g_1) >\\ =& \int_{Sp_n(k)\backslash Sp_n(\mathbb{A}_k)}\sum_{\gamma\in\Xi_n\backslash Sp_n(k)^2}\varepsilon_\infty(\xi_n\gamma(g_1,g_2),\kappa)\varepsilon_0(\xi_n\gamma(g_1,g_2);\kappa,\mathfrak{n})\overline{f(g_1)}\,dg_1,\\ =& \int_{Sp_n(\mathbb{A}_k)}\varepsilon_\infty(\xi_n(g_1,g_2);\kappa)\varepsilon_0(\xi_n(g_1,g_2);\kappa,\mathfrak{n})\overline{f(g_1)}\,dg_1\end{aligned}$$

ここで、$\varepsilon_v, \varepsilon_0=\prod_{v:finite}\varepsilon_v$ をあらわし、f は $Sp_n(k)$-left invariant な事を用いている。(1.3) を用いて

$$=\int_{Sp_n(\mathbb{A}_k)}\varepsilon_\infty(\xi_n((g_2^\natural)^{-1}g_1,1);\kappa)\varepsilon_0(\xi_n((g_2^\natural)^{-1}g_1,1);\kappa,\mathfrak{n})\ \overline{f(g_1)}\ dg_1$$

変数を $g_1 \to (g_2^\natural)^{-1} g_1$ とずらす事で

$$
\begin{aligned}
&= \int_{Sp_n(\mathbb{A}_k)} \varepsilon_\infty(\xi_n g_{1\infty}, 1; \kappa) \varepsilon_0(\xi_n(g_{1,0}, 1); \kappa, \mathfrak{n}) \overline{f(g_2^\natural g_1)}\, dg_1 \\
&= (\prod_v T_v) f(g_2)
\end{aligned}
$$

と local factor の積に分解できる。各 T_v は次のような convolution operator である。

$$
T_v f(g_2) := \int_{Sp_n(k_v)} \varepsilon_v(\xi_n(g_{1v}, 1); \kappa, \mathfrak{n}) \overline{f(g_2^\natural g_{1v})}\, dg_{1v}.
$$

では、各 T_v の計算を行う。
($v = \infty$ の場合)

$$
\begin{aligned}
T_v f(g_2) &= \int_{Sp_n(\mathbb{R})^m} \varepsilon_v(\xi_n(g_{1v}, 1); \kappa) \overline{f(g_2^\natural g_{1v})}\, dg_{1v} \\
&= \int_{Sp_n(\mathbb{R})^m} \varepsilon_v(\xi_n((g_{2v}^\natural)^{-1} g_{1v}, 1); \kappa) \overline{f(g_{2,0}^\natural g_{1v})}\, dg_{1v} \quad (g_{1v} \to g_{2v}^\natural g_{1v} \text{ と変数変換}) \\
&= \int_{Sp_n(\mathbb{R})^m} \varepsilon_v(\xi_n(g_{1v}, g_{2v}); \kappa) \overline{f(g_{2,0}^\natural g_{1v})}\, dg_{1v} \qquad ((1.3) \text{ を使う})
\end{aligned}
$$

積分内が右 $\mathbf{K}_\infty^m$ 不変なので、$\mathfrak{H}_n^m \simeq Sp_n(\mathbb{R})^m / \mathbf{K}_\infty^m$ 上の積分に帰着できる。

$$
g_{1v} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^{1/2} & 0 \\ 0 & {}^t y^{-1/2} \end{pmatrix}, \quad g_{2v} = \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^{1/2} & 0 \\ 0 & {}^t v^{-1/2} \end{pmatrix}
$$

とすると、$g_{1v}(i) = x+iy,\ g_{2v}(i) = u+iv$ になる。この g_{1v}, g_{2v} にたいして、$\varepsilon_v(\xi_n(g_{1v}, g_{2v}); \kappa) = (\det y)^{\kappa/2} (\det v)^{\kappa/2} (\det z + w)^{-\kappa}, z = x + iy, w = u + iv$ と書ける事と $F(x + iy) = (\det y)^{-\kappa/2} f(g_{2,0}^\natural g_{1v})$ は、$f(g_{2,0}^\natural g_1)$ に対応する classical な保型形式である事から、

$$
\int_{Sp_n(\mathbb{R})^m} \varepsilon_v(\xi_n(g_{1v}, g_{2v}); \kappa) \overline{f(g_{2,0}^\natural g_{1v})}\, dg_{1v} = 2(\det v)^{\kappa/2} \int_{\mathfrak{H}_n^m} \det(z + w)^{-\kappa} \overline{F(z)} (\det y)^\kappa \frac{dxdy}{(\det y)^{n+1}}
$$

と計算できる。さらに $F(z) = \sum_T V_{f,T}(1_0) \exp(2\pi i \mathrm{Trace}(Tz))$, ($T$ は totally positive definite な対称行列を走る) と classical な Fourier 展開をすると、

$$
\begin{aligned}
&2(\det v)^{\kappa/2} \int_{\mathfrak{H}_n^m} \det(z + w)^{-\kappa} \overline{F(z)} (\det y)^\kappa \frac{dxdy}{(\det y)^{n+1}} \\
&= \sum_T \overline{V_{f,T}(1_0)} (\det v)^{\kappa/2} \int_{\mathfrak{H}_n^m} \det(z + w)^{-\kappa} (\det y)^\kappa \exp(2\pi \mathrm{Trace}(T(-ix - y))) \frac{dxdy}{(\det y)^{n+1}} \\
&= \sum_T \overline{V_{f,T}(1_0)} (\det v)^{\kappa/2} \exp(2\pi i \mathrm{Trace}(Tw)) \\
&\qquad\qquad \times \Big((-1)^{n\kappa/2} 2^{(n^2+3n)/2 - n\kappa + 1} \pi^{n(n+1)/2} \frac{\nu_n(\kappa - (n+1)/2)}{\nu_n(\kappa)} \Big) \\
&= f^\natural(g_2) \Big((-1)^{n\kappa/2} 2^{(n^2+3n)/2 - n\kappa + 1} \pi^{n(n+1)/2} \frac{\nu_n(\kappa - (n+1)/2)}{\nu_n(\kappa)} \Big)
\end{aligned}
$$

となる。(ν_n の定義は定理 1.1 参照)
($v \nmid \mathfrak{n}$ の有限素点の場合)

$$\xi_n = \xi'_n \cdot \iota(w,1), \quad \xi'_n = \begin{pmatrix} 1_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 1_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 1_n & 1_n & 0_n \\ 1_n & 0_n & 0_n & 1_n \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 0 & -1_n \\ 1_n & 0 \end{pmatrix}$$

である事から、$\varepsilon_v(\xi_n(g_{1v},1);\kappa,\mathfrak{n}) = \varepsilon_v(\xi'_n(w,1)(g_{1v},1);\kappa,\mathfrak{n})$ は

$$\varepsilon_v(\xi'_n(wg_{1v},1);\kappa,\mathfrak{n}) = \varepsilon_v(\xi'_n(g_{1v},w^\natural);\kappa,\mathfrak{n}) = \varepsilon_v(\xi'_n(g_{1v},1);\kappa,\mathfrak{n})$$

と書けるので ((1.3) を用いた。)、

$$T_v f(g_2) = \int_{Sp_n(k_v)} \varepsilon_v(\xi'_n(g_{1v},1);\kappa,\mathfrak{n})\overline{f(g_2^\natural g_{1v})}\, dg_{1v}$$

となる。しかし、[12] の Good prime での computation(c.f. [14]) にあるように、佐武同型が

$$S_U : T_v \longrightarrow \frac{(1-q^{-\kappa})\prod_{j=1}^n (1-q^{2j-2\kappa})}{(1-q^{n-\kappa})\prod_{j=1}^n (1-X_j q^{n-\kappa})(1-X_j^{-1}q^{n-\kappa})} \in \mathbb{C}[[X_1,\ldots,X_n]]^W,$$

$(q = N_{k/\mathbb{Q}}(v))$ を誘導する。従って、$T_v f(g_2) = \frac{L_v(\kappa-n,f)}{\zeta_{k,v}(\kappa)\prod_{j=1}^n \zeta_{k,v}(2\kappa-2j)} f^\natural(g_2)$。
($v \mid \mathfrak{n}$ の有限素点の場合)

$$\varepsilon_v(\iota(g_1,1)\theta;\kappa,\mathfrak{n}) = \beta^{-1}\int_{GL_{2n}(k_v)} |\det(t)|^\kappa \phi_v(t(0_{2n},1_{2n})\iota(g_1,1)\theta)dt$$

であるが、ϕ_v が nonzero である為には

$$t(0_{2n},1_{2n})\iota(g_1,1) \equiv (0_{2n},1_{2n})\theta^{-1} = \begin{pmatrix} 1_n & 1_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1_n & 1_n \end{pmatrix} \pmod{\mathfrak{n}_v} \tag{1.6}$$

である事が必要。この行列から $1 \sim n$ 列と $2n+1 \sim 3n$ 列、$n+1 \sim 2n$ 列と $3n+1 \sim 4n$ 列を取り出して、(1.6) は

$$t\begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & -1_n \end{pmatrix} g_1 \equiv \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & -1_n \end{pmatrix}, \quad t\begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} \pmod{\mathfrak{n}_v}$$

と書ける。従って、$g_1 \in \Gamma(\mathfrak{n})_v$ のとき $\varepsilon(\iota(g_1,1);\kappa,\mathfrak{n}) = 1$、$g_1 \notin \Gamma(\mathfrak{n})_v$ なら $\varepsilon(\iota(g_1,1);\kappa,\mathfrak{n}) = 0$ となり、$T_v f^\natural = [\Gamma(1)_v : \Gamma(\mathfrak{n})_v]^{-1} f^\natural$ がわかる。
　以上で定理 1.1 が得られたが、この定理は明らかに次に同値である。

定理 1.4 (Pullback formula (II)) 記号、仮定は定理 1.1 と同じとする。$S_\kappa(\Gamma(\mathfrak{n}))$ の、*Hecke eigenform* からなる *orthogonal basis* $\mathscr{B}$ にたいして、

$$E(g_1,g_2) = \omega_n(g_1,g_2) = \sum_{f\in\mathscr{B}} c_{\lambda_f}\frac{f(g_1)f^\natural(g_2)}{<f,f>} \tag{1.7}$$

但し、$c_{\lambda_f} = [Sp_{2n}(\mathfrak{O}):\Gamma(\mathfrak{n})]^{-1}(i^{n\kappa}2^{\frac{(n^2+3n)}{2}-n\kappa+1}\pi^{n(n+1)/2})^m\left(\frac{\nu(\kappa-\frac{(n+1)}{2})}{\nu(\kappa)}\right)^m \frac{L_S(\kappa-n,f)f^\natural(g_2)}{\zeta_S(\kappa)\prod_{j=1}^n\zeta_S(2\kappa-2j)}$ で *nonzero*。(*nonzero* である事の解説は [14] 参照。) □

2 Galois Equivalence Property

今後の結果を得る為に、次の M. Harris による定理を引用する。

定理 2.1 (Harris [9]) 任意の $\theta \in \prod_{v<\infty} Sp_{2n}(\mathfrak{O}_v)$ にたいして、$E(g;\kappa,\mathfrak{n},\theta)$ の *Fourier*係数は $\mathbb{Q}$ の最大 *Abel*拡大 $\mathbb{Q}_{ab}$ に含まれ、任意の $\sigma \in Gal(\mathbb{Q}_{ab}/\mathbb{Q})$ に対して次が成立する。

$$E(g;\kappa,\mathfrak{n},\theta)^\sigma = E(g;\kappa,\mathfrak{n},\theta^\sigma).$$

左辺の σ は *Fourier*係数に σ を作用させるという意味で、右辺の θ^σ の定義は次のとうり。類体論により、$Gal(\mathbb{Q}_{ab}/\mathbb{Q}) \ni \sigma \to \alpha \in \prod_{p<\infty} \mathbb{Z}_p^\times$ を対応させ、$\tilde{\sigma} = \left(\begin{smallmatrix} \alpha\cdot 1_{2n} & 0 \\ 0 & 1_{2n} \end{smallmatrix}\right)$ とおき、$\theta^\sigma = \tilde{\sigma}\theta\tilde{\sigma}^{-1}$。 □

Harris の定理により、

命題 2.2 前節で指定した $E(g;\kappa,\mathfrak{n},\theta)$ の *Fourier*係数は $\mathbb{Q}$ に含まれる。従って ι で引き戻した $E(g_1,g_2)$ の *Fourier*係数も $\mathbb{Q}$ に含まれる。 □

(証明) Bad prime $v \mid \mathfrak{n}$ において、$\varepsilon_v(g\theta;\kappa,\mathfrak{n}) = \varepsilon_v(g\theta^\sigma;\kappa,\mathfrak{n})$ を言えば良い。

$$\varepsilon_v(g_v\theta^\sigma;\kappa,\mathfrak{n}) = \int_{GL_{2n}(k_v)} |\det(t)|^\kappa \phi_v(t(0_{2n},1_{2n})g_v\theta^\sigma)dt$$

で、右辺の積分内の関数が nonzero である為には、$t(0_{2n},1_{2n})g_v\theta^\sigma$ が $(0_{2n},1_{2n})$ に modulo $\mathfrak{n}_v$ で合同でなければならない。それは、

$$t(0_{2n},1_{2n})g_v \equiv (0_{2n},1_{2n})(\theta^\sigma)^{-1} \pmod{\mathfrak{n}_v}$$

に同値だが、右辺は $(0_{2n},1_{2n})(\theta^\sigma)^{-1} = (0_{2n},1_{2n})(\tilde{\sigma}\theta\tilde{\sigma}^{-1})^{-1} = (0_{2n},1_{2n})\tilde{\sigma}\theta^{-1}\tilde{\sigma}^{-1}$ で

$$\begin{pmatrix} 1_n & 1_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1_n & 1_n \end{pmatrix}\tilde{\sigma}^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_p^{-1}1_n & \alpha_p^{-1}1_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1_n & 1_n \end{pmatrix}$$

と計算できる。そこで $t \to t\left(\begin{smallmatrix} \alpha_p 1_{2n} & 0 \\ 0 & 1_{2n} \end{smallmatrix}\right)$ と変数変換する事で、$|\alpha_p|_v = 1$ に注意しつつ、$\varepsilon_v(g\theta;\kappa,\mathfrak{n}) = \varepsilon_v(g\theta^\sigma;\kappa,\mathfrak{n})$ が言える。 (証終)

この命題と Pullback formula により、

命題 2.3 $S_\kappa(\Gamma(\mathfrak{n}))$ は、*Fourier*係数が全て $\mathbb{Q}$ に含まれる *cuspform*からなる *basis* $\mathscr{B}_0$ をもつ。 □

(証明) $k = \mathbb{Q}$ とする。記述の簡便化の為、保型形式の classical な Fourier 展開表示を使う。式 (1.7) から、orthogoanal basis $\mathscr{B} = \{f_j\}$ にたいして、

$$\omega_n(z,w) = \sum_{f_i} c_i f_i(z) f_i^\natural(w), \quad z,w \in \mathfrak{H}_n$$

となる。$\mathbf{e}(Z) = \exp(2\pi i\, Trace(Z)), Z \in M_n(\mathbb{C})$ として、これは

$$\sum_{S,T} A_{S,T}\, \mathbf{e}(Sz+Tw) = \sum_i c_i f_i(z) f_i^\natural(w).$$

ここで、Fourier 係数 $A_{S,T} \in \mathbb{Q}$ で S,T は positive semi-integral を走る。
$\beta_T^{(i)}$ を $f_i^\natural$ の T での係数とすると、$\mathbf{e}(Tw)$ の Fourier 係数は

$$\sum_S A_{S,T}\ \mathbf{e}(Sz) = \sum_i c_i f_i(z)\beta_T^{(i)}. \tag{2.8}$$

そこで、$N = \dim_{\mathbb{C}} S_\kappa(\Gamma(\mathfrak{n}))$ 個の $\{T_j\}$ を行列 $\Phi = \{c_i\beta_{T_j}^{(i)}\}_{1\leq i,j\leq N}$ が可逆となる様に選ぶ。(選べる!　$c_i \neq 0$ に注意) このとき、式 (2.8) から、

$$(\sum_S A_{S,T_1}\ \mathbf{e}(Sz),\ldots,\sum_S A_{S,T_N}\ \mathbf{e}(Sz)) = (f_1(z),\ldots,f_N(z))\Phi.$$

が得られ、左辺が望まれた basis $\mathscr{B}_0$ である。k が一般の総実体の場合も同様。　(証終)

系として、次が得られる。

系 2.4 $f \in S_\kappa(\Gamma(\mathfrak{n}))$ なら、任意の $\sigma \in Aut(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ に対して $f^\sigma \in S_\kappa(\Gamma(\mathfrak{n}))$。 $\square$

(証明) 先の basis $\mathscr{B}_0 = \{g_i\}_{1\leq i\leq N}$ を用いて、$f = \sum_i \alpha_i g_i,\ \alpha_i \in \mathbb{C}$ と書く。すると、$f^\sigma = (\sum_i \alpha_i g_i)^\sigma = \sum_i \alpha_i^\sigma g_i \in S_\kappa(\Gamma(\mathfrak{n}))$。 (証終)

$\{\lambda^{(i)}\}$ を $S_\kappa(\Gamma(\mathfrak{n}))$ に付随する Satake parameter の集合として、$S_\kappa(\Gamma(\mathfrak{n}))$ を次の様に分解する。

$$\begin{aligned} S_\kappa(\Gamma(\mathfrak{n})) &= \oplus_i V_{\lambda^{(i)}} \\ V_{\lambda^{(i)}} &= \oplus_{1\leq j\leq j_{\lambda^{(i)}}} \mathbb{C}\ f_j^{\lambda^{(i)}} \end{aligned}$$

ここで、$f_j^{\lambda^{(i)}}$ は $\lambda^{(i)}$ に対応した Hecke eigenform である。
この分解と系 2.4 から、$\mathbb{Q}(\lambda^{(i)})$ が有限次 (総実) 代数体である事もわかる。実際、module として

$$V_{\lambda^{(i)}} \overset{\sigma}{\simeq} V_{\lambda^{(i)}}^\sigma \simeq V_{(\lambda^{(i)})^\sigma} (\subset S_\kappa(\Gamma(\mathfrak{n})))$$

が任意の $\sigma \in Aut(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ に対して成立し、$\dim_{\mathbb{C}} S_\kappa(\Gamma(\mathfrak{n})) < \infty$ だからである。では、この節の主定理を示す。

定理 2.5 (特殊値の Galois Equvalence Property) *κ, n:even $\kappa > 2n+1$、$f \in S_\kappa^n(\Gamma(\mathfrak{n}))$ で f の Fourier 係数は $\mathbb{Q}(\lambda_f)$ に含まれると仮定する。このとき、*

$$\frac{L_S(\kappa-n,f)}{< f,f > \pi^{(2\kappa n+\kappa-3n(n+1)/2)}} \in \mathbb{Q}(\lambda_f) \tag{2.9}$$

が成立し、任意の $\sigma \in Aut(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ に対して次が成立する。

$$\left(\frac{L_S(\kappa-n,f)}{< f,f > \pi^{(2\kappa n+\kappa-3n(n+1)/2)}}\right)^\sigma = \frac{L_S(\kappa-n,f^\sigma)}{< f^\sigma,f^\sigma > \pi^{(2\kappa n+\kappa-3n(n+1)/2)}}. \tag{2.10}$$

$\square$

(証明) $f=f_1$ を含む $S_\kappa(\Gamma(\mathfrak{n}))$ の Hecke eigenform からなる orthogonal basis $\mathscr{B}=\{f_j\}$ をとる。定理 1.4 により

$$\omega_n(g_1,g_2)=\sum_{f_j\in\mathscr{B}} c_{\lambda_{f_j}}\frac{f_j(g_1)f_j^\natural(g_2)}{<f_j,f_j>}. \tag{2.11}$$

$\sigma\in Aut(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ をこの両辺に作用させて、(ω_n の Fourier 係数は $\mathbb{Q}$ に含まれる事を思い出しつつ)

$$\omega_n(g_1,g_2)=\omega_n(g_1,g_2)^\sigma=\sum_{f_j\in\mathscr{B}}(c_{\lambda_{f_j}})^\sigma\frac{f_j^\sigma(g_1)(f_j^\natural)^\sigma(g_2)}{(<f_j,f_j>)^\sigma} \tag{2.12}$$

となる。

$\sigma\in Aut(\mathbb{C}/\mathbb{Q}(\lambda_f))$ として (2.11)=(2.12) の右辺と $f(g_1)=f^\sigma(g_1)$ の Petersson 内積をとると、

$$c_{\lambda_f}f^\natural(g_2)=(c_{\lambda_f})^\sigma\frac{<f,f>}{<f,f>^\sigma}(f^\natural)^\sigma(g_2)+\sum_{2\le j}(c_{\lambda_{f_j}})^\sigma\frac{<f_j^\sigma,f>}{(<f_j,f_j>)^\sigma}(f_j^\natural)^\sigma(g_2)$$

を得る。$\{(f_j^\natural)^\sigma\}$ は線型独立で、$f=f^\natural=(f^\natural)^\sigma$ だから、$c_{\lambda_f}=c_{\lambda_f}^\sigma\frac{<f,f>}{<f,f>^\sigma}$ となり、$\frac{c_{\lambda_f}}{<f,f>}$ が σ で不変である事がわかる。c_{λ_f} の値を代入することで (2.9) が導かれる。

以下、$\sigma\in Aut(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ とする。$f^\sigma=f_1'$ を含む orthogonal basis $\mathscr{B}'=\{f_j'\}$ を用意する。やはり、定理 1.4 により

$$\omega_n(g_1,g_2)=\sum_{f_j'\in\mathscr{B}'} c_{\lambda_{f_j'}}\frac{f_j'(g_1)f_j'^\natural(g_2)}{<f_j',f_j'>}. \tag{2.13}$$

(2.12)=(2.13) の右辺と $f_1'(g_1)=f^\sigma(g_1)$ の Petersson 内積をとると、

$$(c_{\lambda_f})^\sigma\frac{<f^\sigma,f^\sigma>}{(<f,f>)^\sigma}(f^\natural)^\sigma(g_2)+\sum_{2\le j}(c_{\lambda_{f_j}})^\sigma\frac{<f_j^\sigma,f^\sigma>}{(<f_j,f_j>)^\sigma}(f_j^\natural)^\sigma(g_2)=c_{\lambda_f^\sigma}(f^\sigma)^\natural(g_2)$$

を得る。(f の Fourier 係数は総実故、$(f^\sigma)^\natural=(f^\natural)^\sigma$ に注意しつつ、)$\{(f_j^\natural)^\sigma\}$ は線型独立なので、$(c_{\lambda_f})^\sigma\frac{<f^\sigma,f^\sigma>}{(<f,f>)^\sigma}=c_{\lambda_f^\sigma}$ を得、(2.10) が従う。 (証終)

注意 2.6 上の証明から $\mathscr{B}=\{f_j\}$ が $S_\kappa(\Gamma(\mathfrak{n}))$ の (*eigenforms* の)*orthogonal basis* なら、$\mathscr{B}^\sigma=\{f_j^\sigma\}$ も *orthogonal basis*。

注意 2.7 上の定理では *Fourier* 係数が $\mathbb{Q}(\lambda_f)$ に含まれることを仮定したが、一般に空間 V_{λ_f} は、全ての *Fourier* 係数が $\mathbb{Q}(\lambda_f)$ に含まれる様な *eigenforms* で張れる事が次の補題からわかる。

補題 2.8 $\mathcal{K}(\subset\mathbb{C})$ を任意の体とし、$V\subset\mathbb{C}^N$ を $\mathbb{C}$ ベクトル空間で $Aut(\mathbb{C}/\mathcal{K})$*-stable* とする。($Aut(\mathbb{C}/\mathcal{K})$ はベクトルの各成分に作用させる。) このとき、V は $\mathcal{K}$*-rational* な *basis* を持つ。

(証明) 読者に任せる。

3 liftings, norm商

まず、池田リフト、斎藤-黒川リフト、吉田リフトについて復習する。

定理 3.1 (斎藤-黒川リフト (form Hilbert modular form) [15]) k を総実体、$\varphi \in S_{2\kappa-2}(\Gamma(\mathfrak{n}))$ を *Hilbert modular Hecke eigenform* とする。この時、次数 2 の k 上の *Hilbert Siegel Hecke eigenform* $f = SK(\varphi) \in S_{\kappa+n}(\Gamma(\mathfrak{n})))$ で

$$L_S(s, f) = \zeta_{k,S}(s) Z_S(s+\kappa-1, \varphi) Z_S(s+\kappa-2, \varphi)$$

となるものが存在する。ここで、ζ_k は k の *Dedekind zeta* 関数、$Z_S(s, \varphi)$ は φ の通常の (*degree* 2 の) 保型 L-関数。 □

定理 3.2 (池田リフト [10]) $k = \mathbb{Q}$, κ, n*:even,* $\varphi \in S_{2\kappa-n}(\Gamma(1))$ を楕円 *Hecke eigenform* とする。この時、次数 n の *Siegel Hecke eigenform* $f = I(\varphi) \in S_{\kappa-n}(\Gamma(1))$ で

$$L(s, f) = \zeta(s) \prod_{j=1}^{n} Z(s+\kappa-j, \varphi)$$

となるものが構成できる。特に、$n = 1$ のときは $\mathbb{Q}$ 上の斎藤-黒川リフト。 □

上の 2 つの lift において、Satake parameter を比べる事で、$\mathbb{Q}(\lambda_f) \subset \mathbb{Q}(\lambda_\varphi)$ がわかる。

定理 3.3 (吉田リフト [18], Böcherer and Schulze-Pillot [3]) $\kappa \geq 6$*:even, q:prime,* $\varphi_1 \in S_{2\kappa-2}(\Gamma_0(q)), \varphi_2 \in S_2(\Gamma_0(q))$ を楕円 *Hecke eigenform* のペアで両者の保型形式 L-関数 $Z_S(s, \varphi_i)$ の関数等式の符号は同じで *newform* とする。この時、次数 2 の *Siegel Hecke eigenform* $f = Y(\varphi_1, \varphi_2) \in S_\kappa(\Gamma_0(q))$ で

$$L_S(s, f) = \zeta_S(s) L_S(s, \varphi_1 \otimes \varphi_2)$$

となるものが構成できる。ここで $\otimes$ は *Rankin-Selberg* の *convolution* 積で、$L_S(s, f_1 \otimes f_2)$ は $s = 1/2$ で中心に持つように *normalize* させている。 □

吉田リフトにおいては、$\mathbb{Q}(\lambda_f) \subset \mathbb{Q}(\lambda_{\varphi_1})\mathbb{Q}(\lambda_{\varphi_2})$ がわかる。

では、これらのリフトにおいて、preimage と image の Petersson norm に関する商が G.E.P を持つ事を見ていく。

定理 3.4 (Furusawa [5], Kohnen [11], Lanphier [13]) $\kappa > 5$、$f \in S_\kappa(\Gamma(\mathfrak{n}))$ を φ の斎藤-黒川リフトで、両者の *Fourier* 係数は $\mathbb{Q}(\lambda_\varphi)$ に含まれるとする。(*c.f.* 注意 *2.7*) このとき、$\frac{<\varphi,\varphi>}{<f,f>} \in \mathbb{Q}(\lambda_\varphi)$ で

$$\left(\frac{<\varphi, \varphi>}{<f, f>}\right)^\sigma = \frac{<\varphi^\sigma, \varphi^\sigma>}{<f^\sigma, f^\sigma>}$$

が, 任意の $\sigma \in Aut(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ にたいして成立する。 □

(証明)　まず、$n_1, n_2 \in \mathbb{Z}, m = [k : \mathbb{Q}]$ として

$$A_1(n_1, n_2, \varphi) = \frac{L_S(n_1, \varphi) L_S(n_2, \varphi)}{< \varphi, \varphi > \pi^{m(n_1+n_2)}}, A_2(f) = \frac{L_S(\kappa - 2, f)}{< f, f > \pi^{(5\kappa-9)m}}$$

とおく。すると $n_1 = 2\kappa - 3, n_2 = 2\kappa - 4$ として、定理 3.1 から

$$\begin{aligned} \frac{< \varphi, \varphi >}{< f, f >} &= \frac{L_S(2\kappa - 3, \varphi) L_S(2\kappa - 4, \varphi)}{\pi^{(4\kappa-7)m} A_1(2\kappa - 3, 2\kappa - 4, \varphi)} \cdot \frac{\pi^{(5\kappa-9)m} A_2(f)}{L_S(\kappa - 2, f)} \\ &= \frac{A_2(f)}{A_1(2\kappa - 3, 2\kappa - 4, \varphi)} \cdot \frac{\pi^{(\kappa-2)m} L_S(2\kappa - 3, \varphi) L_S(2\kappa - 4, \varphi)}{\zeta_{k,S}(\kappa - 2) L_S(2\kappa - 3, \varphi) L_S(2\kappa - 4, \varphi)} \\ &= \frac{A_2(f)}{A_1(2\kappa - 3, 2\kappa - 4, \varphi)} \cdot \frac{\pi^{(\kappa-2)m}}{\zeta_{k,S}(\kappa - 2)} \end{aligned}$$

と計算できる。$\frac{\pi^{(\kappa-2)m}}{\zeta_{k,S}(\kappa-2)} \in \mathbb{Q}$ (c.f [7]) で、定理 2.5 により $A_2(f) \in \mathbb{Q}(\lambda_f)(\subset \mathbb{Q}(\lambda_\varphi))$ で $A_2(f)^\sigma = A_2(f^\sigma), \sigma \in Aut(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ である。

更に、$n_1 + n_2$ が odd ならば $A_1(n_1, n_2, \varphi) \in \mathbb{Q}(\lambda_\varphi)$ で

$$A_1(n_1, n_2, \varphi)^\sigma = A_1(n_1, n_2, \varphi^\sigma), \sigma \in Aut(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$$

である事が [16] により知られている。これらの事から我々の主張が従う。　(証終)

定理 3.5 (Choie and Kohnen [4], Lanphier [13]) $f \in S_\kappa(\Gamma(1))$ を $\varphi \in S_{2\kappa-n}(\Gamma(1))$ の次数 n の池田リフトで、両者の *Fourier* 係数は $\mathbb{Q}(\lambda_\varphi)$ に含まれるとする。

このとき、$\frac{<\varphi,\varphi>^{n/2}}{<f,f>} \in \mathbb{Q}(\lambda_\varphi)$ で

$$\left(\frac{< \varphi, \varphi >^{n/2}}{< f, f >} \right)^\sigma = \frac{< \varphi^\sigma, \varphi^\sigma >^{n/2}}{< f^\sigma, f^\sigma >}$$

が任意の $\sigma \in Aut(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ にたいして成立する。　□

(証明)　$A_1(n_1, n_2, \varphi)$ を定理 3.4 の証明と同じとして、

$$A_n(f) = \frac{L(\kappa - n, f)}{< f, f > \pi^{(2\kappa+1)n - \frac{3n(n+1)}{2}}}$$

とおく。定理 3.2 から

$$\begin{aligned} \frac{< \varphi, \varphi >^{n/2}}{< f, f >} &= \frac{A_n(f) \pi^{(2\kappa+1)n - \frac{3n(n+1)}{2}}}{L(\kappa - n, f)} \cdot < \varphi, \varphi >^{\frac{n}{2}} \\ &= \frac{A_n(f) \pi^{(2\kappa+1)n - \frac{3n(n+1)}{2}}}{\zeta(\kappa - n) \prod_{j=1}^n Z(2\kappa - n - j, \varphi)} \cdot < \varphi, \varphi >^{\frac{n}{2}} \\ &= \frac{\pi^{\kappa-n}}{\zeta(\kappa - n)} \cdot \frac{A_n(f) \pi^{2\kappa n - \frac{(3n^2+n)}{2}}}{\prod_{\substack{j=1 \\ j:\mathrm{odd}}}^{n-1} Z(2\kappa - n - j, \varphi) Z(2\kappa - n - j - 1, \varphi)} \cdot < \varphi, \varphi >^{\frac{n}{2}} \\ &= \frac{\pi^{\kappa-n}}{\zeta(\kappa - n)} \cdot \frac{A_n(f) \pi^{2\kappa n - \frac{(3n^2+n)}{2}}}{\prod_{\substack{j=1 \\ j:\mathrm{odd}}}^{n-1} \Big(A_1(2\kappa - n - j, 2\kappa - n - j - 1, \varphi) < \varphi, \varphi > \pi^{4\kappa-2n-2i-1} \Big)} \cdot < \varphi, \varphi >^{\frac{n}{2}} \\ &= \frac{\pi^{\kappa-n}}{\zeta(\kappa - n)} \cdot \frac{A_n(f)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j:\mathrm{odd}}}^{n-1} \Big(A_1(2\kappa - n - j, 2\kappa - n - j - 1, \varphi) \Big)} \end{aligned}$$

と計算できて、$\frac{\pi^{\kappa-n}}{\zeta(\kappa-n)} \in \mathbb{Q}$ で、定理 2.5 から、$A_n(f) \in \mathbb{Q}(\lambda_f) \subset \mathbb{Q}(\lambda_\varphi)$ で G.E.P を持つ ($A_1(n_1, n_2, \varphi)$ も) 事から、我々の主張が得られる。 (証終)

定理 3.6 *$\kappa \geq 6$: even, $\varphi_1 \in S_{2\kappa-2}(\Gamma_0(q)), \varphi_2 \in S_2(\Gamma_0(q))$ とする。$f = Y(\varphi_1, \varphi_2)$ に対して、$\frac{<\varphi_1,\varphi_1>}{<f,f>\pi^{11-6\kappa}} \in \mathbb{Q}(\varphi_1, \varphi_2)$ で*

$$\left(\frac{<\varphi_1, \varphi_1>}{<f, f>}\right)^\sigma = \frac{<\varphi_1^\sigma, \varphi_1^\sigma>}{<f^\sigma, f^\sigma>}$$

が任意の $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ にたいして、成立する。 □

(証明) $\frac{L_S(\kappa-3,\varphi_1\otimes\varphi_2)}{<\varphi_1,\varphi_1>} \in \mathbb{Q}(\lambda_{\varphi_1})\mathbb{Q}(\lambda_{\varphi_2})$ の G.E.P(c.f. p. 191 [7]) を用いて上の二定理同様に証明出来る。

参考文献

[1] S. Böcherer: Über die Funktionalgleichung automorpher L-Functionen zur Siegelschen Modulgruppe, J. Reine Angrew. Math. **362**(1985) 146-168.

[2] —: Ein Rationalitätssatz für formale Heckereihen zur Siegelschen Modulgruppe, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. **56** (1986) 35-47.

[3] S. Böcherer and R. Schulze-Pillot: Siegel modular forms and theta series attached to quaternion algebras II, Nagoya Math. J. **147** (1997) 71-106.

[4] Y. Choie and W. Kohnen: On the Petersson norm of certain Siegel modular forms, Ramanujan. J. The Rankin Special Issue **7** (2003) 47-49.

[5] M. Furusawa: On the Petersson norms for some Liftings, Math. Ann. **267** (1984) 543-548.

[6] P. Garrett: Integral Representations of Eisenstein series and L-functions, in Number Theory, Trace Formulas and Discrete Groups. (1987) 241-264.

[7] —: *Holomorphic Hilbert modular forms,* Brooks/Cole.

[8] —: On the arithmetic of Siegel-Hilbert Modular cuspforms: Petersson inner products and Fourier coefficients, Invent. Math. **107**(1992) 453-481.

[9] M. Harris: Eisenstein series and Shimura varieties, Ann. of Math. **119** (1984) 59-94.

[10] T. Ikeda: On the lifting of elliptic cusp forms to Siegel cusp forms of degree $2n$, Ann. of Math. **154**(2001) 641-681.

[11] W. Kohnen: On the Pettersson norm of a Siegel-Hecke eigen form of degree 2 in the Maass space, J. Reine Angrew. Math. **357**(1985) 96-100.

[12] J. Kuang: On the linear representability of Hilbert-Siegel modular forms by theta series, Amer. J. Math. **116** (1994) 921-994.

[13] D. Lanphier: Petersson norms and liftings of Hilbert modular forms, J. Number Theory. **106** (2004) 238-258.

[14] T. Moriyama: this volume.

[15] R. Schmidt: The Saito-Kurokawa lifting and Functoriaity, Amer. J. Math. **127**(2005) 209-240.

[16] G. Shimura: The speciTheal valus of the zeta functions assoiated with Hilbert modular forms, Duke Math. J. **50**(1978) 637-679.

[17] T. Sugano: Hecke 環と L-関数, サマースクール第５回, (1997) 74-93.

[18] H. Yoshida: Siegel's modular forms and the arithmetics of quadratic forms, Invent. Math. **60** (1980) 193-248.