Hilbert 保型形式入門

高瀬幸一（宮城教育大学）

目次

Hilbert 保型形式の基本事項について解説する．内容は Weil [11] を正則保型形式の場合に整理して若干加筆したものである．Weil も述べているように初等的形式的な部分のみの解説であり，理論が空集合でないことは具体例に基づく必要があるが，具体例は一つも与えていない．そのような具体例を与えるには，幾何学的或いは表現論的な立ち入った議論が必要であるから，本報告集の内容を理解する上での大きな枠組みが提供できればそれでよしとするのである．

以下，F を $g(>1)$ 次総実代数体とし，F の整数環を O_F とする．F の素点全体を $P(F)$ とし，有限素点の全体を $P_f(F)$，無限素点の全体を $P_\infty(F)$ とする．$v \in P_f(F)$ と O_F の極大イデアル $\mathfrak{p}$ が一対一に対応している；

$$|x|_v = N(\mathfrak{p})^{-\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(x)} \qquad (x \in F).$$

そこで $P_f(F)$ を O_F の極大イデアルの集合と考えても良い．$v \in P_\infty(F)$ と $\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}\text{-alg.}}(F, \mathbb{C})$ が対応している；

$$|x|_v = |\sigma(x)| \qquad (x \in F).$$

そこで $x \in F$ に対して $x^{(v)} = \sigma(x)$ と書くことにする．全ての $v \in P_\infty(F)$ に対して $x^{(v)} > 0$ となるとき $x \in F$ は全正であるといい $x \gg 0$ と書く．

$$\prod_{v \in P(F)} |x|_v = 1 \qquad (x \in F)$$

である．$|\cdot|_v$ に関する F の完備化を F_v と書く．$v \in P_f(F)$ のとき

$$O_v = \{x \in F_v \mid |x|_v \leq 1\}, \qquad \varpi_v O_v = \{x \in F_v \mid |x|_v < 1\}$$

とおく．$\mathbb{F}_v = O_v/(\varpi_v)$ は有限体であり，その元の個数を q_v とする．$v = \mathfrak{p}$ ならば $q_v = N(\mathfrak{p})$ である．

1　複素上半平面の直積上の正則保型形式

1.1　モジュラー形式というものの必然性を見るために，偏極アーベル多様体のモジュライ空間について簡単に見ておくことにする．偏極アーベル多様体の解析的理論については [6, Chap.1] を参照のこと．他の部分については基本的には線形代数の演習問題である．

1.1.1　$\mathbb{C}$ 上のアーベル多様体 X と X 上の ample 直線束（の同値類）の組を $\mathbb{C}$ 上の偏極アーベル多様体と呼ぶ．複素リー群として X は complex torus $V_{\mathbb{C}}/L$（L は複素ベクトル空間 $V_{\mathbb{C}}$ の格子）と同型であり，X 上の直線束から $\operatorname{Im} H(u,v) \in \mathbb{Z}$ $(\forall u, v \in L)$ なる $V_{\mathbb{C}}$ 上の正定値 Hermite 形式 H（Riemann 形式）が定まる[1]．このとき，$D(x,y) = \operatorname{Im} H(x,y)$ は実ベクトル空間 $V_{\mathbb{C}}$ 上の斜交形式を与える．斜交形式 D に関する L の双対格子を L^* とすると

$$L^*/L \simeq \left(\bigoplus_{i=1}^{d} \mathbb{Z}/e_i\mathbb{Z} \right)^2, \qquad 0 < e_i \in \mathbb{Z},\ e_i | e_{i+1} \quad (d = \dim X)$$

となることが示される．$[e_1, e_2, \cdots, e_d]$ を偏極アーベル多様体の型と呼ぶことにする[2]．型を指定したときの偏極アーベル多様体の同型類のなす空間の幾何学的構造が問題となるが，その際に，偏極アーベル多様体 X の準同型環 $\operatorname{End}(X)$ の構造も合わせて考える．$\operatorname{End}(X)$ は $\varphi(L) \subset L$ なる $\varphi \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}})$ の全体と同一視される．更に $\operatorname{End}_{\mathbb{Q}}(X) = \operatorname{End}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ は $\varphi(L_{\mathbb{Q}}) \subset L_{\mathbb{Q}}$ $(L_{\mathbb{Q}} = \langle L \rangle_{\mathbb{Q}} \subset V_{\mathbb{C}})$ なる $\varphi \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}})$ の全体と同一視される．

1.1.2　$\mathbb{Q}$ 上の斜交空間 (V, D) と V の格子 L をとり，$D(L, L) \subset \mathbb{Z}$ と仮定する．斜交形式 D に関する L の双対格子を L^* として，有限アーベル群の構造定理から L^*/L を書くと

$$L^*/L \simeq \left(\bigoplus_{i=1}^{d} \mathbb{Z}/e_i\mathbb{Z} \right)^2, \qquad 0 < e_i \in \mathbb{Z},\ e_i | e_{i+1} \quad (\dim_{\mathbb{Q}} V = 2d)$$

---

[1] 自然な完全列 $0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{e^{2\pi\sqrt{-1}*}} \mathcal{O}_X^{\times} \to 1$ から完全列

$$1 \to \operatorname{Pic}_0(X) \to \operatorname{Pic}(X) \xrightarrow{c} \operatorname{Ker}[H^2(X,\mathbb{Z}) \to H^2(X,\mathcal{O}_X)] \to 0$$

が得られるが，自然な同型 $H^2(X,\mathbb{Z}) = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\bigwedge^2 L, \mathbb{Z})$ から同型

$$\mu : \mathcal{H}(X) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ker}[H^2(X,\mathbb{Z}) \to H^2(X,\mathcal{O}_X)]$$

が得られる．ここで $\mathcal{H}(X)$ は Hermite 形式 $H : V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ で $\operatorname{Im} H(u,v) \in \mathbb{Z}$ $(\forall u, v \in L)$ なるものの成す加法群で $\mu H = \operatorname{Im} H$ である．$c(\mathcal{L}) = H \in H(X)$ なる $\mathcal{L} \in \operatorname{Pic}(X)$ が非自明な大域的切断をもつ必要十分条件は Hermite 形式 H が正定値なることである．

[2] 最初に述べた X 上の直線束の同値類は $[e_1 : e_2 : \cdots : e_d] \in \mathbb{P}^{d-1}(\mathbb{Q})$ により定まる．

の形になることが示される．実斜交空間 $V_{\mathbb{R}} = V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ の斜交群を $Sp(V_{\mathbb{R}})$ として

$$\mathfrak{H} = \{I \in Sp(V_{\mathbb{R}}) \mid I^2 = -1, D(xI, x) > 0 \,\text{for}\, 0 \neq \forall x \in V_{\mathbb{R}}\}$$

とおくと，$\sigma \in Sp(V_{\mathbb{R}})$ は $I \in \mathfrak{H}$ に $(\sigma, I) \mapsto \sigma I \sigma^{-1}$ により推移的に作用する[3]．$I \in \mathfrak{H}$ をとって，$V_{\mathbb{R}}$ 上の複素構造を $\sqrt{-1}x = xI$ により定義したものを $V_{\mathbb{R},I}$ とおくと，L に関する $V_{\mathbb{R},I}$ 上の Riemann 形式が $H_I(x,y) = D(xI,y) + \sqrt{-1}D(x,y)$ により定まり，$X_I = V_{\mathbb{R},I}/L$ は偏極アーベル多様体となる[4]．ここで $Sp(V_{\mathbb{R}})$ の離散部分群 Γ_L を

$$\Gamma_L = \{\gamma \in Sp(V_{\mathbb{R}}) \mid L\gamma = L\}$$

のより定義すると，対応 $I \mapsto X_I$ により商空間 $\Gamma_L \backslash \mathfrak{H}$ は $[e_1, e_2, \cdots, e_d]$-型の偏極アーベル多様体の $\mathbb{C}$ 上の同型類の集合と 1:1 に対応する．Γ_L は単位元以外に有限位数の元を含む可能性があるから，商空間 $\Gamma_L \backslash \mathfrak{H}$ は若干の特異点を持ちうるが，Γ_L の捩じれの無い有限指数部分群 Γ をとれば $\Gamma_L \backslash \mathfrak{H}$ の有限次被覆空間 $\Gamma \backslash \mathfrak{H}$ は滑らかな複素多様体となる．

1.1.3 $I_0 \in Sp(V_{\mathbb{R}})$ を固定して

$$K = \{\sigma \in Sp(V_{\mathbb{R}}) \mid \sigma I_0 \sigma^{-1} = I_0\} = U(V_{\mathbb{R},I_0}, H_{I_0})$$

とおく．$V_{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ の固有空間

$$W^{\pm} = \{v \in V_{\mathbb{C}} \mid xI_0 = \pm\sqrt{-1}v\}$$

をとると，非退化な pairing $\langle u, v\rangle = D(u,v)$ $(u \in W^-,\ v \in W^+)$ が得られる．$x \mapsto \frac{1}{2}(x - xI_0 \otimes \sqrt{-1})$ により $V_{\mathbb{R},I_0}$ は W^+ と複素線形同型となる．$V_{\mathbb{R},I_0}$ 上の正定値 Hermite 形式 H_{I_0} を上の同型を通して W^+ に移植すると，W^+ 上の正定値 Hermite 形式

$$\langle v, w\rangle_{I_0} = 2\sqrt{-1}D(v, \overline{w}) = -2\sqrt{-1}\langle \overline{w}, v\rangle \qquad (u, v \in W^+)$$

が得られる．直和分解 $V_{\mathbb{C}} = W^- \oplus W^+$ に従って $\sigma \in Sp(V_{\mathbb{C}})$ をブロック分けして $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と表して，$Sp(V_{\mathbb{C}})$ の部分群 $P^{\pm}$, $K_{\mathbb{C}}$ を

$$P^+ = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, b \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(W^-, W^+) \right\},$$

[3] V の斜交基底 $\{u_1, \cdots, u_d, v_1, \cdots, v_d\}$ を一つ固定しておくと，$I \in \mathfrak{H}$ に対して複素ベクトル空間 $V_{\mathbb{R},I}$ において

$$(u_1, \cdots, u_d) = (v_1, \cdots, v_d) \cdot z \qquad (z \in M_d(\mathbb{C}))$$

と書ける．このとき $z \in \mathfrak{H}_d$（d 次 Siegel 上半空間）となり，$I \mapsto z$ が全単射で，$Sp(V_{\mathbb{R}})$ の $\mathfrak{H}$ への作用は $Sp(V_{\mathbb{R}}) = Sp(d, \mathbb{R})$（上の斜交基底に関する行列表示）の $\mathfrak{H}_d$ への分数変換による作用に一致する．

[4] $Sp(V_{\mathbb{R}})$ の作用に対する $I \in \mathfrak{H}$ の固定部分群は，複素ベクトル空間 $V_{\mathbb{R},I}$ 上の Hermite 形式 H_I に関するユニタリ群 $U(V_{\mathbb{R},I}, H_I)$ である．

$$P^- = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, c \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(W^+, W^-) \right\}$$
$$K_{\mathbb{C}} = \left\{ \begin{pmatrix} {}^t d^{-1} & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \,\middle|\, d \in GL_{\mathbb{C}}(W^+) \right\}$$

により定義する．ここで $d \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W^+)$ に対して ${}^t d \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W^-)$ s.t. $\langle {}^t du, v \rangle = \langle u, dv \rangle$ とし

$$\mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(W^-, W^+) = \{ b \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W^-, W^+) \mid \langle u, bv \rangle = \langle v, bu \rangle \, \forall u, v \in W^- \},$$

$\mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(W^+, W^-)$ も同様とする．このとき

$$Sp(V_{\mathbb{R}}) \subset P^+ K_{\mathbb{C}} P^- = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sp(V_{\mathbb{C}}) \,\middle|\, d \in GL_{\mathbb{C}}(W^+) \right\}$$

かつ $K = Sp(V_{\mathbb{R}}) \cap K_{\mathbb{C}} P^-$ であり，$(p, k, q) \mapsto pkq$ は $P^+ \times K_{\mathbb{C}} \times P^-$ から $P^+ K_{\mathbb{C}} P^-$ への全単射である．そこで $I \in \mathfrak{H}$ に対して $I = \sigma I_0 \sigma^{-1}$ なる $\sigma \in Sp(V_{\mathbb{R}})$ をとって

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot k \cdot q \quad \left(\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in P^+, k \in K_{\mathbb{C}}, q \in P^- \right)$$

と書くと，写像 $I \mapsto z$ は well-defined な単射となる．その像を $\mathcal{D} \subset \mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(W^-, W^+)$ とすると

$$\mathcal{D} = \left\{ z \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(W^-, W^+) \mid 1 - \overline{z} z \in \mathrm{Her}^+(W^+) \right\}$$

となる．ここで $\mathrm{Her}^+(W^+)$ は W^+ 上の Hermite 内積 $\langle \, , \rangle_{I_0}$ に関する W^+ 上の正定値 Hermite 形式の全体である．更に $\sigma \in Sp(V_{\mathbb{R}})$ と $z \in \mathcal{D}$ に対して $\sigma \cdot \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in P^+ K_{\mathbb{C}} P$ だから

$$\sigma \cdot \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sigma(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^t J(\sigma, z)^{-1} & 0 \\ 0 & J(\sigma, z) \end{pmatrix} \cdot q \quad (q \in P^-)$$

とおくと，$\sigma(z) \in \mathcal{D}$, $J(\sigma, z) \in GL_{\mathbb{C}}(W^+)$ となり，$Sp(V_{\mathbb{R}})$ の $\mathcal{D}$ への作用 $(\sigma, z) \mapsto \sigma(z)$ は $Sp(V_{\mathbb{R}})$ の $\mathfrak{H}$ への作用と可換である．$J(\sigma, z)$ の定義から

$$J(\sigma\tau, z) = J(\sigma, \tau(z)) J(\tau, z) \qquad (\sigma, \tau \in Sp(V_{\mathbb{R}}), z \in \mathcal{D})$$

が成り立つ．$J(\sigma, z)$ を自然な保型因子と呼ぶ[5]．以下，上の対応によって $\mathfrak{H} = \mathcal{D}$ と同一視しよう．同様に $V_{\mathbb{R}, I_0} = W^+$ と同一視しよう．

[5]以上の議論は一般の有界対称領域の Harish-Chandra 実現を具体的に書き下したものである．一般論の詳細は [8] を参照．

さてここで $GL_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{R},I_0})$ の有限次元既約正則表現 (δ, U) をとると，$Sp(V_{\mathbb{R}})$ の $\mathfrak{H}\times U$ への作用が $(\sigma,(z,u))\mapsto(\sigma z,\delta(J(\sigma,z))u)$ により定まり，$\mathcal{L}=\Gamma\backslash(\mathfrak{H}\times U)$ は複素多様体 $\Gamma\backslash\mathfrak{H}$ 上のベクトル束となる．その大域的切断を $z\mapsto(z,f(z))$ と書くと，f は U に値をもつ $\mathfrak{H}$ 上の正則関数で

$$f(\gamma z)=\delta(J(\gamma,z))f(z)\ \ \forall\gamma\in\Gamma$$

なる変換公式を満たす，即ち，Γ に関する Siegel 保型形式となる．

1.1.4 総実代数体 F 上の斜交空間 (V,D) と V の格子 L をとり，$D_{\mathbb{Q}}(x,y)=T_{F/\mathbb{Q}}D(x,y)\in\mathbb{Z}$ $(\forall x,y\in L)$ と仮定する．$\mathbb{Q}$ 上の斜交空間 $(V,D_{\mathbb{Q}})$ に対して前節の記号を用いる．F の $\mathbb{R}$ への埋め込み $a\mapsto a^{(i)}$ $(1\le i\le g)$ により $\mathbb{R}$ を F-代数とみたものを $\mathbb{R}^{(i)}$ と書いて $V^{(i)}=V\otimes_F\mathbb{R}^{(i)}$ とおくと，実ベクトル空間の自然な同型

$$V_{\mathbb{R}}=V\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}\simeq V^{(1)}\times V^{(2)}\times\cdots\times V^{(g)}$$

が成り立つ．$I\in\mathfrak{H}$ に対応する $[e_1,e_2,\cdots,e_d]$-型の偏極アーベル多様体 $X_I=V_{\mathbb{R},I}/L$ を考える（$\dim_F V=2m$ とすると，$d=gm$ である）．$\lambda\in F$ に対して $\theta(\lambda)\in\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V_{\mathbb{R}})$ を $v\otimes a\mapsto(\lambda v)\otimes a$ により定義する．ここで $\theta(\lambda)\in\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{R},I})$ $(\forall\lambda\in F)$ なる必要十分条件は

$$I=\begin{bmatrix}I_1&&\\&\ddots&\\&&I_g\end{bmatrix}\qquad(I_i\in\mathfrak{H}^{(i)})$$

なることである．各実斜交空間 $V^{(i)}$ の付随する Siegel 上反空間を $\mathfrak{H}^{(i)}$ と書くのである．このとき $\theta:F\to\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X_I)$ は $\mathbb{Q}$-代数の準同型写像である．更に，$\gamma\in\Gamma_L\subset Sp(V_{\mathbb{R}})$ に対して $\theta(\lambda)\circ\gamma=\gamma\circ\theta(\lambda)$ $(\forall\lambda\in F)$ となる必要十分条件は，$L\gamma_0=L$ なる $\gamma_0\in Sp(V)$ があって $\gamma=\gamma_0\otimes 1$ なることである．そこで

$$\Gamma_{F,L}=\{\gamma\in Sp(V)\mid L\gamma=L\}$$

とおくと，$I\mapsto X_I$ により商空間 $\Gamma_{F,L}\backslash(\mathfrak{H}(V^{(1)})\times\cdots\times\mathfrak{H}(V^{(g)}))$ と $[e_1,\cdots,e_d]$-型の偏極アーベル多様体 X で $\mathbb{Q}$-代数の準同型写像 $\theta:F\to\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X)$ をもつものの同値類の集合とが 1:1 に対応する．前節 1.1.3 と同様の議論により，$\mathfrak{H}^{(1)}\times\cdots\times\mathfrak{H}^{(g)}$ 上の正則関数 f で変換公式

$$f(\gamma(z))=\bigotimes_{i=1}^{g}\delta_i(J(\gamma^{(i)},z_i))\cdot f(z)\quad\forall\gamma\in\Gamma_{F,L}$$

を満たすもの，即ち，Hilbert-Siegel 保型形式が生ずる．以下では $m=1$ の場合を詳細に検討することにする．

1.2 実 Lie 群 $GL_2(\mathbb{R})$ の単位元を含む連結成分

$$GL_2^+(\mathbb{R}) = \{g \in GL_2(\mathbb{R}) \mid \det g > 0\}$$

は複素上半平面

$$\mathfrak{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$$

に

$$g(z) = (az+b)(cz+d)^{-1} \qquad (g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in GL_2^+(\mathbb{R}), z \in \mathfrak{H})$$

により推移的に作用し，$\sqrt{-1} \in \mathfrak{H}$ の固定部分群は $Z_{\mathbb{R}} \cdot SO(2, \mathbb{R})$ である．但し

$$Z_{\mathbb{R}} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \,\middle|\, a \in \mathbb{R}^\times \right\}$$

は $GL_2^+(\mathbb{R})$ の中心である．$J(g, z) = cz + d \in \mathbb{C}^\times$ とおくと

$$J(gh, z) = J(g, h(z))J(h, z) \qquad (g, h \in GL_2^+(\mathbb{R}), z \in \mathfrak{H})$$

である．

$$\gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in GL_2^+(F) = \{g \in GL_2(F) \mid \det g \gg 0\}$$

に対して $\gamma^{(v)} = \begin{bmatrix} a^{(v)} & b^{(v)} \\ c^{(v)} & d^{(v)} \end{bmatrix} \in GL_2^+(\mathbb{R})$ $(v \in P_\infty(F))$ だから，$\gamma \in GL_2^+(F)$ と $(\gamma^{(v)})_{v \in P_\infty(F)} \in GL_2^+(\mathbb{R})^g$ を同一視することにより，$GL_2^+(F)$ は $\mathfrak{H}$ の g この直積 $\mathfrak{H}^g$ に作用する．

$$GL_2^+(O_F) = \{\gamma \in GL_2(O_F) \mid \det \gamma \gg 0\}$$

とおき，F の整イデアル $\mathfrak{a}$ に対して

$$\Gamma(\mathfrak{a}) = \{\gamma \in GL_2^+(O_F) \mid \gamma \equiv 1_2 \pmod{\mathfrak{a}}\}$$

とおく．適当な $\Gamma(\mathfrak{a})$ を指数有限の部分群として含むような $GL_2^+(F)$ の部分群をモジュラー群と呼ぶことにする．任意の $\gamma \in M_2(O_F) \cap GL_2(F)$ に対して

$$\Gamma(\det \gamma \cdot \mathfrak{a}) \subset \gamma \cdot \Gamma(\mathfrak{a}) \gamma^{-1} \cap \gamma^{-1} \Gamma(\mathfrak{a}) \gamma$$

だから，Γ がモジュラー群ならば $\gamma^{-1}\Gamma\gamma$, $\gamma\Gamma\gamma^{-1}$ はモジュラー群である．

モジュラー群 Γ から絶対値 1 の複素数のなす乗法群 $\mathbb{C}^1$ への群準同型写像 χ に対して，$\Gamma_\chi = \operatorname{Ker} \chi$ が適当な $\Gamma(\mathfrak{a})$ を含むとき，χ を Γ の有限指標と呼ぶ．

1.3 Γ をモジュラー群とし，χ を Γ の有限指標とする．

$$n = (n_v)_{v\in P_\infty(F)} \in \mathbb{Z}^g, \qquad s = (s_v)_{v\in P_\infty(F)} \in (\sqrt{-1}\mathbb{R})^g$$

として，$\mathfrak{H}^g$ 上の複素数値正則関数 f であって，任意の $\gamma \in \Gamma$ に対して

$$f(\gamma z) = \chi(\gamma)(\det\gamma)^{-(n+s)/2} J(\gamma, z)^n f(z) \tag{1}$$

なる変換公式を満たすもの全体を $M_{n,s}(\Gamma, \chi)$ と書く．ここで

$$(\det\gamma)^{-(n+s)/2} = \prod_{v\in P_\infty(F)} (\det\gamma^{(v)})^{-(n_v+s_v)/2},$$
$$J(\gamma, z)^n = \prod_{v\in P_\infty(F)} J(\gamma^{(v)}, z_v)^{n_v}$$

である．

$f \in M_{n,s}(\Gamma, \chi)$ とする．$b \in F$ と $(b^{(v)})_{v\in P_\infty(F)} \in \mathbb{R}^g$ を同一視すると

$$L(\Gamma_\chi) = \left\{ b \in F \;\middle|\; \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \Gamma_\chi \right\}$$

は $\mathbb{R}^g$ の格子をなす．ここで任意の $b \in L(\Gamma_\chi)$ に対して $f(z+b) = f(z)$ だから，$x \in \mathbb{R}^g$ の関数として絶対広義一様収束する Fourier 展開

$$f(x + \sqrt{-1}y) = \sum_{t\in L^*(\Gamma_\chi)} a(t, y)\mathbf{e}(T_{F/\mathbb{Q}}(tx))$$

$$a(t, y) = \mathrm{vol}\left(\mathbb{R}^g/L(\Gamma_\chi)\right)^{-1} \int_{\mathbb{R}^g/L(\Gamma_\chi)} f(x + \sqrt{-1}y)\mathbf{e}\left(-T_{F/\mathbb{Q}}(tx)\right) dx$$

をもつ．ここで dx は $\mathbb{R}^g$ の Lebesgue 測度であり

$$T_{F/\mathbb{Q}}(tx) = \sum_{v\in P_\infty(F)} t^{(v)} x_v, \qquad \mathbf{e}(z) = \exp(2\pi\sqrt{-1}z)$$

である．又

$$L^*(\Gamma_\chi) = \{t \in F \mid T_{F/\mathbb{Q}}(bt) \in \mathbb{Z}\ \forall b \in L(\Gamma_\chi)\}$$

は $\mathbb{R}^g$ における $L(\Gamma_\chi)$ の双対格子である．ここで f は正則関数だから Cauchy-Riemann の関係式

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_v} + \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y_v}\right) f = 0 \qquad (v \in P_\infty(F))$$

が成り立つから

$$\frac{\partial}{\partial y_v} a(t, y) = -2\pi t^{(v)} \cdot a(t, y) \qquad (v \in P_\infty(F)),$$

即ち，$a(t,y)=a(t)\cdot\exp(-2\pi T_{F/\mathbb{Q}}(ty))$ となり，任意の $0\ll y\in\mathbb{R}^g$ に対して

$$|a(t)|\le C(y)\exp\left(2\pi T_{F/\mathbb{Q}}(ty)\right)\qquad (t\in L^*(\Gamma_\chi))\tag{2}$$

である．ここで $a(t)\neq 0$ なる $0\neq t\in L^*(\Gamma_\chi)$ は $t\gg 0$ なるものに限る；実際，$\Gamma=\Gamma(\mathfrak{a})$, $\chi=1$ としてよい．このとき $L(\Gamma_\chi)=\mathfrak{a}$ である．$\varepsilon\equiv 1 \pmod{\mathfrak{a}}$ なる $\varepsilon\in O_F^\times$ をとると，$\begin{bmatrix}\varepsilon^{-1} & 0\\ 0 & \varepsilon\end{bmatrix}\in\Gamma_\chi$ だから変換公式(1) より $f(\varepsilon^{-2}z)=\varepsilon^n f(z)$，よって

$$a(\varepsilon^2 t)=\varepsilon^n a(t)\qquad (t\in L^*(\Gamma_\chi))$$

である．$0\neq t\in L^*(\Gamma_\chi)$ に対して $t^{(w)}<0$ なる $w\in P_\infty(F)$ があったとすると

$$\varepsilon\equiv 1 \pmod{\mathfrak{a}},\qquad |\varepsilon^{(w)}|>1>|\varepsilon^{(v)}|\ \ w\neq\forall v\in P_\infty(F)$$

なる $\varepsilon\in O_F^\times$ があるから，$k\in\mathbb{Z}$ に対して

$$|a(t)|=|\varepsilon^{-kn}a(\varepsilon^{2k}t)|\le C(y)|\varepsilon^{-kn}|\exp\left(2\pi T_{F/\mathbb{Q}}(\varepsilon^{2k}ty)\right).$$

よって $k\to\infty$ とすれば $a(t)=0$ である．よって次の命題を得る；

命題 1.3.1 $f\in M_{n,s}(\Gamma,\chi)$ は

$$f(z)=a_f(0)+\sum_{0\ll t\in L^*(\Gamma_\chi)}a_f(t)\mathbf{e}(T_{F/\mathbb{Q}}(tz))$$

なる Fourier 展開をもつ．$a_f(0)\neq 0$ となるのは n_v, s_v が夫々$v\in P_\infty(F)$ に依らぬ一定値の場合に限る．

この命題から

命題 1.3.2 $f\in M_{n,s}(\Gamma,\chi)$ とすると，任意の $0<R\in\mathbb{R}$ に対して

$$\sup_{z\in\mathfrak{H}^g(R)}|f(z)|<\infty$$

である．ここで

$$\mathfrak{H}^g(R)=\{z\in\mathfrak{H}^g\mid \operatorname{Im}z_v\ge R\ \forall v\in P_\infty(F)\}$$

である．

[**証明**] f の Fourier 展開

$$f(z)=a(0)+\sum_{0\ll t\in L^*(\Gamma_\chi)}a(t)\mathbf{e}(T_{F/\mathbb{Q}}(tz))$$

で任意の $0 < R \in \mathbb{R}$ に対して

$$|a(t)| \leq C(R) \cdot \exp\left(\pi R \cdot T_{F/\mathbb{Q}}(t)\right) \qquad (t \in L^*(\Gamma_\chi))$$

である．よって任意の $z = x + \sqrt{-1}y \in \mathfrak{H}^g(R)$ に対して

$$\begin{aligned} |a(t)\mathbf{e}(T_{F/\mathbb{Q}}(tz)| &\leq C(R)\exp\left(-\pi T_{F/\mathbb{Q}}(ty)\right) \\ &\leq C(R)\exp\left(-\pi R \cdot T_{F/\mathbb{Q}}(t)\right) \qquad (0 \ll t \in L^*(\Gamma_\chi)) \end{aligned}$$

となるから，$z \in \mathfrak{H}^g(R)$ ならば

$$|f(z)| \leq |a(0)| + C(R) \sum_{0 \ll t \in L^*(\Gamma_\chi)} \exp\left(-\pi R \cdot T_{F/\mathbb{Q}}(t)\right) < \infty$$

となる．■

1.4 　$f \in M_{n,s}(\Gamma, \chi)$ をとる． $a_f(0) = 0$ となるとき f は $\infty\sqrt{-1}$ で尖点的であるということにする．一方，$\rho \in GL_2^+(F)$ に対して

$$(f|_{n,s}\rho)(z) = (\det\rho)^{(n+s)/2} J(\rho, z)^{-n} f(\rho z) \qquad (z \in \mathfrak{H}^g)$$

とおくと $f|_{n,s}\rho \in M_{n,s}(\Gamma^\rho, \chi^\rho)$ である．但し

$$\Gamma^\rho = \rho^{-1}\Gamma\rho, \qquad \chi^\rho(\gamma) = \chi(\rho\gamma\rho^{-1}) \qquad (\gamma \in \Gamma^\rho)$$

である．任意の $\rho \in GL_2^+(F)$ に対して $f|_{n,s}\rho \in M_{n,s}(\Gamma^\rho, \chi^\rho)$ が $\infty\sqrt{-1}$ で尖点的なとき，$f \in M_{n,s}(\Gamma, \chi)$ を尖点形式と呼ぶ．尖点形式の全体を $S_{n,s}(\Gamma, \chi)$ と書く．

$$S_{n,s}(\Gamma, \chi) \subsetneqq M_{n,s}(\Gamma, \chi)$$

ならば $\{n_v\}_{v \in P_\infty(F)}$, $\{s_v\}_{v \in P_\infty(F)}$ は夫々 $v \in P_\infty(F)$ に依らない一定数である．又 $f \in S_{n,s}(\Gamma, \chi)$ ならば

$$\sup_{z \in \mathfrak{H}^g} |f(z)|(\operatorname{Im} z)^{n/2} < \infty$$

である．逆に

命題 1.4.1 $n = (n_v)_{v \in P_\infty(F)} \gg 0$ とすると

$$\sup_{z \in \mathfrak{H}^g} |f(z)|(\operatorname{Im} z)^{n/2} < \infty$$

なる $f \in M_{n,s}(\Gamma, \chi)$ は尖点形式である．

[**証明**] f の Fourier 展開 $f(z)=\sum_{t\in L^*(\Gamma_\chi)}a(t)\mathbf{e}(T_{F/\mathbb{Q}}(tz))$ で

$$a(t)=e^{2\pi T_{F/\mathbb{Q}}(ty)}\mathrm{vol}(\mathbb{R}^g/L(\Gamma_\chi))^{-1}\int_{\mathbb{R}^g/L(\Gamma_\chi)}f(x+\sqrt{-1}y)\mathbf{e}(-T_{F/\mathbb{Q}}(tx))dx$$

だから，定数 $0<C\in\mathbb{R}$ があって，任意の $t\in L^*(\Gamma_\chi)$, $0\ll y\in\mathbb{R}^g$ に対して

$$|a(t)|\le C\cdot y^{-n/2}e^{2\pi T_{F/\mathbb{Q}}(ty)} \tag{3}$$

となる．よって $a(t)\neq 0$ なる $t\in L^*(\Gamma_\chi)$ に対して

$$0<|a(t)|\le C\cdot y^{-n/2}e^{2\pi T_{F/\mathbb{Q}}(ty)}\qquad 0\ll\forall y\in\mathbb{R}^g$$

となり $t\gg 0$ を得る．任意の $\rho\in GL_2^+(F)$ に対して

$$|(f|_{k,s}\rho)(z)|(\mathrm{Im}\,z)^{n/2}=|f(\rho(z))|(\mathrm{Im}\,\rho(z))^{n/2}$$

だから，$f\in S_{n,s}(\Gamma,\chi)$ である．■

系 1.4.2 尖点形式 $f\in S_{n,s}(\Gamma,\chi)$ に対して，定数 $0<C\in\mathbb{R}$ があって，任意の $0\ll t\in L^*(\Gamma_\chi)$ に対して

$$|a_f(t)|\le C\cdot t^{n/2}$$

となる．

[**証明**] (3) 式で $y=t^{-1}$ とおけばよい．■

$M_{n,s}(\Gamma,\chi)$ は有限次元複素ベクトル空間をなす．

2　アデール化

2.1　G を F 上定義された線形代数群とする．F-代数 L に対して，G の L-有理点のなす群を $G(L)$ 又は G_L と書く．特に $v\in P(F)$ に対して $G_v=G(F_v)$ とおく．G は適当な GL_n の部分代数群と見て良いので，G_v は $GL_n(F_v)$ からの相対位相により局所コンパクト群となる．更に $v\in P_f(F)$ に対しては $K_v=G_v\cap GL_n(O_v)$ とおくと，K_v は G_v のコンパクト開部分群である．

或いは，$G=\mathrm{Spec}(\mathcal{G})$ と書ける．ここで $\mathcal{G}$ は或 S-整数環 $O_{F,S}$ 上の有限生成代数である（S は $P_f(F)$ の有限部分集合で

$$O_{F,S}=\{x\in F\mid |x|_v\le 1\,\forall v\in P_f(V)\notin S\}$$

である）．$O_{F,S}$-代数 L に対して

$$\begin{aligned} G(L) &= \mathrm{Hom}_{O_{F,S}\text{-scheme}}(\mathrm{Spec}(L), G) \\ &= \{\alpha : \mathcal{G} \to L : O_{F,S}\text{-alg. hom.}\} \end{aligned}$$

である．特に $L = F_v$ のとき，$\mathcal{G}$ の $O_{F,S}$ 上の生成元を $\{g_1, \cdots, g_r\}$ として，G_v から F_v^r への写像 $\alpha \mapsto (\alpha(g_1), \cdots, \alpha(g_r))$ が連続となる最弱の位相を G_v に与えるのである．この場合 K_v は S に含まれない $v \in P_f(F)$ に対して定義される．

直積群 $\prod_{v\in P(F)} G_v$ の部分群

$$G_A = \left\{ (x_v)_{v\in P(F)} \in \prod_{v\in P(F)} G_v \;\middle|\; \text{有限個の } v \in P_f(F) \text{ を除いて } x_v \in K_v \right\}$$

において

$$\left\{ \prod_{v\in S} V_v \times \prod_{v\notin S} K_v \;\middle|\; P_\infty(F) \subset S \subset P(F) : \text{有限部分集合}, V_v \subset G_v : \text{開集合} \right\}$$

は開集合の基底となり，これにより G_A は局所コンパクト群となる．これを F 上の代数群 G のアデール化と呼ぶ．即ち，有限部分集合 $P_\infty(F) \subset S \subset P(F)$ に対して直積群 $G_S = \prod_{v\in S} G_v \times \prod_{v\notin S} K_v$ に直積位相を与え，

$$G_A = \bigcup_S G_S = \mathrm{inj}\lim_S G_S$$

に順極限の位相を与えるのである．

$$\begin{aligned} G_{A,\infty} &= \{x \in G_A \mid x_v = 1, \forall v \in P_f(F)\}, \\ G_{A,f} &= \{x \in G_A \mid x_v = 1\, \forall v \in P_\infty(F)\} \end{aligned}$$

は夫々 G_A の閉部分群で $G_A = G_{A,\infty} \times G_{A,f}$ は直積である．対角写像により G_F は G_A の部分群とみなせるが，このとき G_F は G_A の離散部分群である．

各 $v \in P(F)$ に対して G_v は局所コンパクト群だから，左 Haar 測度 μ_v をもつ．有限部分集合 $P_\infty(F) \subset S \subset P(F)$ に対して G_S 上の左 Haar 測度は $\mu_S = \prod_{v\in S} \mu_v \times \nu_S$ で与えられる．ここで ν_S はコンパクト群 $\prod_{v\notin S} K_v$ 上の Haar 測度で $\nu_S(\prod_{v\notin S} K_v) = 1$ なるものとする．G_A 上の複素数値連続関数 φ で台 $\mathrm{supp}\,\varphi$ がコンパクトなるもの全体の成す複素ベクトル空間を $C_c(G_A)$ と書き，特に $\mathrm{supp}\,\varphi \subset G_S$ なるもの全体のなす部分空間を $C_{c,S}(G_A)$ と書くことにする．$C_{c,S}(G_A)$ の複素線形形式 I_S を

$$I_S(\varphi) = \int_{G_S} \varphi(x) d\mu_S(x) \qquad (\varphi \in C_{c,S}(G_A))$$

により定義する．$C_c(G_A)=\bigcup_S C_{c,S}(G_A)$ だから，$C_c(G_A)$ 上の複素線形形式 I が $I|_{C_{c,S}(G_A)}=I_S$ により定義される．任意の $x\in G_A$ に対して，$x\in G_S$ なる有限部分集合 $P_\infty(F)\subset S\subset P(F)$ が存在するから

$$I(x\cdot\varphi)=I(\varphi)\qquad (\varphi\in C_c(G_A),\ (x\cdot\varphi)(y)=\varphi(x^{-1}y))$$

となる．即ち，G_A 上の Haar 測度 μ が存在して

$$I(\varphi)=\int_{G_A}\varphi(x)d\mu(x)\qquad (\varphi\in C_c(G_A))$$

となる．μ を $\{\mu_v\}_{v\in P(F)}$ の $\{K_v\}_v$ に関する制限直積と呼ぶ．

有限部分集合 $P_\infty(F)\subset S\subset P(F)$ に対して

$$G^S=\{x\in G_A \mid x_v=1\ \forall v\notin S\}$$

とおくと次の強近似定理が成り立つ；

定理 2.1.1 G は半単純かつ絶対単純とすると，$G_F\cdot G^S$ が G_A で稠密なるための必要十分条件は G が単連結かつ G^S がコンパクトでないことである．

[**証明**] [5] 参照．■

G_A から絶対値 1 の複素数の成す乗法群 $\mathbb{C}^1$ への連続群準同型写像 α を G_A の連続指標とよぶ．$\alpha_\infty=\alpha|_{G_{A,\infty}}$, $\alpha_f=\alpha|_{G_{A,f}}$ とおく．$x\in G_v$ $(v\in P(F))$ に対して

$$\alpha_v(x)=\alpha(\cdots,1,1,x,1,1,\cdots)$$

とおくと α_v は G_v の連続な指標となる．このとき有限個を除けば全ての $v\in P_f(F)$ に対して $\mathrm{Ker}\,\alpha_v=K_v$ である；実際，$1\in\mathbb{C}^1$ の開近傍 V を V に含まれる $\mathbb{C}^1$ の部分群が $\{1\}$ に限るようにとれる．$\alpha_f^{-1}(V)$ は $G_{A,f}$ の開集合だから

$$H\times\prod_{v\notin S}K_v\qquad (H\subset\prod_{v\in S}G_v: \text{開部分群}, S\subset P_f(F): \text{有限部分集合})$$

なる集合を含むが，これは $\mathrm{Ker}\,\alpha_f$ に含まれる．一方 $\mathrm{Ker}\,\alpha_f$ は $G_{A,f}$ の閉部分群だから

$$H'\times\prod_{v\notin S'}K_v\qquad (H'\subset\prod_{v\in S'}G_v: \text{閉部分集合}, S'\subset P_f(F): \text{有限部分集合})$$

なる集合に含まれる．

$G_{A,f}$ のコンパクト開部分群 U に対して，有限部分集合 $S\subset P_f(F)$ とコンパクト開部分群 $V\subset\prod_{v\in S}G_v$ があって

$$U=V\times\prod_{v\notin S}K_v$$

となる．

2.2 $G = \mathbb{G}_a$ のとき G_A を F のアデールとよび F_A と書く．F_A は自然に位相環となる．

$v \in P_f(F)$ に対して $\mathrm{ch}\,\mathbb{F}_v = p$ とすると，$x \pmod{\mathbb{Z}} \mapsto x \pmod{\mathbb{Z}_p}$ は加法群 $\mathbb{Z}[p^{-1}]/\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ の上への同型写像だから，それを $(*)$ と書くと

$$\Lambda_p : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \xrightarrow{(*)^{-1}} \mathbb{Z}[p^{-1}]/\mathbb{Z} \xrightarrow{e^{-2\pi\sqrt{-1}*}} \mathbb{C}^1$$

($\mathbb{C}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$) は加法群 $\mathbb{Q}_p$ の連続な指標である．そこで $\Lambda_v(x) = \Lambda_p(T_{F_v/\mathbb{Q}_p}x)$ ($x \in F_v$) とおくと，これは加法群 F_v の連続な指標となる．実素点 $v \in P_\infty(F)$ に対しては $F_v = \mathbb{R}$ だから $\Lambda_v(x) = e^{2\pi\sqrt{-1}x}$ とおく[6]．$x \in F_A$ に対しては，有限個を除けば全ての $v \in P_f(F)$ に対して $\Lambda_v(x_v) = 1$ だから

$$\Lambda(x) = \prod_{v \in P(F)} \Lambda_v(x_v)$$

とおくと，これは加法群 F_A の連続な指標である．これらの連続指標を自然な指標と呼ぶ．$a \in F_A$ に対して $\Lambda_a(x) = \Lambda(ax)$ ($x \in F_A$) とおくと，$a \mapsto \Lambda_a$ は F_A から F_A の Pontryagin 双対群への同型写像である．$\langle x, y \rangle = \Lambda(xy)$ とおく．

有限素点 $v \in P_f(F)$ に対して O_v のイデアル $\mathcal{D}_v$ が

$$\mathcal{D}_v^{-1} = \{x \in F_v \mid \Lambda_v(xO_v) = 1\}$$

により定義される．有限個を除けば全ての $v \in P_f(F)$ に対して $\mathcal{D}_v = O_v$ で

$$\mathcal{D}(F/\mathbb{Q}) = F \cap \prod_{v \in P_f(F)} \mathcal{D}_v$$

は $F/\mathbb{Q}$ の共役差積である．

実素点 $v \in P_\infty(F)$ に対して $F_v = \mathbb{R}$ 上の Haar 測度 μ_v を通常の Lebesque 測度とする．有限素点 $v \in P_f(F)$ に対して F_v 上の Haar 測度 μ_v を $\mu_v(O_v) = (O_v : \mathcal{D}_v)^{-1/2}$ と正規化しておく．$\{\mu_v\}_{v \in P(F)}$ の制限直積として定義された F_A 上の Haar 測度 μ は pairing $\langle x, y \rangle = \Lambda(xy)$ に関して self-dual である．コンパクト群 F_A/F 上の Haar 測度 μ_0 を $\mu_0(F_A/F) = 1$ と正規化しておくと，積分公式

$$\int_{F_A} \varphi(x) d\mu(x) = \int_{F_A/F} \sum_{\gamma \in F} \varphi(x\gamma) d\mu_0(\dot{x}) \qquad (\varphi \in C_c(F_A))$$

が成り立つ．

[6] F が一般の代数体の場合，虚素点 $v \in P_\infty(F)$ に対しては $F_v = \mathbb{C}$ だから $\Lambda_v(x) = e^{2\pi\sqrt{-1}(x+\overline{x})}$ とおく．

2.3 $G=\mathbb{G}_m$ のとき G_A を F のイデールと呼び $F_A^\times$ と書く．$F_A^\times$ は可換環 F_A の乗法群であるが，位相は F_A からの相対位相ではない．

F の 0 でない分数イデアル全体 I_F はイデアルの乗法に関して群をなす．$x\in F_A^\times$ に対して

$$\mathrm{div}(x)=\prod_{\mathfrak{p}\in P_f(F)}\mathfrak{p}^{\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(x_{\mathfrak{p}})}$$

とおくと $x\mapsto \mathrm{div}(x)$ は $F_A^\times$ から I_F への全射群準同型写像で，その核は $\prod_{v\in P_\infty(F)}F_v^\times\times\prod_{v\in P_f(F)}O_v^\times$ である．

連続な指標

$$\omega: F_A^\times\to\mathbb{C}^1$$

は

$$\omega(x)=\prod_{v\in P(F)}|x_v|_v^{s(v)}\times\prod_{v\in P_\infty(F)}\left(\frac{x_v}{|x_v|}\right)^{n(v)}\times\prod_{v\in P_f(F)}\lambda_v(\widetilde{x}_v)$$

と書ける．ここで $s(v)\in\sqrt{-1}\mathbb{R}$, $n(v)\in\mathbb{Z}$ で $v\in P_\infty(F)$ が実素点ならば $n(v)=0,1$ である．λ_v は $O_v^\times$ の連続指標で $\widetilde{x}_v=x_v\varpi_v^{-\mathrm{ord}_v(x_v)}$ である．$\omega_\infty=\omega|_{F_{A,\infty}^\times}$, $\omega_f=\omega|_{F_{A,f}^\times}$ とおくと $\omega=\omega_\infty\cdot\omega_f$ である．$\mathfrak{p}\in P_f(F)$ に対して

$$m(\mathfrak{p})=\mathrm{Min}\{0\le m\in\mathbb{Z}\mid \lambda_v(1+\mathfrak{p}^m O_v)=1\}$$

とおくと，有限個を除いて全ての $\mathfrak{p}\in P_f(F)$ に対して $m(\mathfrak{p})=0$ である．そこで F の整イデアル

$$\mathfrak{f}_\omega=\prod_{\mathfrak{p}\in P_f(F)}\mathfrak{p}^{m(\mathfrak{p})}$$

を指標 ω の導手と呼ぶ．$\mathfrak{f}_\omega$ と共通因子を持たない $\mathfrak{a}\in I_F$ のなす部分群を $I_F(\mathfrak{f}_\omega)$ として，群準同型写像

$$\chi_\omega: I_F(\mathfrak{f}_\omega)\to\mathbb{C}^1$$

を $\chi_\omega(\mathfrak{p})=N(\mathfrak{p})^{-s_{\mathfrak{p}}}$ ($\mathfrak{p}\in P_f(F)$ s.t. $\mathfrak{p}\nmid\mathfrak{f}_\omega$) により定義する．$\chi_\omega$ を ω に付随するイデアル指標と呼ぶ．$F_A^\times$ の連続指標 ω が $\omega(F^\times)=1$ であるとき，ω を F の量指標と呼ぶ．

$v\in P(F)$ に対して $F_v^\times$ 上の Haar 測度 $\mu_v^\times$ が $d\mu_v^\times(x)=|x|_v^{-1}d\mu_v(x)$ により定義される．そこで $F_v^\times$ 上の正規化された Haar 測度 ν_v を

$$\nu_v=\begin{cases}\mu_v^\times & v\in P_\infty \text{ のとき}\\ (1-q_v^{-1})^{-1}\mu_v^\times & v\in P_f(F) \text{ のとき}\end{cases}$$

により定義する．$v\in P_f(F)$ に対して $O_v=\bigsqcup_{n\ge 0}\varpi_v^n O_v^\times$ だから $\nu_v(O_v^\times)=(O_v:\mathcal{D}_v)^{-1/2}$ である．$x\in F_{A,\infty}^\times$ に対して

$$\mathrm{sign}\,x=(\mathrm{sign}\,x_v)_{v\in P_\infty(F)}\in\{\pm1\}^g$$

とおく．特に $x \in F^\times$ に対して，$\operatorname{sign} x = (\operatorname{sign} x^{(v)})_{v \in P_\infty(F)}$ である．

正の実数全体のなす乗法群を $\mathbb{R}_{>0}^\times$ と書く．

$$|x|_A = \prod_{v \in P(F)} |x_v|_v \qquad (x \in F_A^\times$$

とおくと，$x \mapsto |x|_A$ は $F_A^\times$ から $\mathbb{R}_{>0}^\times$ への全射連続群準同型写像である．その核を F_A^1 とする．$F^\times \subset F_A^1$ で $F_A^1/F^\times$ はコンパクトである．$r \in \mathbb{R}_{>0}^\times$ と $(r^{1/g}, \cdots, r^{1/g}, 1, 1, \cdots) \in F_{A,\infty}^\times$ を同一視すれば $F_A^\times = \mathbb{R}_{>0}^\times \times F_A^1$ である．$\mathbb{R}_{>0}^\times$ 上の Haar 測度 $d\nu_0(r) = \frac{dr}{r}$ に対して F_A^1 上の Haar 測度 ν_1 を $\nu = \nu_0 \times \nu_1$ となるように定める．更に $F_A^1/F^\times$ 上の Haar 測度 $\overline{\nu}_1$ を

$$\int_{F_A^1} \varphi(x) d\nu_1(x) = \int_{F_A^1/F^\times} \sum_{t \in F^\times} \varphi(xt) d\overline{\nu}_1(\dot{x})$$

が成り立つように定めると

$$\overline{\nu}_1(F_A^1/F^\times) = 2^{g-1} h_F R_F \qquad \begin{pmatrix} R_F : F \text{ の単数基準}, \\ h_F : F \text{ の類数} \end{pmatrix}$$

である[7]．

2.4 $G = GL_2$ とする．$v \in P_\infty(F)$ に対して

$$K_v = SO(2, \mathbb{R}) = \{g \in GL_2^+(F_v) \mid {}^t g g = 1_2\}$$

とおく．$K_\infty = \prod_{v \in P_\infty(F)} K_v$ は $G_{A,\infty}$ のコンパクト部分群である．F の整イデアル $\mathfrak{a}$ に対して

$$K_v(\mathfrak{a}) = \{x \in K_v \mid x \equiv 1_2 \pmod{\mathfrak{a}}\} \qquad (v \in P_f(F))$$

は G_v のコンパクト開部分群であり，$K_f(\mathfrak{a}) = \prod_{v \in P_f(F)} K_v(\mathfrak{a})$ は $G_{A,f}$ のコンパクト開部分群である．$G_{A,f}$ の任意のコンパクト開部分群 U に対して $K_f(\mathfrak{a}) \subset U$ なる F の整イデアル $\mathfrak{a}$ が存在する．F の整イデアル $\mathfrak{a}$ に対して

$$K_{0,v}(\mathfrak{a}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in GL_2(O_v) \,\middle|\, c \in \mathfrak{a} \cdot O_v \right\} \qquad (v \in P_f(F))$$

とおいて $K_0(\mathfrak{a}) = \prod_{v \in P_f(F)} K_{0,f}(\mathfrak{a})$ とおく．

$$G_{A,\infty}^+ = \{x \in G_{A,\infty} \mid \text{任意の実素点 } v \in P_\infty(F) \text{ に対して } \det x_v > 0\}$$

とおく．

[7] F が一般の代数体の場合には，虚素点 $v \in P_\infty(F)$ に対して $F_v = \mathbb{C}$ 上の Haar 測度 μ_v を通常の Lebesgue 測度の 2 倍として $\nu_v(x) = |x|_v^{-2} d\mu_v(x)$ $(x \in F_v^\times)$ とおくと，

$$\overline{\nu}_1(F_A^1/F^\times) = \frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2} h_F R_F}{w_F}$$

である．r_1, r_2 は夫々 F の実素点，虚素点の個数，w_F は F に含まれる 1 の冪根の個数である [4, p.235]．

定理 2.4.1 コンパクト開部分群 $U \subset G_{A,f}$ に対して，有限部分集合 $T \subset F_{A,f}^{\times}$ があって

$$G_A = \bigsqcup_{t \in T} G_F \cdot \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot (G_{A,\infty}^{+} \times U)$$

となる．

[**証明**] F の整イデアル $\mathfrak{a}$ があって $U = K_f(\mathfrak{a})$ であるとしてよい．

$$F_{A,>0}^{\times} = \{x \in F_A^{\times} \mid \text{全ての実素点 } v \in P_\infty(F) \text{ に対して } x_v > 0\}$$

として $F_{>0} = F^{\times} \cap F_{A,>0}^{\times}$ とおく．$F_{>0}$ の元が生成する単項イデアルの全体 $(F_{>0})$ は分数イデアルの群 I_F の指数有限の部分群となる．そこで有限部分集合 $T \subset F_{A,f}^{\times}$ を $\{\mathrm{div}(x) \mid x \in T\}$ が $I_F/(F_{>0})$ の完全代表系を成すようにとる．任意の $g \in G_A$ をとる．$a \cdot \det g \in F_{A,>0}^{\times}$ なる $a \in F^{\times}$ がとれるから

$$\mathrm{div}(a \cdot \det g) \equiv \mathrm{div}(t) \pmod{(F_{>0})}$$

なる $t \in T$ をとれば，$\det g = rtu$ なる

$$r \in F^{\times}, \qquad u \in F_{A,>0}^{\times} \cap \prod_{v \in P_\infty(F)} F_v^{\times} \times \prod_{v \in P_f(F)} O_v^{\times}$$

がとれる．よって

$$g' = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} g \begin{bmatrix} tu & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in SL_{2,A}$$

である．ここで $SL_{2,A}$ は F 上の半単純かつ絶対単純な単連結代数群 SL_2 のアデール化である．よって強近似定理 2.1.1 から $SL_2(F)SL_{2,\infty}$ は $SL_{2,A}$ で稠密である．そこで $v \in P_f(F)$ に対して

$$W_v(\mathfrak{a}) = \{x \in SL_2(O_v) \mid x \equiv 1_1 \pmod{\mathfrak{a}}\}$$

とおくと $W = SL_{2,\infty} \times \prod_{v \in P_f(F)} W_v(\mathfrak{a})$ は $SL_{2,A}$ の開集合だから

$$SL_2(F)SL_{2,\infty} \cap g' \begin{bmatrix} tu & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} W \begin{bmatrix} tu & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \neq \emptyset$$

即ち，

$$\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} gh \begin{bmatrix} tu & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \gamma\sigma$$

なる $h \in W$, $\gamma \in SL_2(F)$, $\sigma \in SL_{2,\infty}$ がある．よって

$$G_A = \bigcup_{t \in T} G_F \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot (G_{A,\infty}^{+} \times \Delta U)$$

となる．ここで

$$\Delta = \left\{ \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \middle| \varepsilon \in \prod_{v \in P_f(F)} O_v^\times \right\}$$

である．$(\Delta : \Delta \cap K_f(\mathfrak{a})) < \infty$ だから

$$G_A = \bigsqcup_{t \in T'} G_F \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot (G_{A,\infty}^+ \times U)$$

なる有限部分集合 $T' \subset F_{A,f}^\times$ が存在する．■

系 2.4.2 有限部分集合 $T \subset F_{A,f}^\times$ を $\{\mathrm{div}(x) \mid x \in T\}$ が $I_F/(F_{>0})$ の完全代表系となるようにとると，F の任意の整イデアル $\mathfrak{a}$ に対して

$$G_A = \bigsqcup_{t \in T} G_F \cdot \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot (G_{A,\infty}^\times \times K_{0,f}(\mathfrak{a}))$$

である．

[**証明**] 定理 2.4.1 の証明で $\Delta \subset K_{0,f}(\mathfrak{a})$ だから

$$G_A = \bigcup_{t \in T} G_F \cdot \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot (G_{A,\infty}^\times \times K_{0,f}(\mathfrak{a}))$$

である．$t, t' \in T$ に対して

$$\begin{bmatrix} t' & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \gamma \cdot \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot (g_\infty, g_f)$$

なる $\gamma \in G_F$, $g_\infty \in G_{A,\infty}^+$, $g_f \in K_{0,f}(\mathfrak{a})$ があったとすると，$\gamma \cdot g_\infty = 1$ だから $\det \gamma = \det g_\infty^{-1} \in F_{>0}$．よって $\mathrm{div}(t') = \det \gamma \cdot \mathrm{div}(t)$ より $t' = t$ である．
■

$G = GL_2$ の F 上の部分代数群 B を

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in GL_2 \right\}$$

により定義し， $G = GL_2$ の中心を Z とすると

命題 2.4.3 任意のコンパクト開部分群 $K_f \subset G_{A,f}$ に対して $K = K_\infty \times K_f$ とおくと

$$G_A = G_F \cdot B_A \cdot K \cdot Z_A$$

となる．

[**証明**] 有限部分集合 $S \subset P_f(F)$ とコンパクト開部分群 $M \subset \prod_{v\in S} G_v$ があって

$$K_f = M \times \prod_{v\notin S} GL_2(O_v)$$

となる．$v \in P_\infty(F)$ に対して，2.5 節と 2.6 節の結果から

$$G_v = B_v K_v Z_v$$

である．$v \in P_f(F)$ に対して，$v \notin S$ ならば

$$G_v = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \in G_v \right\} \cdot GL_2(O_v) = B_v \cdot GL_2(O_v) \cdot Z_v$$

である．ここで G_F は $\prod_{v\in S} G_v$ の稠密な部分集合であり，$M \cdot \prod_{v\in S} B_v Z_v$ は $\prod_{v\in S} G_v$ の開部分集合だから，任意の $g \in \prod_{v\in S} G_v$ に対して

$$\left(g \cdot M \cdot \prod_{v\in S} B_v Z_v \right) \cap G_F \neq \emptyset$$

となる．よって $G_A = G_F B_A K Z_A$ である．■

2.5 $v \in P_\infty(F)$ が実素点のとき，$G_v = GL_2(\mathbb{R})$ の単位元を含む連結成分は

$$G_v^+ = GL_2^+(\mathbb{R}) = \{g \in GL_2(\mathbb{R}) \mid \det g > 0\}$$

である．その中心は $Z_v = \{a \cdot 1_2 \mid a \in \mathbb{R}^\times\}$ で，$G_v^1 = SL_2(\mathbb{R})$ とおくと，$G_v^+ = Z_v \cdot G_v^1$ で G_v^1 は連結半単純実 Lie 群となり，$K_v = SO(2, \mathbb{R})$ は G_v^1 の極大コンパクト部分群である．

$$\mathfrak{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}, z > 0\}$$

とおくと，$g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in G_v^1$ は $z \in \mathfrak{H}$ に $g(z) = (az+b)(cz+d)^{-1}$ により推移的に作用し，$\sqrt{-1} \in \mathfrak{H}$ の固定部分群が K_v である．同様に $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in G_v^+$ が $z \in \mathfrak{H}$ に $g(z) = (az+b)(cz+d)^{-1}$ により推移的に作用し，$\sqrt{-1} \in \mathfrak{H}$ の固定部分群が $Z_v K_v$ である．更に $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in G_v = GL_2(\mathbb{R})$ は $z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ に $g(z) = (az+b)(cz+d)^{-1}$ により推移的に作用し

$$\mathrm{Im}\, g(z) = \det g \cdot |J(g,z)|^{-2} \mathrm{Im}\, z$$

である．ここで $J(g,z) = cz + d \in \mathbb{C}^\times$ とおいた．

$$J(gh, z) = J(g, h(z)) J(h, z) \qquad (g, h \in G_v, z \in \mathbb{C}^*)$$

である．半単純実 Lie 群 $G_v^1 = SL_2(\mathbb{R})$ の Lie 環

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) = \langle H, X_+, X_- \rangle_{\mathbb{R}}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad X_+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad X_- = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

は $G_v = GL_2(\mathbb{R})$ 上の C^∞-関数 φ に

$$(X \cdot \varphi)(g) = \frac{d}{dt}\varphi(g \cdot \exp tX)|_{t=0} \qquad (X \in \mathfrak{g})$$

により作用する．Cartan 対合 $\theta X = -{}^tX$ による Cartan 分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$

$$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \theta X = X\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{bmatrix} \middle| \, c \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \theta X = -X\} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

があり，$H_0 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in Z(\mathfrak{k})$ とおくと，$(\mathrm{ad}(H_0)|_{\mathfrak{p}})^2 = -1$ で

$$\mathfrak{p}^+ = \{X \in \mathfrak{p}_{\mathbb{C}} \mid \mathrm{ad}(H_0)X = \sqrt{-1}X\} = \langle W_+ = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & -1 \end{bmatrix} \rangle_{\mathbb{C}},$$

$$\mathfrak{p}^- = \{X \in \mathfrak{p}_{\mathbb{C}} \mid \mathrm{ad}(H_0)X = -\sqrt{-1}X\} = \langle W_- = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} & -1 \end{bmatrix} \rangle_{\mathbb{C}}$$

である．さて $G_v^1 = SL_2(\mathbb{R})$ の極大コンパクト部分群

$$K_v = SO(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & -c \\ c & a \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{R}) \right\}$$

は $k \mapsto J(k, \sqrt{-1})$ により $U(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^1$ と同型だから，$\delta_n(k) = J(k, \sqrt{-1})^n$ $(k \in K_v,\ n \in \mathbb{Z})$ が K_v の既約ユニタリ表現の全体である．

G_v^1 上の C^∞-関数 φ が

$$\varphi(gk) = \delta_n(k)^{-1}\varphi(g) \ \ \forall k \in K_v$$

を満たしているとする．これは

$$(X_+ - X_-)\varphi = \sqrt{-1}n \cdot \varphi$$

と同値である．このとき $\mathfrak{H}$ 上の関数 f が

$$f(g(\sqrt{-1})) = J(g, \sqrt{-1})^n \varphi(g) \qquad (g \in G_v^1 = SL_2(\mathbb{R}))$$

により定まる．ここで

$$\psi(x,y)=\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\begin{bmatrix}y & x\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)\qquad(x\in\mathbb{R},0<y\in\mathbb{R})$$

とおくと

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\varphi=2y\frac{\partial\psi}{\partial y},\qquad\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\varphi=y\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

であるから

$$(W_-\varphi)\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\begin{bmatrix}y & x\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)=\frac{2}{\sqrt{-1}}y^{1+n/2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\sqrt{-1}\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

となる．即ち，

$$W_-\varphi=0\ \Leftrightarrow\ f\text{ は }\mathfrak{H}\text{ 上の正則関数}$$

である．同様に

$$(W_+\varphi)\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\begin{bmatrix}y & x\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)=2\sqrt{-1}y^{1-n/2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y}\right)(y^nf)$$

である．さて G_v^1 上の C^∞-関数 φ が

1) 任意の $x\in\mathbb{R}$, $k\in K_v$ に対して $\varphi(\begin{bmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{bmatrix}gk)=\Lambda_v(tx)\delta_n(k)^{-1}\varphi(g)$ $(t\in F_v=\mathbb{R})$,
2) $W_-\varphi=0$

を満たすとき，$f(x+\sqrt{-1}y)=\Lambda_v(tx)f(\sqrt{-1}y)$ で，$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\sqrt{-1}\frac{\partial f}{\partial y}\right)=0$ よりは $\frac{\partial f}{\partial y}=-2\pi tf$ を満たす．即ち $f(\sqrt{-1}y)=C\cdot e^{-2\pi ty}$ $(C\in\mathbb{C})$ である．よって

$$\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\begin{bmatrix}y & x\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)=C\cdot y^{n/2}e^{2\pi\sqrt{-1}t\cdot(x+\sqrt{-1}y)}$$

或いは

$$\varphi(g)=C\cdot J(g,\sqrt{-1})^{-n}e^{2\pi\sqrt{-1}\cdot t\cdot g(\sqrt{-1})}\qquad(g\in G_v^1)$$

となる．

$G_v=GL_2(\mathbb{R})$ 上の C^∞-関数 $\Phi:G_v\to\mathbb{C}$ が

1) 任意の $x\in F_v^\times=\mathbb{R}^\times$, $k\in K_v$ に対して $\Phi(xgk)=\omega_v(x)\delta_n(k)^{-1}\Phi(g)$,
2) 任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して $\Phi(\begin{bmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{bmatrix}g)=\Lambda_v(tx)\Phi(g)$ $(t\in\mathbb{R})$,
3) $W_-\Phi=0$

を満たすとする．ここで $\omega_v(x) = |x|^s(x/|x|)^n$ $(s \in \sqrt{-1}\mathbb{R})$ である．

$$\Phi^+ = \Phi|_{G_v^+}, \qquad \Phi^-(g) = \Phi(sg) \qquad (g \in G_v^+, s = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix})$$

とおくと，$G_v^+ = Z_v \cdot G_v^1$ だから上で示した計算から

$$\Phi^+(\begin{bmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) = C_+ \cdot y^{(n+s)/2} e^{2\pi\sqrt{-1}t(x+\sqrt{-1}y)} \qquad (x \in \mathbb{R}, 0 < y \in \mathbb{R})$$

である．一方，G_v^+ 上の関数 Φ^- は

1) 任意の $x \in F_v^\times = \mathbb{R}^\times$, $k \in K_v$ に対して $\Phi(xgk) = \omega_v(x)\delta_n(k)^{-1}\Phi(g)$,
2) 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $\Phi(\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} g) = \Lambda_v(-tx)\Phi(g)$ $(t \in \mathbb{R})$,
3) $W_-\Phi = 0$

を満たすから

$$\Phi^-(\begin{bmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) = C_- \cdot y^{(n+s)/2} e^{-2\pi\sqrt{-1}t(x+\sqrt{-1}y)} \qquad (x \in \mathbb{R}, 0 < y \in \mathbb{R})$$

となる．即ち，

$$\Phi(\begin{bmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) = C_\pm \cdot |y|^{(n+s)/2} e^{2\pi\sqrt{-1}t(x+\sqrt{-1}y)} \qquad (x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^\times)$$

$(\pm = \operatorname{sign} y)$ となる．或いは

$$\Phi(g) = C_\pm |\det g|^{(n+s)/2} J(g, \sqrt{-1})^{-n} e^{2\pi\sqrt{-1}t \cdot g(\sqrt{-1})} \qquad (g \in G_v)$$

$(\pm = \operatorname{sign} \det g)$ である．

2.6 Hilbert 保型形式を扱うときには F は総実と仮定するが，一般の保型形式を扱う際には F は一般の代数体とするので，$P_\infty(F)$ には虚素点も現れる．参考までに虚素点の場合にも対応する対称領域を示しておく．$v \in P_\infty(F)$ が虚素点のとき，$G_v = GL_2(\mathbb{C})$ は連結で，その中心は $Z_v = \{a \cdot 1_2 \mid a \in \mathbb{C}^\times\}$ である．$G_v^1 = SL_2(\mathbb{C})$ とおくと，$G_v = Z_v \cdot G_v^1$ で G_v^1 は連結半単純実 Lie 群となり，$K_v = SU(2, \mathbb{C})$ は G_v^1 の極大コンパクト部分群である．Hamilton 四元数環を

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ -\overline{y} & \overline{x} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \right\}$$

と書いて，$z \in \mathbb{C}$ と $\begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & \overline{z} \end{bmatrix} \in \mathbb{H}$ を同一視することにより $\mathbb{C} \subset \mathbb{H}$ とする．
$\mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{H}$ とおいて

$$\mathcal{H} = \left\{ x + y\mathbf{j} = \begin{bmatrix} x & y \\ -y & \overline{x} \end{bmatrix} \,\middle|\, 0 < y \in \mathbb{R} \right\}$$

とおくと，$g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in G_v^1$ は $z \in \mathcal{H}$ に $g(z) = (az+b)(cz+d)^{-1}$ により推移的に作用し，$\mathbf{j} \in \mathcal{H}$ の固定部分群が K_v である．同様に $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in G_v = GL_2(\mathbb{C})$ は $z \in \mathbb{H}^* = \mathbb{H} \setminus \mathbb{C}$ に $g(z) = (az+b)(cz+d)^{-1}$ により推移的に作用する．$J(g,z) = cz + d \in \mathbb{H}^\times$ とおくと

$$J(gh,z) = J(g,h(z))J(h,z) \qquad (g,h \in G_v^1, z \in \mathcal{H})$$

である．対称領域 $\mathcal{H}$ は複素構造を持ち得ない（実奇数次元だから）．

3 $GL(2)$ 上の正則保型形式

以下，有限次総実代数体 F 上定義された代数群 $G = GL_2$ を考える．

3.1 ω を F の量指標とする．$K_f \subset G_{A,f}$ をコンパクト開部分群として，δ を G_A のコンパクト部分群 $K = K_\infty \times K_f$ の 1 次元ユニタリ表現とする．$\delta_\infty = \delta|_{K_\infty}, \delta_f = \delta|_{K_f}$ とおく．

$$\delta_\infty(k) = \delta_n(k) = \prod_{v \in P_\infty(F)} J(k_v, \sqrt{-1})^{n_v} \qquad (k \in K_\infty)$$

としておく（$n = (n_v)_{v \in P_\infty(F)} \in \mathbb{Z}^g$）．$\delta_f$ の連続性から

$$\prod_{v \in P_f(F)} \begin{bmatrix} 1 & \mathfrak{a}O_v \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \subset \operatorname{Ker} \delta_f$$

なる F の整イデアル $\mathfrak{a}$ が存在する．

G_A 上の複素数値連続関数 Φ が条件

1) 任意の $\gamma \in G_F$ に対して $\Phi(\gamma g) = \Phi(g)$，
2) 任意の $z \in F_A^\times$ と $k \in K$ に対して $\Phi(zgk) = \omega(z)\delta(k)^{-1}\Phi(g)$

を満たすとき Φ を (ω, δ)-型の保型形式と呼ぶことにしよう．このとき $\operatorname{Ker} \delta_f$

は $G_{A,f}$ の開部分群だから，Φ は $G_{A,f}$ 上は局所定数関数である．又

$$\Phi_0(g) = \int_{F_A/F} \Phi(\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} g) d\mu_0(x),$$
$$\Phi_1(g) = \int_{F_A/F} \Phi(\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} g) \Lambda(-x) d\mu_0(x)$$

とおくと

命題 3.1.1

$$\Phi(g) = \Phi_0(g) + \sum_{t \in F^\times} \Phi_1(\begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot g)$$

で $\Phi_1(\begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) \neq 0$ なる $y \in F_A^\times$ は $\mathrm{div}(y) \subset (\mathfrak{a} \cdot \mathcal{D}(F/\mathbb{Q}))^{-1}$ を満たす．

[**証明**] 1) $f(x, g) = \Phi(\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot g)$ $(x \in F_A,\ g \in G_A)$ とおくと，$f(x + t, g) = f(x, g)$ $(t \in F)$ だから

$$f(x, g) = \sum_{t \in F} C(t, g) \Lambda(tx), \qquad C(t, g) = \int_{F_A/F} f(x, g) \Lambda(-tx) d\mu_0(\dot{x})$$

である．ここで $C(0, g) = \Phi_0(g)$ であり，$t \in F^\times$ に対しては

$$\begin{aligned} C(t, g) &= \int_{F_A/F} \Phi(\begin{bmatrix} 1 & t^{-1}x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot g) \Lambda(-x) d\mu_0(\dot{x}) \\ &= \int_{F_A/F} \Phi(\begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot g) \Lambda(-x) d\mu_0(\dot{x}) \\ &= \Phi_1(\begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot g). \end{aligned}$$

よって

$$\Phi(\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot g) = \Phi_0(g) + \sum_{t \in F^\times} \Phi_1(\begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot g) \Lambda(tx)$$

で $x = 0$ とすればよい．

2) $x \in \mathfrak{a}O_v$ $(v \in P_f(F))$ として

$$\begin{aligned} \Phi_1(\begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) &= \Phi_1(\begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) \\ &= \Phi_1(\begin{bmatrix} 1 & xy \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) = \Lambda_v(xy) \Phi_1(\begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}). \end{aligned}$$

よって $\Phi_1(\begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) \neq 0$ とすると，任意の $x \in \mathfrak{a}O_v$, $v \in P_f(F)$ に対して $\Lambda_v(xy) = 1$ となるから，$\mathfrak{a} \cdot \mathrm{div}(y) \subset \mathcal{D}(F/\mathbb{Q})^{-1}$ となる．■

定義 3.1.2 G_A 上の複素数値関数 Ψ に対して

1) Ψ が B-moderate であるとは，定数 $\lambda \in \mathbb{R}$ と $0 < c \in \mathbb{R}$ があって

$$|\Phi(\begin{bmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix})| \leq c \cdot \mathrm{Max}\{|y|^{\lambda}, |y|^{-\lambda}\} \ \ \forall x \in F_A, y \in F_A^{\times}$$

なることをいう．

2) Φ が緩増加であるとは，任意の $0 < R \in \mathbb{R}$ と任意のコンパクト部分集合 $M \subset G_A$ に対して，$0 < C \in \mathbb{R}$ と $N \in \mathbb{R}$ があって，任意の $(y, g) \in F_{A,\infty}^{\times}(R) \times M$ に対して

$$|\Phi(\begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} g)| \leq C \cdot |y|_{\infty}^{N}$$

となることをいう．但し

$$F_{A,\infty}^{\times}(R) = \{y \in F_{A,\infty}^{\times} \mid |y_v| \geq R\}$$

とする．

命題 3.1.3 (ω, δ)-型の保型形式 Φ が B-moderate ならば Φ は緩増加である．

[**証明**] M を G_A のコンパクト部分集合とする．Φ は $G_{A,f}$ 上では局所定数関数だから，$g \in G_A$ が M を動くとは $g_f \in G_{A,f}$ が定数であって $g_\infty \in G_{A,\infty}$ がコンパクト部分集合 $M_\infty \subset G_{A,\infty}$ を動くことであるとしてよい．

$g_f \in B_{A,f} K_f Z_f$ のとき．

$$g = \begin{bmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} kz, \qquad (k \in K, z \in Z_A = F_A^{\times})$$

とできる．$\begin{bmatrix} yz & xz \\ 0 & z \end{bmatrix} = gk^{-1}$ と書いてみれば，y, z は $F_A^{\times}$ のコンパクト部分集合を動き，x は F_A のコンパクト部分集合を動いていることがわかる．よって任意の $p \in F_{A\,\infty}^{\times}(1)$ に対して

$$\begin{aligned} |\Phi(\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} g)| &\leq c \cdot |\Phi(\begin{bmatrix} py & px \\ 0 & 1 \end{bmatrix})| \\ &\leq c' \cdot \mathrm{Max}\{|p|^{\lambda}, |p|^{-\lambda}\} = |p|^{\lambda} \end{aligned}$$

となる $\lambda \geq 0$ が存在する．

$g_f \notin B_{A,f}K_fZ_f$ のとき．$\gamma g \in B_AKZ_A$ なる $\gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in G_F$ が存在する（命題 2.4.3）．$c \neq 0$ である．

$$\gamma g = \begin{bmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} kz \qquad (\begin{bmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in B_A, k \in K, z \in Z_A)$$

とおくと，y, z は $F_A^\times$ のコンパクト部分集合を動き，x は F_A のコンパクト部分集合を動く．よって任意の $p \in F_{A,\infty}^\times(1)$ に対して

$$|\Phi(\begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} g)| \leq c \cdot |\Phi(\gamma \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \gamma^{-1} \begin{bmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix})|$$

なる $c > 0$ がとれる．ここで

$$h = \gamma \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \gamma^{-1} \begin{bmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in G_A, \qquad h_f = \begin{bmatrix} y_f & x_f \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

だから

$$h = \begin{bmatrix} y' & x' \\ 0 & 1 \end{bmatrix} k'_\infty z'_\infty, \qquad \begin{gathered} \begin{bmatrix} y' & x' \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in B_A,\ x'_f = x_f, y'_f = y_f \\ k'_\infty \in K_\infty, z'_\infty \in F_\infty^\times \end{gathered}$$

とおく．

$$\begin{aligned} k'_\infty &= z'^{-1}_\infty \begin{bmatrix} y' & x' \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \gamma \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \gamma^{-1} \begin{bmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= (\det \gamma)^{-1} \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & z'^{-1}_\infty \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & * \\ cdy(p-1) & \det\gamma + c(dx-b)(p-1) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

より，任意の $p \in F_{A,\infty}(1)$ と $v \in P_\infty(F)$ に対して

$$A|y_v p_v^{-1}| \leq |y'_v| \leq B|y_v p_v^{-1}|$$

なる $A > 0, B > 0$ がとれる．よって

$$\left|\Phi(\gamma \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \gamma^{-1} \begin{bmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix})\right| \leq c' \left|\Phi(\begin{bmatrix} y' & x' \\ 0 & 1 \end{bmatrix})\right| \leq c''|p|^\lambda$$

なる $\lambda \geq 0$ がとれる．■

定義 3.1.4 (ω, δ)-型の保型形式 Φ に対して $\Phi_0 = 0$ となるとき，Φ を尖点形式と呼ぶ．

3.2

定義 3.2.1 G_A 上の複素数値連続関数 Φ が

1) 任意の $\gamma \in G_F$ に対して $\Phi(\gamma g) = \Phi(g)$,
2) 任意の $z \in F_A^\times$ と $k \in K$ に対して $\Phi(zgk) = \omega(z)\delta(k)^{-1}\Phi(g)$
3) Φ は $G_{A,\infty}$ 上では C^∞ で，各 $v \in P_\infty(F)$ に対して G_v 上で $W_-\Phi = 0$

を満たすとき，Φ を (ω, δ)-型の Hilbert モジュラー形式と呼ぶ.

Φ を (ω, δ)-型の Hilbert モジュラー形式とする．定理 2.4.1 より，

$$G_A = \bigsqcup_{t \in T} G_F \cdot \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot (G_{A,\infty}^+ \times U)$$

なる有限部分集合 $T \subset F_{A,f}^\times$ をとり，$t \in T$ に対して

$$\Gamma^{(t)} = G_F \cap (G_{A,\infty}^+ \times \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} K_f \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1})$$

$$\chi^{(t)}(\gamma) = \delta_f(\begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \gamma \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) \qquad (\gamma \in \Gamma^{(t)})$$

とおくと，$\Gamma^{(t)} \subset GL_2^+(F)$ はモジュラー群となり，$\chi^{(t)}$ は $\Gamma^{(t)}$ の有限指標となる．そこで $G_{A,\infty}^+$ 上の C^∞- 関数 $\Phi^{(t)}$ を

$$\Phi^{(t)}(g_\infty) = \Phi(g_\infty, \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) \qquad (t \in T, g_\infty \in G_{A,\infty})$$

と定義すると

1) 任意の $\gamma \in \Gamma^{(t)}$ に対して $\Phi^{(t)}(\gamma g) = \chi^{(t)}(\gamma)\Phi^{(t)}(g)$,
2) 任意の $x \in F_{A,\infty}^\times$, $k \in K_\infty$ に対して $\Phi^{(t)}(xgk) = \omega_\infty(x)\delta_n(k)^{-1}\Phi^{(t)}(g)$,
3) 各 $v \in P_\infty(F)$ に対して G_v^+ 上で $W_-\Phi^{(t)} = 0$

を満たす．ここで

$$\omega_\infty(x) = \prod_{v \in P_\infty(F)} |x_v|^{s_v}(x_v/|x_v|)^{n_v} \qquad (s_v \in \sqrt{-1}\mathbb{R})$$

とおけば，$\mathfrak{H}^g$ 上の関数 $f^{(t)}$ が

$$f^{(t)}(g(\sqrt{-1})) = (\det g)^{-(n+s)/2} J(g, z_0)^n \Phi^{(t)}(g) \qquad (g \in G_{A,\infty}^+)$$

により定義される（$z_0 = (\sqrt{-1}, \cdots, \sqrt{-1}) \in \mathfrak{H}^g$）．このとき $W_-\Phi^{(t)} = 0$ から $f^{(t)}$ は $\mathfrak{H}^g$ 上の正則関数となり，更に $f^{(t)} \in M_{n,s}(\Gamma^{(t)}, \chi^{(t)})$ となる.

逆に $(f^{(t)})_{t\in T} \in \prod_{t\in T} M_{n,s}(\Gamma^{(t)}, \chi^{(t)})$ に対して G_A 上の関数 Φ が

$$\Phi(\gamma \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (g_\infty, k_f)) = (\det g_\infty)^{(n+s)/2} J(g_\infty, z_0)^{-n} \delta_f(k_f)^{-1} f_f(g_\infty(z_0))$$

$$(\gamma \in G_F, g_\infty \in G_{A,\infty}, k_f \in K_f)$$

により定義され，(ω, δ)-型の Hilbert モジュラー形式となる．

この対応関係を $\Phi = (f^{(t)})_{t\in T}$ と表すことにする．

命題 3.2.2 Hilbert モジュラー形式 Φ は緩増加である（定義 3.1.2）．

[**証明**] $\Phi = (f^{(t)})_{t\in T} \in \prod_{t\in T} M_{n,s}(\Gamma^{(t)}, \chi^{(t)})$ とする．

$$g = \gamma \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (g_\infty, k_f) \in G_A \qquad (\gamma \in G_F, t \in T, g_\infty \in G_{A,\infty}, k_f \in K_f)$$

と $y \in F_{A,\infty}^\times$ に対して

$$\left| \Phi(\begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} g) \right| = \left| \Phi^{(t)}(\gamma^{-1} \begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \gamma g_\infty) \right|$$

で

$$\begin{aligned} &\Phi^{(t)}(\gamma^{-1} \begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \gamma g_\infty) \\ &= y^{(n+s)/2} (\det \gamma g_\infty)^{(n+s)/2} J(\gamma g_\infty, z_0)^{-n} \cdot (f^{(t)}|_{n,s} \gamma^{-1})(y \cdot \gamma g_\infty(z_0)) \end{aligned}$$

である．よって命題 1.3.2 より求める評価を得る．■

$G_{A,\infty}$ 上の関数 W_1, W_0 を

$$W_1(g) = \begin{cases} (\det g)^{(n+s)/2} J(g, z_0)^{-n} \mathbf{e}(T_{F/\mathbb{Q}}(g(z_0))) & g \in G_{A,\infty}^+ \text{ のとき}, \\ 0 & g \notin G_{A,\infty}^+ \text{ のとき} \end{cases}$$

及び

$$W_0(g) = |\det g|^{(n+s)/2} J(g, z_0)^{-n} \qquad (g \in G_{A,\infty})$$

により定義する．(ω, δ)-型の Hilbert モジュラー形式 Φ に対して，命題 3.1.1 より

$$\Phi(g) = \Phi_0(g) + \sum_{t\in F^\times} \Phi_1(\begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} g)$$

となるが，Φ_t $(t = 0, 1)$ は

1) 任意の $x \in F_{A,\infty}^\times$, $k \in K_\infty$ に対して $\Phi_t(xgk) = \omega_\infty(x)\delta_n(k)^{-1}\Phi_t(g)$,

2) 任意の $x \in F_{A,\infty}$ に対して $\Phi_t(\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} g) = \Lambda_\infty(tx)\Phi_t(g)$,

3) $W_-\Phi_t = 0$,

4) 任意の $0 < R \in \mathbb{R}$ と任意のコンパクト部分集合 $M \subset G_A$ に対して，$0 < C \in \mathbb{R}$ と $N \in \mathbb{R}$ があって，任意の $(y, g) \in F_{A,\infty}^\times(R) \times M$ に対して

$$\left|\Phi_t(\begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} g)\right| \leq C \cdot |y|_\infty^N$$

となる．

最後の条件は命題 3.2.2 による．よって 2.5 節の計算から，$G_{A,f}$ 上の連続関数 C, C_ε $(\varepsilon \in \{\pm 1\}^g)$ が定まって

$$\Phi_1(g) = C(g_f) \cdot W_1(g_\infty), \qquad \Phi_0(g) = C_{\mathrm{sign}\,\det g_\infty}(g_f) W_0(g_\infty)$$

$(g \in G_A)$ となる．特に

$$\begin{aligned}\Phi(\begin{bmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) =& C_{\mathrm{sign}\, y_\infty}(\begin{bmatrix} y_f & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) \cdot W_0(\begin{bmatrix} y_\infty & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) \\ &+ \sum_{t \neq 0}^{(y)} C(\begin{bmatrix} ty_f & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) W_1(\begin{bmatrix} ty_\infty & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) \Lambda(tx) \end{aligned} \tag{4}$$

である．ここで $\sum_{t \neq 0}^{(y)}$ は $(\mathfrak{a}\mathcal{D}(F/\mathbb{Q})\mathrm{div}\, y)^{-1}$ の 0 でない元の上にわたる和である．次の命題が示すように $C_\varepsilon(g_f)$ $(\varepsilon \in \{\pm 1\}^g,\ g_f \in G_{A,f})$ は $C_+(g_f)$ $(+ = (+1, \cdots, +1))$ により決定される；

命題 3.2.3 $\alpha \in F^\times$ の符号を $\mathrm{sign}\,\alpha = \varepsilon$ とすると

$$C_\varepsilon(g_f) = |\alpha|^{(n+s)/2} \cdot C_+(\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} g_f) \qquad (g_f \in G_{A,f})$$

である．

[**証明**] $\Phi(\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} g) = \Phi(g)$ より

$$\Phi(\begin{bmatrix} 1 & \alpha x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} g) = \Phi(\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} g) \qquad (g \in G_A)$$

だから，$g_\infty \in G_{A,\infty}^+$ と仮定すると，Fourier 展開の定数項を比較して

$$C_+(g_f) W_0(g_\infty) = C_\varepsilon(\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} g_f) W_0(\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} g_\infty) \qquad (g_f \in G_{A,f})$$

を得る．$W_0(\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} g_\infty) = |\alpha|^{(n+s)/2}W_0(g_\infty)$ だから，求める等式を得る．■

$\Phi = (f^{(a)})_{a\in T} \in \prod_{a\in T} M_{n,s}(\Gamma^{(a)}, \chi^{(a)})$ とすると (4) より

$$f^{(a)}(z) = C_+(\begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}) + \sum_{t\gg 0}^{(a)} C(\begin{bmatrix}ta & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}) \cdot t^{(n+s)/2}\mathbf{e}(T_{F/\mathbb{Q}}(tz)) \qquad (5)$$

となる．ここで $\sum_{t\gg 0}^{(a)}$ は $0 \ll t \in (\mathfrak{a}\mathcal{D}(F/\mathbb{Q})\cdot \operatorname{div} a)^{-1}$ なる t の上をわたる和である．

$$\prod_{v\in P_f(F)} \begin{bmatrix}O_v^\times & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \subset \operatorname{Ker}\delta_f \qquad (6)$$

ならば $C_\varepsilon(\begin{bmatrix}y_f & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix})$, $C(\begin{bmatrix}y_f & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix})$ $(y \in F_A^\times)$ は $\operatorname{div} y$ のみに依るから，これらを $C_\varepsilon(\operatorname{div} y)$, $C(\operatorname{div} y)$ と書くことにする．このとき Φ の Fourier 展開

$$\begin{aligned}\Phi(\begin{bmatrix}y & x\\ 0 & 1\end{bmatrix}) &= \Phi_0(\begin{bmatrix}y & x\\ 0 & 1\end{bmatrix}) + \sum_{t\in F^\times}\Phi_1(\begin{bmatrix}y & x\\ 0 & 1\end{bmatrix})\\ &= C_0(\operatorname{div} y)W_0(\begin{bmatrix}y_\infty & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}) + \sum_{t\in F^\times} C(\operatorname{div}(ty))W_1(\begin{bmatrix}ty_\infty & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix})\Lambda(tx)\end{aligned}$$

より，次の命題が成り立つことが判る；

命題 3.2.4 条件 (6) の下で，次は同値である；

1) 任意の $\mathfrak{b} \in I_F$ に対して $|C(\mathfrak{b})| \le c\cdot N(\mathfrak{b})^\lambda$ となる定数 $c > 0$ と $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在する，
2) Φ は B-moderate である．

3.3 定理 2.4.1 より，

$$G_A = \bigsqcup_{t\in T} G_F \cdot \begin{bmatrix}t & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdot (G_\infty^+ \times U)$$

なる有限部分集合 $T \subset F_{A,f}^\times$ をとり，$\Phi = (f^{(t)})_{t\in T}$ を (ω,δ)-型の Hilbert 保型形式とする．

命題 3.3.1 Φ が尖点形式（定義 3.1.4）となる必要十分条件は $f^{(t)}$ $(t \in T)$ が全て尖点形式なることである．

[**証明**] 命題 3.2.3 より，Φ が尖点形式なること（即ち，$\Phi_0 = 0$）は，任意の $g_f \in G_{A,f}$ に対して $C_+(g_f) = 0$ なることと同値であり，これは任意の

$\rho \in G_F \cap G_{A,\infty}^+$ と任意の $t \in T$ に対して $C_+(\rho \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) = 0$ なることと同値である．一方，任意の $\rho \in G_F \cap G_{A,\infty}^+$ と $a \in T$ に対して

$$(f^{(a)}|_{n,s}\rho)(z) = (\det g)^{-(n+s)/2} J(g, z_0)^n \Phi^{(a)}(\rho g)$$

$(z = g(z_0) \in \mathfrak{H}^g,\ g \in G_{A,\infty}^+)$ だから，(5) と同様に

$$\begin{aligned}(f^{(a)}|_{n,s}\rho)(z) =& C_+(\rho^{-1} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) \\ &+ \sum_{0 \ll t \in F^\times} C(\begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rho^{-1} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) \cdot t^{(n+s)/2} \mathbf{e}(T_{F/\mathbb{Q}}(tz))\end{aligned}$$

となるから，Φ が尖点形式なることと $f^{(a)}$ $(a \in T)$ が全て尖点形式なることは同値である．■

命題 1.4.1 とその近傍で述べたことと上の命題から直ちに次の系が得られる；

系 3.3.2 Φ が尖点形式ならば Φ は G_A 上の有界関数である．逆に $n = (n_v)_{v \in P_\infty(F)} \gg 0$ かつ Φ が G_A 上の有界関数ならば Φ は尖点形式である．

3.4 後の準備として Gauss 和について調べておく．$v \in P_f(F)$ を固定して，連続な群準同型写像

$$\lambda : O_v^\times \to \mathbb{C}^1$$

をとり

$$e = \mathrm{Min}\{0 \leq m \in \mathbb{Z} \mid \lambda(1 + \varpi_v^m O_v) = 1\} > 0$$

と仮定して，$\mathfrak{f}_\lambda = \varpi_v^e O_v$ とおく．$\delta O_v = \mathfrak{f}_\lambda \mathcal{D}_v$ なる $\delta \in F^\times$ を一つ固定して，$a \in O_v$ に対して

$$\tau_v(\lambda; a) = \sum_{y \in (O_v/\mathfrak{f}_\lambda)^\times} \Lambda_v(\delta^{-1} a y) \lambda(y)$$

とおく．$\tau_v(\Lambda; a)$ は $\dot{a} \in O_v/\mathfrak{f}_\lambda$ のみに依る．又 $a \notin O_v^\times$ ならば

$$u \equiv 1 \pmod{\varpi_v^{e-1}}, \qquad \lambda(u) \neq 1$$

なる $u \in O_v^\times$ が存在するして $\tau_v(\lambda; a) = \lambda(u)\tau_v(\lambda; a)$ となるから，$\tau_v(\lambda; a) = 0$ である．$a \in O_v^\times$ ならば

$$\tau_v(\lambda; a) = \lambda(a)^{-1} \tau_v(\lambda; 1)$$

となるから，$\tau_v(\lambda) = \tau_v(\lambda; 1)$ が本質的である．

命題 3.4.1 $a \in O_v^\times$ ならば $|\tau_v(\lambda; a)| = (O_v : \mathfrak{f}_\lambda)^{1/2}$ である．

[**証明**] $O_v/\mathfrak{f}_\lambda$ 上の複素数値関数全体のなす複素ベクトル空間を V とする．V 上の Hermite 内積を

$$(\varphi,\psi)=(O_v;\mathfrak{f}_\lambda)^{-1}\sum_{y\in O_v/\mathfrak{f}_\lambda}\varphi(y)\overline{\psi(y)}$$

により定義する．$\dot{a}\in O_v/\mathfrak{f}_\lambda$ に対して $f_{\dot{a}}\in V$ を $f_{\dot{a}}(\dot{y})=\Lambda_v(-\delta^{-1}ay)$ により定義すると

$$(f_{\dot{a}},f_{\dot{b}})=\begin{cases}1 & a\equiv b \pmod{\mathfrak{f}_\lambda}\ \text{のとき}\\ 0 & a\not\equiv b \pmod{\mathfrak{f}_\lambda}\ \text{のとき}\end{cases}$$

である．即ち，$\{f_{\dot{a}}\}_{\dot{a}\in O_v/\mathfrak{f}_\lambda}$ は V の正規直交基底をなす．$\varphi\in V$ を

$$\varphi(\dot{y})=\begin{cases}\lambda(y) & \dot{y}\in(O_v/\mathfrak{f}_\lambda)^\times\ \text{のとき},\\ 0 & \dot{y}\notin(O_v/\mathfrak{f}_\lambda)^\times\ \text{のとき}\end{cases}$$

により定義すると，上の Hermite 内積を用いて

$$\varphi=(O_v:\mathfrak{f}_\lambda)^{-1}\sum_{\dot{a}\in(O_v/\mathfrak{f}_\lambda)^\times}\tau(\lambda;a)f_{\dot{a}}$$

を得る．内積 (φ,φ) を二通りに計算して

$$(O_v:\mathfrak{f}_\lambda)^{-1}\sharp(O_v/\mathfrak{f}_\lambda)^\times=(O_v:\mathfrak{f}_\lambda)^{-2}\sharp(O_v/\mathfrak{f}_\lambda)^\times\cdot\tau(\lambda)$$

となるから

$$|\tau(\lambda;a)|=|\tau(\lambda)|=(O_v:\mathfrak{f}_\lambda)^{1/2}$$

$(a\in O_v^\times)$ を得る．■

3.5　$K_f\subset G_{A,f}$ をコンパクト開部分群として，δ を G_A のコンパクト部分群 $K=K_\infty\times K_f$ の 1 次元ユニタリ表現とする．$\delta_\infty=\delta_n$ ($n=(n_v)_{v\in P_\infty(F)}\in\mathbb{Z}^g$) とし，$F$ の整イデアル $\mathfrak{a}$ をとって

$$\prod_{v\in P_f(F)}\begin{bmatrix}O_v^\times & \mathfrak{a}O_v\\ 0 & 1\end{bmatrix}\subset\operatorname{Ker}\delta_f$$

と仮定する．ω を F の量指標とし

$$\omega_\infty(x)=\prod_{v\in P_\infty(F)}|x_v|^{s_v}\left(\frac{x_v}{|x_v|}\right)^{n_v}\qquad(x\in F_{A,\infty}^\times)$$

$(s=(s_v)_{v\in P_\infty(F)}\in(\sqrt{-1}\mathbb{R})^g)$ とする．

(ω,δ)-型の Hilbert モジュラー形式 Φ は Fourier 展開

$$\Phi(g)=\Phi_0(g)+\sum_{t\in F^\times}\Phi_1(\begin{bmatrix} t & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}g) \tag{7}$$

をもち

$$\Phi_1(\begin{bmatrix} y & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix})=C(\operatorname{div} y)\cdot W_1(\begin{bmatrix} y_\infty & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}) \qquad (y\in F_A^\times)$$

と書ける．F の量指標 α をとり

$$\alpha_\infty(x)=\prod_{v\in P_\infty(F)}|x_v|^{t_v}\left(\frac{x_v}{|x_v|}\right)^{m_v}$$

$(t_v\in\sqrt{-1}\mathbb{R},\ m_v\in\mathbb{Z})$ とする．$\operatorname{div} x=\mathfrak{a}\mathcal{D}(F/\mathbb{Q})$ なる $x\in F_{A,f}^\times$ を一つとり $\check{x}\in F_{A,f}$ は x の無限部分を全て 0 に変えたものとする．そこで積分

$$I=\int_{F_A^\times}\Phi_1(\begin{bmatrix} y & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \check{x}\\ 0 & 1\end{bmatrix})\alpha(y)|y|_A^s d\nu(y) \qquad (s\in\mathbb{C}) \tag{8}$$

を考える．$\operatorname{div}\delta=\mathfrak{a}\mathcal{D}(F/\mathbb{Q})$ なる $\delta\in F_{A,f}^\times$ を一つとると

$$\begin{aligned}
I&=\int_{F_A^\times}\Phi_1(\begin{bmatrix} \delta^{-1}y & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix})\Lambda(\delta^{-1}y\check{x})\alpha(\delta^{-1}y)|\delta^{-1}y|_A d\nu(y)\\
&=\int_{F_A^\times}C(\operatorname{div} y\cdot(\mathfrak{a}\mathcal{D}(F/\mathbb{Q}))^{-1})\\
&\qquad\qquad\times W_1(\begin{bmatrix} y_\infty & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix})\Lambda(\delta^{-1}y\check{x})\alpha(\delta^{-1}y)|\delta^{-1}y|_A d\nu(y)\\
&=\sum_{z\in R^+}\int_{F_\infty^\times\times\prod_{v\in P_f(F)}O_v^\times}C(\operatorname{div} z\cdot(\mathfrak{a}\mathcal{D}(F/\mathbb{Q}))^{-1})\\
&\qquad\qquad\times W_1(\begin{bmatrix} y_\infty & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix})\Lambda(\delta^{-1}zy\check{x})\alpha(\delta^{-1}zy)|\delta^{-1}zy|_A^s d\nu(y)\\
&=|\delta|_A^{-s}\sum_{z\in R^+}C(\operatorname{div} z\cdot(\mathfrak{a}\mathcal{D}(F/\mathbb{Q}))^{-1})\alpha_f(z)|z|_A^s\\
&\qquad\times\prod_{v\in P_f(F)}\int_{O_v^\times}\Lambda_v(\delta_v^{-1}x_vz_vy)\alpha_v(y)d\nu_v(y)\\
&\times\int_{F_\infty^\times}W_1(\begin{bmatrix} y & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix})\alpha_\infty(y)|y|_\infty^s d\nu_\infty(y)
\end{aligned}$$

となる．ここで

$$R^+=\{(\varpi_v^{e_v})_{v\in P_f(F)}\in F_{A,f}^\times\mid 0\le e_v\in\mathbb{Z}\}$$

とおく．$v \in P_f(F)$ を一つとって

$$I_v = \int_{O_v^\times} \Lambda_v(\delta_v^{-1} x_v z_v y)\alpha_v(y) d\nu_v(y) \qquad (z_v \in O_v)$$

を計算する．$\mathfrak{f}_\alpha O_v = \varpi_v^e O_v$ $(0 \le e \in \mathbb{Z})$ とおく．$e = 0$ ならば

$$I_v = \nu_v(O_v^\times) = (O_v : \mathcal{D}_v)^{-1/2}$$

である．$e > 0$ ならば，$H_v^e = 1 + \mathfrak{f}_\alpha O_v \subset O_v^\times$ とおいて，群の同型

$$O_v^\times / H_v^e \xrightarrow{\sim} (O_v/\mathfrak{f}_\alpha O_v)^\times \qquad (\dot{y} \mapsto \dot{y})$$

に注意すれば

$$I_v = \nu_v(H_v^e) \cdot \sum_{y \in (O_v/\mathfrak{f}_\alpha O_v)^\times} \Lambda(\delta_v^{-1} x_v z_v y)\alpha_v(y)$$

であり

$$\begin{aligned} \nu_v(H_v^e) &= (1 - q_v^{-1})^{-1} \mu_v^\times (1 + \varpi_v^e O_v) \\ &= (1 - q_v^{-1})^{-1} \mu_v(\varpi_v^e O_v) = (1 - q_v^{-1})^{-1} q_v^{-e} \mu_v(O_v) \\ &= (1 - q_v^{-1})^{-1} q_v^{-1} (O_v : \mathcal{D}_v)^{-1/2} \end{aligned}$$

となる．よって 3.4 節で調べた Gauss 和の性質から

$$\begin{aligned} &\prod_{v \in P_f(F)} \int_{O_v^\times} \Lambda_v(\delta_v^{-1} z_v y x_v)\alpha_v(y) d\nu_v(y) \\ &= \begin{cases} |D_F|^{-1/2} \varphi(\mathfrak{f}_\alpha)^{-1} \displaystyle\prod_{v | \mathfrak{f}_\alpha} \alpha_v(z_v)^{-1} \tau(\alpha_v) & : (\operatorname{div} z, \mathfrak{f}_\alpha) = 1, \\ 0 & : (\operatorname{div} z, \mathfrak{f}_\alpha) \ne 1 \end{cases} \end{aligned}$$

となる．ここで $\tau(\alpha_v) = \sum_{y \in (O_v/\mathfrak{f}_\alpha O_v)^\times} \Lambda_v(\delta_v^{-1} x_v y)\alpha_v(y)$ であり，又，F の整イデアル $\mathfrak{f}$ に対して

$$\varphi(\mathfrak{f}) = \sharp (O_F/\mathfrak{f})^\times = N(\mathfrak{f}) \prod_{\mathfrak{p} | \mathfrak{f}} \left(1 - N(\mathfrak{p})^{-1}\right)$$

である．一方，$y \in F_\infty^\times$ に対して

$$W_1\left(\begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{cases} y^{(n+s)/2} e^{-T_{F/\mathbb{Q}}(y)} & : y \gg 0, \\ 0 & : \text{otherwise} \end{cases}$$

だから

$$\int_{F_\infty^\times} W_1\left(\begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\alpha_\infty(y)|y|_\infty^s d\nu_\infty(y) = \prod_{v \in P_\infty(F)} \Gamma_{\mathbb{C}}\left(s + \frac{n_v + s_v}{2} + t_v\right)$$

となる．但し

$$\Gamma_{\mathbb{C}}(s) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s), \qquad \Gamma(s) = \int_0^\infty x^s e^{-x}\frac{dx}{x} \qquad (\mathrm{Re}\, s > 0)$$

である．一方，Φ の Fourier 展開(7) を用いて積分 (8) を書き直すと

$$\begin{aligned} I &= \int_{F_A^\times/F^\times} \sum_{t\in F^\times} \Phi_1(\begin{bmatrix} ty & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \check{x} \\ 0 & 1 \end{bmatrix})\alpha(y)|y|_A^s d\overline{\nu}(\dot{y}) \\ &= \int_{F_A^\times/F^\times} (\Phi - \Phi_0)(\begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \check{x} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) \cdot \alpha(y)|y|_A^s d\overline{\nu}(\dot{y}) \\ &= \int_0^\infty \frac{dr}{r}\int_{F_A^1/F^\times} d\overline{\nu}_1(\dot{y})(\Phi - \Phi_0)(\begin{bmatrix} ry & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \check{x} \\ 0 & 1 \end{bmatrix})\alpha(ry)r^s \end{aligned}$$

となる．以上をまとめて次の等式を得る；

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{dr}{r}\int_{F_A^1/F^\times} d\overline{\nu}_1(\dot{y})(\Phi - \Phi_0)(\begin{bmatrix} ry & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \check{x} \\ 0 & 1 \end{bmatrix})\alpha(ry)r^s \\ =&|D_F|^{-1/2}\varphi(\mathfrak{f}_\alpha)^{-1} \cdot \tau(\alpha, x) \\ &\times (N(\mathfrak{a})|D_F|)^s\, L(\Phi, \alpha, s)\Gamma(\omega_\infty, \delta_n; \alpha_\infty; s). \end{aligned} \tag{9}$$

ここで

$$\tau(\alpha, x) = \alpha_f(\delta)^{-1}\prod_{v|\mathfrak{f}_\alpha}\sum_{y\in(O_v/\mathfrak{f}_\alpha O_v)^\times}\Lambda_v(\delta_v^{-1}x_v \cdot y)\alpha_v(y), \tag{10}$$

$$L(\Phi, \alpha, s) = \sum_{\substack{\mathfrak{b}\subset O_F \\ (\mathfrak{b},\mathfrak{f}_\alpha)=1}} C(\mathfrak{b}\cdot(\mathfrak{a}\mathcal{D}(F/\mathbb{Q}))^{-1})\chi_\alpha(\mathfrak{b})N(\mathfrak{b})^{-s}, \tag{11}$$

$$\Gamma(\omega_\infty, \delta_n; \alpha_\infty; s) = \prod_{v\in P_\infty(F)}\Gamma_{\mathbb{C}}\left(s + \frac{n_v + s_v}{2} + t_v\right) \tag{12}$$

である．Φ が B-moderate ならば命題 3.2.4 より Dirichlet 級数 (11) は $\mathrm{Re}\, s$ が十分大きければ絶対一様収束する．従って，積分表示(9) は十分大きな $\mathrm{Re}\, s$ に対して正当である．

3.6 F の整イデアル $\mathfrak{n}$ をとり，$G_{A,f}$ の開コンパクト部分群 $K_f = \prod_{v\in P_f(F)} K_v$ を

$$K_v = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in GL_2(O_v) \,\middle|\, c \in \mathfrak{n}O_v\right\} \qquad (v \in P_f(F))$$

により定める．$\mathfrak{f}_\omega|\mathfrak{n}$ なる F の量指標 ω をとり，K_f の 1 次元表現 δ_f を

$$\delta_f\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \prod_{v|\mathfrak{n}}\omega_v(d_v)^{-1}$$

により定義すると $\prod_{v\in P_f(F)}\begin{bmatrix}O_v^\times & O_v\\ 0 & 1\end{bmatrix}\subset \operatorname{Ker}\delta_f$ である．$\delta_f=\bigotimes_{v\in P_f(F)}\delta_v$ と書けば，$v\nmid\mathfrak{n}$ ならば $\delta_v=\mathbf{1}_{K_v}$ は $K_v=GL_2(O_v)$ の自明な 1 次元表現である．$n=(n_v)_{v\in P_\infty(F)}\in\mathbb{Z}^g$ をとり，K_∞ の 1 次元表現 δ_n を

$$\delta_n(k)=J(k,z_0)^n \qquad (k\in K_\infty, z_0=(\sqrt{-1},\cdots,\sqrt{-1})\in\mathfrak{H}^g)$$

により定める．4.5 節で用いるために，このような設定の下に (ω,δ)-型の Hilbert 尖点形式の全体を $S_n(\mathfrak{n},\omega)$ と書くことにする．以下の議論では $K=K_\infty\times K_f$ の二つの 1 次元表現 $\delta=\delta_n\otimes\delta_f$ と $\delta^*=\delta_n\otimes\delta_f^{-1}$ が必要である．

$$\operatorname{div}N=\mathfrak{n}, \qquad N_v=1\ \forall v\nmid\mathfrak{n}$$

なる $N\in F_{A,f}^\times$ をとり，$\kappa=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -N & 0\end{bmatrix}\in G_A$ とおく．(ω,δ)-型の保型形式 Φ に対して

$$\widetilde{\Phi}(g)=\omega(\det g)^{-1}\Phi(g\kappa) \qquad (g\in G_A)$$

とおくと，$\widetilde{\Phi}$ は (ω^{-1},δ^*)-型の保型形式となる．また $X\in\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})\subset\operatorname{Lie}(G_v)$ $(v\in P_\infty(F))$ に対して

$$X\widetilde{\Phi}=\big((\operatorname{Ad}(\kappa_v^{-1})X)\Phi\big)^{\sim} \qquad \kappa_v=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$$

で $\operatorname{Ad}(\kappa_v)W_-=-W_-$ だから，$W_-\Phi=0$ と $W_-\widetilde{\Phi}=0$ は同値である．

Φ を (ω,δ)-型の Hilbert 保型形式として（従って $\widetilde{\Phi}$ は (ω^{-1},δ^*)-型の Hilbert 保型形式である），Φ と $\widetilde{\Phi}$ は共に B-moderate であると仮定する．$(\mathfrak{f}_\alpha,\mathfrak{n})=1$ なる F の量指標 α をとり

$$\alpha_\infty(x)=\prod_{v\in P_\infty(F)}|x_v|^{t_v}\left(\frac{x_v}{|x_v|}\right)^{m_v} \qquad (t_v\in\sqrt{-1}\mathbb{R}, m_v\in\mathbb{Z})$$

とおく．$\operatorname{div}a=\mathfrak{f}_\alpha$ なる $a\in F_{A,f}^\times$ を一つ固定しておく．$x=a^{-1}, x'=-a^{-1}$ とおく．$(\mathfrak{f}_\alpha,\mathfrak{n})=1$ に注意すれば

$$k=\begin{bmatrix}(1+Na\check{x}\cdot a\check{x}')/a & -a\check{x}'\\ -Na\check{x} & a\end{bmatrix}\in K_f$$

で

$$-N^{-1}y\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Ny^{-1}a & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \check{x}'\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdot k\kappa=\begin{bmatrix}ya & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \check{x}\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

となる．よって

$$\Phi(\begin{bmatrix}ya & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \check{x}\\ 0 & 1\end{bmatrix})=\chi_\omega(\mathfrak{f}_\alpha)\widetilde{\Phi}(\begin{bmatrix}Ny^{-1}a & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \check{x}'\\ 0 & 1\end{bmatrix}) \qquad (13)$$

を得る．さて 3.5 節の最後の結果を我々の現在の設定に従って整理すると等式

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \frac{dr}{r}\int_{F_A^1/F^\times} d\overline{\nu}_1(\dot{y})(\Phi-\Phi_0)(\begin{bmatrix} rya & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \check{x}\\ 0 & 1\end{bmatrix})\alpha(ry)r^s \qquad (14)\\ &=|D_F|^{-1}\varphi(\mathfrak{f}_\alpha)^{-1}\cdot\tau(\alpha)\,(|D_F|N(\mathfrak{f}_\alpha))^{s+\frac{1}{2}}\,L(\Phi,\alpha,s)\Gamma(\omega_\infty,\delta_n;\alpha_\infty;s)\end{aligned}$$

となる．ここで $\operatorname{div} c=\mathfrak{f}_\alpha\mathcal{D}(F/\mathbb{Q})$ なる $c\in F_{A,f}^\times$ をとって

$$\tau(\alpha)=N(\mathfrak{f}_\alpha)^{-1/2}\alpha_f(c)^{-1}\prod_{v\in P_f(F)}\sum_{y\in(O_v/\mathfrak{f}_\alpha O_v)^\times}\Lambda_v(c^{-1}y)\alpha_v(y)$$

とおく．$\tau(\alpha)$ は c の選択には依らず，$|\tau(\alpha)|=1$ である．Φ は B-moderate でると仮定しているので(14) 式は十分大きな $\operatorname{Re}s$ に対して絶対収束する．そこで(13) 式を用いて左辺の積分を次のように変形する；

(14) の左辺

$$\begin{aligned}
&=\int_1^\infty \frac{dr}{r}\int_{F_A^1/F^\times} d\overline{\nu}_1(\dot{y})(\Phi-\Phi_0)(\begin{bmatrix} rya & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \check{x}\\ 0 & 1\end{bmatrix})\alpha(ry)r^s\\
&\quad+\int_0^1 \frac{dr}{r}\int_{F_A^1/F^\times} d\overline{\nu}_1(\dot{y})\Phi(\begin{bmatrix} rya & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \check{x}\\ 0 & 1\end{bmatrix})\alpha(ry)r^s\\
&\quad-\int_0^1 \frac{dr}{r}\int_{F_A^1/F^\times} d\overline{\nu}_1(\dot{y})\Phi_0(\begin{bmatrix} rya & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix})\alpha(ry)r^s\\
&=\int_1^\infty \frac{dr}{r}\int_{F_A^1/F^\times} d\overline{\nu}_1(\dot{y})(\Phi-\Phi_0)(\begin{bmatrix} rya & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \check{x}\\ 0 & 1\end{bmatrix})\alpha(ry)r^s\\
&\quad+\chi_\omega(\mathfrak{f}_\alpha)\cdot\int_1^\infty \frac{dr}{r}\int_{F_A^1/F^\times} d\overline{\nu}_1(\dot{y})(\widetilde{\Phi}-\widetilde{\Phi}_0)(\begin{bmatrix} Nrya & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \check{x}'\\ 0 & 1\end{bmatrix})\overline{\alpha}(ry)r^{-s}\\
&\quad+\chi_\omega(\mathfrak{f}_\alpha)\cdot\int_1^\infty \frac{dr}{r}\int_{F_A^1/F^\times} d\overline{\nu}_1(\dot{y})\widetilde{\Phi}_0(\begin{bmatrix} Nrya & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix})\overline{\alpha}(ry)r^{-s}\\
&\quad-\int_0^1 \frac{dr}{r}\int_{F_A^1/F^\times} d\overline{\nu}_1(\dot{y})\Phi_0(\begin{bmatrix} rya & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix})\alpha(ry)r^s.
\end{aligned}$$

ここで $\operatorname{Re}s$ が十分大きいことに注意すると

$$\begin{aligned}\Phi_0(\begin{bmatrix} rya & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix})&=r^{(n+s)/2}\Phi_0(\begin{bmatrix} ya & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix})\\ &=r^{\sum_{v\in P_\infty(F)}(n_v+s_v)/2g}\cdot\Phi_0(\begin{bmatrix} ya & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix})\end{aligned}$$

より

$$\int_0^1 \frac{dr}{r}\int_{F_A^1/F^\times} d\overline{\nu}_1(\dot{y})\Phi_0(\begin{bmatrix} rya & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix})\alpha(ry)r^s$$

$$=\frac{1}{s+\frac{1}{g}\sum_{v\in P_\infty(F)}\left(\frac{n_v+s_v}{2}+t_v\right)}\cdot\int_{F_A^1/F^\times}\Phi_0(\begin{bmatrix} ya & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix})\alpha(y)d\overline{\nu}_1(\dot{y})$$

を得る．同様に

$$\int_1^\infty \frac{dr}{r}\int_{F_A^1/F^\times} d\overline{\nu}_1(\dot{y})\widetilde{\Phi}_0(\begin{bmatrix} Nrya & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix})\overline{\alpha}(ry)r^{-s}$$

$$=\frac{1}{s-\frac{1}{g}\sum_{v\in P_\infty(F)}\left(\frac{n_v-s_v}{2}-t_v\right)}\cdot\int_{F_A^1/F^\times}\widetilde{\Phi}_0(\begin{bmatrix} Nya & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix})\overline{\alpha}(y)d\overline{\nu}_1(\dot{y})$$

である．よって次の積分表示を得る；

$$|D_F|^{-1}\varphi(\mathfrak{f}_\alpha)^{-1}\cdot\tau(\alpha)\left(|D_F|N(\mathfrak{f}_\alpha)\right)^{s+1/2}L(\Phi,\alpha,s)\Gamma(\omega_\infty,\delta_n;\alpha_\infty;s)$$

$$=\int_1^\infty \frac{dr}{r}\int_{F_A^1/F^\times} d\overline{\nu}_1(\dot{y})(\Phi-\Phi_0)(\begin{bmatrix} rya & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \check{x} \\ 0 & 1\end{bmatrix})\alpha(ry)r^s \tag{15}$$

$$+\chi_\omega(\mathfrak{f}_\alpha)\cdot\int_1^\infty \frac{dr}{r}\int_{F_A^1/F^\times} d\overline{\nu}_1(\dot{y})(\widetilde{\Phi}-\widetilde{\Phi}_0)(\begin{bmatrix} Nrya & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \check{x}' \\ 0 & 1\end{bmatrix})\alpha(ry)r^s$$

$$+\frac{\chi_\omega(\mathfrak{f}_\alpha)}{s-\frac{1}{g}\sum_{v\in P_\infty(F)}\left(\frac{n_v-s_v}{2}-t_v\right)}\cdot\int_{F_A^1/F^\times}\widetilde{\Phi}_0(\begin{bmatrix} Nya & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix})\overline{\alpha}(y)d\overline{\nu}_1(\dot{y})$$

$$-\frac{1}{s+\frac{1}{g}\sum_{v\in P_\infty(F)}\left(\frac{n_v+s_v}{2}+t_v\right)}\cdot\int_{F_A^1/F^\times}\Phi_0(\begin{bmatrix} ya & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix})\alpha(y)d\overline{\nu}_1(\dot{y}).$$

ここで第一，第二の積分の被積分関数は r に関して急減少関数だから，s に関して整関数となる．よってこの積分表示により $L(\Phi,\alpha,s)$ が s に関して全複素平面に有理関数として解析接続される．ここで $\Phi_0(\begin{bmatrix} ya & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix})$ と $\widetilde{\Phi}_0(\begin{bmatrix} Nya & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix})$ は y を任意の $\varepsilon\in\prod_{v\in P_f(F)}O_v^\times\subset F_{A,f}^\times$ 倍しても不変だから，$\mathfrak{f}_\alpha\neq 1$ ならば

$$\int_{F_A^1/F^\times}\Phi_0(\begin{bmatrix} ya & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix})\alpha(y)d\overline{\nu}_1(\dot{y})=0,$$

$$\int_{F_A^1/F^\times}\widetilde{\Phi}_0(\begin{bmatrix} Nya & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix})\overline{\alpha}(y)d\overline{\nu}_1(\dot{y})=0$$

となる．更に 1.4 節の結果と(5) より，n_v, s_v が夫々 $v\in P_\infty(F)$ に依らない定数でないならば $\Phi_0=0, \widetilde{\Phi}_0=0$ となる．(15) と同様の積分表示を $\widetilde{\Phi}$ に対して計算すると次の等式が成り立つことが判る；

$$|D_F|^{-1}\varphi(\mathfrak{f}_\alpha)^{-1}\tau(\alpha)\left(|D_F|N(\mathfrak{f}_\alpha)\right)^{-s+1/2}L(\Phi,\alpha,-s)\Gamma(\omega_\infty,\delta_n;\alpha_\infty;-s)$$

$$=|D_F|^{-1}\varphi(\mathfrak{f}_\alpha)^{-1}$$

$$\times\tau(\overline{\alpha})\left(|D_F|N(\mathfrak{f}_\alpha)\right)^{s+1/2}L(\widetilde{\Phi},\overline{\alpha},s)\Gamma(\omega_\infty^{-1},\delta_n;\overline{\alpha}_\infty;s)\chi_\omega(\mathfrak{f}_\alpha)\chi_\alpha(\mathfrak{n}).$$

以上をまとめて，次の定理を得る；

定理 3.6.1 (ω,δ)-型の Hilbert 保型形式 Φ をとり，Φ と $\widetilde{\Phi}$ は共に B-moderate であるとする．このとき $(\mathfrak{f}_\alpha,\mathfrak{n})=1$ なる F の任意の量指標 α に対して

1) $L(\Phi,\alpha,s)$, $L(\widetilde{\Phi},\overline{\alpha},s)$ は s に関して全複素平面に有理関数として解析接続され，
2) 関数等式 $\Lambda(\Phi,\alpha,-s)=\varepsilon(\omega,\alpha;s)\cdot\Lambda(\widetilde{\Phi},\overline{\alpha},s)$ が成り立つ．ここで

$$\Lambda(\Phi,\alpha,s)=\Gamma(\omega_\infty,\delta_n;\alpha_\infty;s)L(\Phi,\alpha,s),$$
$$\varepsilon(\omega,\alpha;s)=\chi_\omega(\mathfrak{f}_\alpha)\chi_\alpha(\mathfrak{n})\tau(\alpha)^{-1}\tau(\overline{\alpha})\cdot\Big(|D_F|N(\mathfrak{n})^{1/2}N(\mathfrak{f}_\alpha)\Big)^{2s}$$

とおく，

3) n_v, s_v が夫々 $v\in P_\infty(F)$ に依らない一定値 n_∞, s_∞ であってかつ $\alpha=|\cdot|^t$ $(t\in\sqrt{-1}\mathbb{R})$ の場合に限り $\Lambda(\Phi,\alpha,s)$ は $s=\frac{n_\infty-s_\infty}{2}-t,-\left(\frac{n_\infty+s_\infty}{2}+t\right)$ に高々一位の極をもち，夫々における留数は

$$\int_{F_A^1/F^\times}\widetilde{\Phi}_0(\begin{bmatrix}Ny & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}d\overline{\nu}_1(\dot{y}),\qquad \int_{F_A^1/F^\times}\Phi_0(\begin{bmatrix}y & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix})d\overline{\nu}_1(\dot{y})$$

である．この場合を除くと $\Lambda(\Phi,\alpha,s)$ は s の整関数である．

注意 3.6.2 特に Φ が Hilbert 尖点形式ならば，$\widetilde{\Phi}$ も尖点形式であり，系 3.3.2 より共に G_A 上の有界関数であり，従って B-moderate である．このとき付随する L-関数 $\Lambda(\Phi,\alpha,s)$ は s の整関数となる．

4 Hecke 作用素

以下，3.6 節で定めた記号をそのまま用いる．$v\in P_f(F)$ に対して，局所コンパクト群 $G_v=GL_2(F_v)$ の Haar 測度 $d_{G_v}(g)$ は K_v の体積が 1 となるように正規化しておく．

4.1 この節では $v\nmid\mathfrak{n}$ なる $v\in P_f(F)$ を固定しておく．G_v 上の複素数値連続関数 φ であって，$\mathrm{supp}\,\varphi$ がコンパクトかつ任意の $k,k'\in K_v=GL_2(O_v)$ に対して $\varphi(kxk')=\varphi(x)$ なるもの全体のなす複素ベクトル空間 $\mathcal{H}_v$ は畳込み積

$$(\varphi*\psi)(x)=\int_{G_v}\varphi(xy^{-1})\psi(y)d_{G_v}(y)$$

により $\mathbb{C}$-代数となる．$g\in G_v$ に対して G_v の開コンパクト部分集合 K_vgK_v の特性関数を $[K_vgK_v]\in\mathcal{H}_v$ とすると，$\{[K_vgK_v]\}_{g\in G_v}$ は $\mathcal{H}_v$ の $\mathbb{C}$ 上の基

底をなす．一方， $g=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in G_v$ に対して

$$g^* = (\det g)\cdot g^{-1} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

とおくと，$(gh)^* = h^* g^*$ かつ，任意の $K_v g K_v$ を不変に保つから $\mathcal{H}_v$ は可換代数となる．

$$K_v g K_v = \bigsqcup_{i=1}^{m} K_v g_i, \quad K_v g' K_v = \bigsqcup_{j=1}^{n} K_v g'_j, \quad K_v g K_v g' K_v = \bigsqcup_{k=1}^{l} K_v g''_k K_v$$

に対して

$$[K_v g K_v] * [K_v g' K_v] = \sum_{k=1}^{l} m(g''_k; g, g')[K_v g''_k K_v]$$

で

$$m(g''_k; g, g') = \sharp\{(i,j) \mid K_v g_i g'_j = K_v g''_k\}$$

である．

$V = F_v^2$（横ベクトル）として，V の O_v-部分加群であって V の F_v 上の基底を含むものを O_v-格子と呼ぶ．$\Lambda = O_v^2 \subset V$ は O_v-格子である．任意の O_v-格子 $L, M \subset V$ に対して，L の O_v-基底 $\{v, w\}$ と $a \leq b$ なる $a, b \in \mathbb{Z}$ があって，$\{\varpi_v^a v, \varpi_v^b w\}$ が M の O_v-基底となる．このとき $\{L : M\} = \{\varpi_v^a, \varpi_v^b\}$ と書くことにする．$Lk = M$ なる $k \in K_v$ が存在するための必要十分条件は $\{\Lambda : L\} = \{\Lambda : M\}$ なることである．

補題 4.1.1 $g, g', g'' \in G_v$ に対して，$m(g''; g, g')$ は $\{L : \Lambda g''\} = \{\Lambda : \Lambda g\}$ かつ $\{\Lambda : L\} = \{\Lambda : \Lambda g'\}$ なる O_v-格子 $L \subset V$ の個数に等しい．

[**証明**] その様な O_v-格子の集合を $\mathcal{L}$ とおく．

$$K_v g K_v = \bigsqcup_i K_v g_i, \qquad K_v g' K_v = \bigsqcup_j K_v g'_j$$

とおいて，$g_i g'_j \in K_v g''$ なる (i,j) の集合を $\mathcal{I}$ とおくと，$(i,j) \mapsto \Lambda g'_j$ は $\mathcal{I}$ から $\mathcal{L}$ への単射を定義する．任意の $L \in \mathcal{L}$ に対して，$\{\Lambda : L\} = \{\Lambda : \Lambda g'\}$ より $L = \Lambda g'_j$ なる g'_j が存在する．このとき

$$\{\Lambda : \Lambda g'' g'^{-1}_j\} = \{\Lambda g'_j : \Lambda g''\} = \{L : \Lambda g\}$$

だから，$\Lambda g'' g'^{-1}_j = \Lambda g_i$ なる g_i が存在する．よって $(i,j) \in \mathcal{I}$ で $L = \Lambda g'_j$ となるから $(i,j) \mapsto \Lambda g'_j$ は全射である．よって

$$\sharp\mathcal{L} = \sharp\mathcal{I} = m(g''; g, g')$$

となる．■

$g \in G_v$ に対して $\{\Lambda : \Lambda g\} = \{\varpi_v^a O_v, \varpi_v^b O_v\}$ $(a, b \in \mathbb{Z},\ a \le b)$ ならば

$$K_v g K_v = K_v \begin{bmatrix} \varpi_v^a & 0 \\ 0 & \varpi_v^b \end{bmatrix} K_v$$

である．このとき $[K_v g K_v] = T(\varpi_v^a, \varpi_v^b)$ と書くことにする．

$$T(\varpi_v, \varpi_v) * T(\varpi_v^a, \varpi_v^b) = T(\varpi_v^{a+1}, \varpi_v^{b+1})$$

である．$0 \le e \in \mathbb{Z}$ に対して

$$T(\varpi_v^e) = \sum_{\substack{0 \le a \le b \\ a+b=e}} T(\varpi_v^a, \varpi_v^b) \in \mathcal{H}_v$$

とおくと，これは $\{g \in M_2(O_v) \mid \det g \in \varpi_v^e O_v^\times\}$ の G_v における特性関数である．$T(1)$ は $\mathcal{H}_v$ の 1 を与え，$e \ge 2$ ならば

$$T(1, \varpi_v^e) = T(\varphi_v^e) - T(\varpi_v, \varpi_v) * T(\varpi_v^{e-2}) \tag{16}$$

である．又 $T(1, \varpi_v) = T(\varpi_v)$ である．

命題 4.1.2 $e > 0$ のとき

$$T(\varpi_v^e) * T(\varpi_v) = T(\varpi_v^{e+1}) + q_v \cdot T(\varpi_v, \varpi_v) * T(\varpi_v^{e-1})$$

である．

[**証明**]

$$T(\varpi_v^e) * T(\varpi_v) = \sum_{\substack{0 \le a \le b \\ a+b=e+1}} c(a,b) T(\varpi_v^a, \varpi_v^b) \qquad (c(a,b) \in \mathbb{Z})$$

と書ける．ここで $g'' = \begin{bmatrix} \varpi_v^a & 0 \\ 0 & \varpi_v^b \end{bmatrix}$ $(0 \le a \le b, a+b=e+1)$ に対して，補題 4.1.1 より

$$\begin{aligned} c(a,b) &= \sum_{\substack{0 \le c \le d \\ c+d=e}} \sharp \left\{ \begin{matrix} \{L : \Lambda g''\} = \{\varpi_v^c, \varpi_v^d\} \text{ かつ } \{\Lambda : L\} = \{1, \varpi_v\} \\ \text{なる } O_v\text{-格子 } L \subset V \end{matrix} \right\} \\ &= \sharp\{\{\Lambda : L\} = \{1, \varpi_v\} \text{ かつ } \Lambda g'' \subset L \subset \Lambda \text{ なる } O_v\text{-格子 } L\} \end{aligned}$$

である．ここで O_v-格子 $L \subset V$ に対して

$$\Lambda g'' \subset L \subset \Lambda, \quad \text{かつ} \quad \{\Lambda : L\} = \{1, \varpi_v\}$$

は

$$\Lambda g'' + \varpi_v \Lambda \subset L \subset \Lambda \quad \text{かつ} \quad \Lambda/L \xrightarrow{\sim} O_v/(\varpi_v)$$

と同値で

$$O_v/(\Lambda g'' + \varpi_v \Lambda) \xrightarrow{\sim} \begin{cases} O_v/(\varpi_v) & : a = 0 \text{ のとき} \\ O_v/(\varpi_v) \oplus O_v/(\varpi_v) & : a > 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

だから

$$c(a,b) = \begin{cases} 1 & : a = 0 \text{ のとき} \\ q_v + 1 & : a > 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

となる．よって求める等式を得る．■

上の命題から直ちに

系 4.1.3 変数 X の形式的冪級数として

$$\sum_{e \geq 0} T(\varpi_v^e) X^e = (1 - T(\varpi_v)X + q_v \cdot T(\varpi_v, \varpi_v)X^2)^{-1}.$$

命題 4.1.2 と(16) 式から，$\mathcal{H}_v$ は $\mathbb{C}$-代数として $\{T(1,\varpi_v), T(\varpi_v,\varpi_v)^{\pm 1}\}$ により生成されることが判る．更に正確には

命題 4.1.4 $\mathcal{H}_v$ は $\mathbb{C}[X, Y^{\pm 1}]$ と $\mathbb{C}$-代数として同型である．同型写像は

$$T(1, \varpi_v) \mapsto X, \qquad T(\varpi_v, \varpi_v) \mapsto Y$$

により与えられる（X, Y は変数である）．

[**証明**] $X \mapsto T(1, \varpi_v)$, $\mathbb{C}[X, Y^{\pm 1}]$ から $\mathcal{H}_v$ への全射 $\mathbb{C}$-代数準同型写像 Φ が定義される．$\mathcal{H}_v$ から $\mathbb{C}[X]$ への $\mathbb{C}$-線形写像 Ψ を

$$\Psi T(\varpi_v^a, \varpi_v^b) = \begin{cases} X^b & : a = 0 \text{ のとき} \\ 0 & : a > 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

により定めると，Ψ は実際には $\mathcal{H}_v$ から $\mathbb{C}[X]$ への環準同型写像となる．実際，正整数 a, b, c に対して

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi_v^a \end{bmatrix}, \qquad g' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi_v^b \end{bmatrix}, \qquad g'' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi_v^c \end{bmatrix}$$

とする．$x \in F$ と $(0, x) \in V$ を同一視して $F \subset V$ とみなすと，

$$\{\Lambda : L\} = \{\Lambda : \Lambda g'\} = \{1, \varpi_v^b\}$$

なる O_v-格子 $\Lambda g'' \subset L \subset V$ は $L = \Lambda g'$ に限るから

$$m(g''; g, g') = \begin{cases} 1 & : a+b=c \text{ のとき} \\ 0 & : a+b \neq c \text{ のとき} \end{cases}$$

となる．よって Ψ は $\mathcal{H}_v$ から $\mathbb{C}[X]$ への環の準同型写像である．明らかに $\mathrm{Ker}\,\Psi = T[\varpi_v, \varpi_v]\mathcal{H}_v$ である．そこで $0 \neq P(X,Y) \in \mathrm{Ker}\,\Phi$ として

$$P(X,Y) = P_n(X)Y^n + P_{n+1}Y^{n+1} + \cdots, \quad P_n(X) \neq 0 \quad (P_j(X) \in \mathbb{C}[X])$$

とおくと，$P(T(1,\varpi_v), T(\varpi_v, \varpi_v)) = 0$ より

$$P_n(T(1,\varpi_v)) + P_{n+1}(T(1,\varpi_v))T(\varpi_v,\varpi_v) + \cdots = 0$$

となり，両辺を Ψ で写すと $P_n(X) = 0$ となって矛盾する．よって Φ は単射である．■

命題 4.1.5 正整数 r, s に対して

$$T(\varpi_v^r) * T(\varpi_v^s) = \sum_{0 \leq e \leq \mathrm{Min}\{r,s\}} q_v^e \cdot T(\varpi_v^e, \varpi_v^e) * T(\varpi_v^{r+s-2e}).$$

[**証明**] 命題 4.1.4 から，変数 A, B をとって，$T(1,\varpi_v) \mapsto A+B$, $T(\varpi_v,\varpi_v) \mapsto q_v^{-1}AB$ により $\mathcal{H}_v \subset \mathbb{C}[A, B^{\pm 1}]$ とすると，系 4.1.3 より

$$\sum_{e \geq 0} T(\varpi_v^e) X^{e+1} = \frac{X}{(1-AX)(1-BX)} = \sum_{e \geq 0} \frac{A^e - B^e}{A-B} X^e,$$

よって

$$T(\varpi_v^e) = \frac{A^{e+1} - B^{e+1}}{A-B} = \sum_{0 \leq k \leq e} A^{e-k}B^k \qquad (e \geq 0)$$

となる．$r \geq s \geq 0$ として

$$\begin{aligned} T(\varpi_v^r) * T(\varpi_v^s) &= \frac{A^{r+1} - B^{r+1}}{A-B} \cdot \sum_{0 \leq k \leq s} A^{s-k}B^k \\ &= \frac{1}{A-B} \cdot \sum_{0 \leq k \leq s} \left(A^{r+s+1-k}B^k - A^k B^{r+s+1-k} \right) \\ &= \sum_{0 \leq k \leq s} q_v^k T(\varpi_v^k, \varpi_v^k) * T(\varpi_v^{r+s-2k}) \end{aligned}$$

となる．■

$T(\varpi_v^e) \in \mathcal{H}_v$ の Hilbert 保型形式への作用を計算するために次の命題を示しておく；

命題 4.1.6 $0 < e \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\left\{g \in M_2(O_v) \mid \det g \in \varpi_v^e O_v^\times\right\} = \bigsqcup_{\substack{o \le k \le e \\ t \in O_v/\varpi_v^k O_v}} K_v \begin{bmatrix} \varpi_v^{e-k} & t \\ 0 & \varpi_v^k \end{bmatrix}.$$

[**証明**] $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(O_v)$ s.t. $\det g = \varpi_v^e$ とすると，$\mathrm{GCD}(a,c) | \det g$ より $\mathrm{GCD}(a,c) = \varpi_v^{e-k}$ $(0 \le k \le e)$ とおいて $a' = a/\varpi_v^{e-k}$, $c' = c/\varpi_v^{e-k}$ とおくと，

$$k = \begin{bmatrix} s & t \\ -c' & a' \end{bmatrix} \in SL_2(O_v) \subset K_v$$

がとれる．このとき

$$kg = \begin{bmatrix} \varpi_v^{e-k} & b' \\ 0 & \varpi_v^k \end{bmatrix} \qquad (b' \in O_v)$$

となる．一方，$0 \le k, l \le e$, $t, t' \in O_v$ に対して

$$\begin{bmatrix} \varpi_v^{e-l} & t' \\ 0 & \varpi_v^l \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} \varpi_v^{e-k} & t \\ 0 & \varpi_v^k \end{bmatrix}$$

なる $k \in K_v = GL_2(O_v)$ があれば，両辺の成分を比較して

$$k = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad l = k, \qquad t' \equiv t \pmod{\varpi_v^k}$$

であることが判る．■

4.2 この節では $v | \mathfrak{n}$ なる $v \in P_f(F)$ を固定しておく．G_v 上の複素数値連続関数 φ であって，$\operatorname{supp}\varphi$ がコンパクトかつ任意の $k, k' \in K_v$ に対して $\varphi(kxk') = \delta_v(k)^{-1}\varphi(x)\delta_v(k')^{-1}$ なるもの全体のなす複素ベクトル空間 $\mathcal{H}_v(\delta_v)$ は畳込み積

$$(\varphi * \psi)(x) = \int_{G_v} \varphi(xy^{-1})\psi(y) d_{G_v}(y)$$

により $\mathbb{C}$-代数となる．

$$a \in O_v^\times, \quad \text{かつ} \quad c \equiv 0 \pmod{\mathfrak{n} O_v}$$

なる $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(O_v) \cap GL_2(F)$ の全体を Δ_v とすると，Δ_v は行列の積に関して単位元をもつ半群となり，$K_v \subset \Delta_v$ である．

命題 4.2.1 $\Delta_v = \bigsqcup_{e\ge 0} K_v \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi_v^e \end{bmatrix} K_v.$

[**証明**] 4.1 節と同様に $V = F^2$（横ベクトル）として $\Lambda = O_v^2 \subset V$ とおく．又，

$$\Lambda_0 = \{(x,y)\in\Lambda \mid x \in \mathfrak{n}O_v\} = \Lambda \begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とおく．ここで $NO_v = \mathfrak{n}O_v$ なる $N \in O_v$ を一つ固定しておく．$g = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \in \Delta_v$ をとり $\mathrm{ord}_v(\det g) = e$ とする．$g^* = (\det g)g^{-1} = \begin{bmatrix} s & -q \\ -r & p \end{bmatrix}$ とおくと $\Lambda_0 g^* \subset \Lambda_0$ となり，Λ の O_v-基底 $\{w_1, w_2\}$ と $a|b$ なる $\{a,b\}\subset O_v$ があって $\{aw_1, bw_2\}$ が $\Lambda_0 g^*$ の O_v-基底となる．ここで $t|a$ とすると $t\Lambda \supset\ni (-r,p)$ だから $t|p$ となり $t \in O_v^\times$ であるから，$a \in O_v^\times$，よって $a=1$ としてよい．よって $b = N\varpi_v^e$ とすることができて（$\Lambda_0 g^* = \Lambda \begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} g^*$ だから），$k = \begin{bmatrix} w_2 \\ w_1 \end{bmatrix} \in K_v$ である．ここで $\Lambda_0 g^* \subset \Lambda g^* \subset \Lambda$ は O_v-格子で $\{\Lambda g^*, \Lambda_0 g^*\} = \{1, N\}$ であるが，逆に O_v- 格子 $\Lambda_0 g^* \subset L \subset \Lambda$ が $\{L, \Lambda_0 g^*\} = \{1,N\}$ を満たすならば，$NL \subset \Lambda_0 g^*$ で

$$NLk^{-1} \subset \Lambda_0 g^* k^{-1} = \Lambda \begin{bmatrix} N\varpi_v^e & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

だから

$$\Lambda \begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \supset Lk^{-1} \supset \Lambda_0 g^* k^{-1} = \Lambda \begin{bmatrix} N\varpi_v^e & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \{L, \Lambda_0 g^*\} = \{1, N\}$$

より $Lk^{-1} = \Lambda \begin{bmatrix} \varpi_v^e & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ となる．よって $\Lambda g^* = \Lambda \begin{bmatrix} \varpi_v^e & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} k$ となり

$$g^* = k' \begin{bmatrix} \varpi_v^e & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} k, \qquad k' \in GL_2(O_v)$$

となる．よって $g = k^* \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi_v^e \end{bmatrix} k'^*$, $k^*, k'^* \in K_v$ となる．■

$g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Delta_v$ に対して $\widetilde{\delta}_v(g) = \omega_v(a \cdot \det g^{-1}) \in \mathbb{C}^1$ とおくと，$\widetilde{\delta}_v$ は半群 Δ_v から $\mathbb{C}^1$ への半群の準同型写像となり，$\widetilde{\delta}_v|_{K_v} = \delta_v$ である．$0 \le e \in \mathbb{Z}$ に対して $K_v \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi_v^e \end{bmatrix}$ の G_v における特性関数を $[K_v \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi_v^e \end{bmatrix} K_v]$ として

$$T(\varpi_v^e) = \widetilde{\delta}_v \cdot [K_v \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi_v^e \end{bmatrix} K_v] \in \mathcal{H}_v(\delta_v)$$

とおくと，$T(1)$ は $\mathcal{H}_v(\delta_v)$ の 1 を与え，$T(\varpi_v^e) * T(\varpi_v^f) = T(\varpi_v^{e+f})$ である．よって変数 X に関する形式的冪級数として

$$\sum_{e\geq 0} T(\varpi_v^e) X^e = (1 - T(\varpi_v)X)^{-1} \tag{17}$$

となる．

命題 4.2.2 $0 \leq e \in \mathbb{Z}$ に対して

$$K_v \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi_v^e \end{bmatrix} K_v = \bigsqcup_{t \in O_v/(\varpi_v^e)} K_v \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & \varpi_v^e \end{bmatrix}$$

である．

[**証明**] $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in K_v \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi_v^e \end{bmatrix} K_v$ に対して，$a \in O_v^\times$ だから $k = \begin{bmatrix} a^{-1} & 0 \\ -c & a \end{bmatrix} \in K_c$ で $kg = \begin{bmatrix} 1 & a^{-1}b \\ 0 & \det g \end{bmatrix}$ となる．逆に $k = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \in K_v$ に対して $\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & \varpi_v^e \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & t' \\ 0 & \varpi_v^e \end{bmatrix}$ とすると，両辺の成分を比較して $a = d = 1, c = 0$, $t \equiv t' \pmod{\varpi_v^e}$ となる．■

4.3 Φ を (ω, δ)-型の Hilbert 保型形式とする．$v \nmid \mathfrak{n}$ なる $v = \mathfrak{p} \in P_f(F)$ をとり，$\varphi \in \mathcal{H}_v$ に対して

$$(\Phi * \varphi)(x) = \int_{G_v} \Phi(xy^{-1})\varphi(y) d_{G_v}(y) \qquad (x \in G_v)$$

とおくと，$\Phi * \varphi$ は再び (ω, δ)-型の Hilbert 保型形式となる．特に $T(\mathfrak{p}^e) = T(\varpi_v^e) \in \mathcal{H}_v$ $(e \geq 0)$ として，$\Phi' = \Phi * T(\mathfrak{p}^e)$ に対して

$$\Phi_1'(\begin{bmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) = C'(\operatorname{div} y) \cdot W_1(\begin{bmatrix} y_\infty & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix})\Lambda(x)$$

とおくと，Φ の Fourier 係数との間には次の関係が成り立つ；

命題 4.3.1 F の整イデアル $\mathfrak{b} \subset O_F$ に対して

$$C'(\mathfrak{b}\mathcal{D}^{-1}) = \sum_{0 \leq k \leq \mathrm{Min}\{\mathrm{ord}_v(\mathfrak{b}), e\}} C(\mathfrak{p}^{e-2k}\mathfrak{b}\mathcal{D}^{-1}) \chi_\omega(\mathfrak{p}^{k-e}) N(\mathfrak{p}^{e-k})$$

である．ここで $\mathcal{D} = \mathcal{D}(F/\mathbb{Q})$ は $F/\mathbb{Q}$ の共役差積である．

[**証明**] 命題 4.1.6 より

$$\begin{aligned}
\Phi_1'(\begin{bmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) &= \sum_{\substack{0\le k\le e \\ t\in O_v/(\varpi_v^k)}} \Phi_1(\begin{bmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varpi_v^{e-k} & t \\ 0 & \varpi_v^k \end{bmatrix}^{-1}) \\
&= \sum_{k,t} \Phi_1(\varpi_v^{-k} \cdot \begin{bmatrix} 1 & x - y\varpi_v^{k-e}t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varpi_v^{2k-e} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) \\
&= \sum_{0\le k\le e} C(\mathrm{div}(\varpi_v^{2k-e}y)) \cdot W_1(\begin{bmatrix} y_\infty & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix})\Lambda(x)\omega_v(\varpi_v^{-k}) \\
&\qquad\qquad \times \sum_{t\in O_v/(\varpi_v^k)} \Lambda_v(-y_v\varpi_v^{k-e}t)
\end{aligned}$$

である．ここで $v \nmid \mathfrak{f}_\omega$ だから $\omega_v(\varpi_v^{-k}) = \chi_\omega(\mathfrak{p})^{-k}$ である．一方，

$$\sum_{t\in O_v/(\varpi_v^k)} \Lambda_v(-y_v\varpi_v^{k-e}t) = \begin{cases} N(\mathfrak{p}^k) & : y_v\varpi_v^{k-e} \in \mathcal{D}_v^{-1} \text{ のとき} \\ 0 & : y_v\varpi_v^{k-e} \notin \mathcal{D}_v^{-1} \text{ のとき} \end{cases}$$

で，$y_v\varpi_v^{k-e} \in \mathcal{D}_v^{-1}$ は $e-k \le \mathrm{ord}_v(y_v) + \mathrm{ord}_v(\mathcal{D}_v)$ と同値だから，整イデアル $\mathfrak{b} \subset O_F$ に対して $\mathrm{div}(y) = \mathfrak{b}\mathcal{D}^{-1}$ なる $y \in F_A^\times$ をとれば，求める関係式を得る．■

$\mathbb{C}$-代数の準同型写像 $\lambda_v : \mathcal{H}_v \to \mathbb{C}$ があって

$$\Phi * \varphi = \lambda_v(\varphi) \cdot \Phi \quad \forall\varphi \in \mathcal{H}_v \tag{18}$$

とする．特に $\lambda(\mathfrak{p}^e) = \lambda_v(T(\mathfrak{p}^e))$ $(0 \le e \in \mathbb{Z})$ とおくと，$\mathcal{H}_v$ は $T(\mathfrak{p})$ と $T(\varpi_v, \varpi_v)$ により生成され，$\Phi * T(\varpi_v, \varpi_v) = \chi_\omega(\mathfrak{p})^{-1}\Phi$ だから，(18) は $\Phi * T(\mathfrak{p}) = \lambda(\mathfrak{p}) \cdot \Phi$ と同値である．又，系 4.1.3 より

$$\sum_{e\ge 0} \lambda(\mathfrak{p}^e)X^e = P_\mathfrak{p}(X)^{-1}, \quad P_\mathfrak{p}(X) = 1 - \lambda(\mathfrak{p})X + \chi_\omega(\mathfrak{p})^{-1}N(\mathfrak{p})X^2 \tag{19}$$

である．一方，命題 4.3.1 より $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{b}$ なる整イデアル $\mathfrak{b} \subset O_F$ に対して

$$C(\mathfrak{p}^e\mathfrak{b}\mathcal{D}^{-1}) = \lambda(\mathfrak{p}^e)\chi_\omega(\mathfrak{p}^e)^{-1}N(\mathfrak{p}^e) \cdot C(\mathfrak{b}\mathcal{D}^{-1}) \tag{20}$$

となる．従って (18) が $v \nmid \mathfrak{n}$ なる全ての $v \in P_f(F)$ に対して成り立つならば

$$\begin{aligned}
&L(\Phi, \alpha, s) \\
&= \sum_{\mathfrak{b}|\mathfrak{n}^\infty} C(\mathfrak{b}\mathcal{D}^{-1})\chi_\alpha(\mathfrak{b})N(\mathfrak{b})^{-s} \cdot \prod_{\mathfrak{p}\nmid\mathfrak{n}\mathfrak{f}_\alpha} P_\mathfrak{p}\left(\chi_\omega(\mathfrak{p})^{-1}\chi_\alpha(\mathfrak{p})N(\mathfrak{p})^{-(s+1)}\right)^{-1}
\end{aligned} \tag{21}$$

となる．ここで $\sum_{\mathfrak{b}\nmid\mathfrak{n}}$ は $\mathfrak{b} \nmid \mathfrak{n}$ なる整イデアル $\mathfrak{b} \subset O_F$ 上の和，$\prod_{\mathfrak{p}\nmid\mathfrak{n}\mathfrak{f}_\alpha}$ は $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{n}\mathfrak{f}_\alpha$ なる $\mathfrak{p} \in P_f(F)$ 上の積，更に $\sum_{\mathfrak{b}|\mathfrak{n}^\infty}$ は $\mathfrak{n}$ の素因子のみを素因子と

する整イデアル $\mathfrak{b} \subset O_F$ 上の和である．即ち Hilbert 保型形式 Φ に付随する L-関数 $L(\Phi, \alpha, s)$ は $\mathfrak{n}$ の素因子を除いて Euler 積をもつ．Φ と $\widetilde{\Phi}$ の間には

$$\widetilde{\Phi} * T(\mathfrak{p}^e) = \chi_\omega(\mathfrak{p}^e) \cdot (\Phi * T(\mathfrak{p}^e))^{\sim}$$

なる関係があることに注意しておく．

4.4 Φ を (ω, δ)-型の Hilbert 保型形式とする．$v|\mathfrak{n}$ なる $v = \mathfrak{p} \in P_f(F)$ をとり，$\varphi \in \mathcal{H}_v(\delta_v)$ に対して

$$(\Phi * \varphi)(x) = \int_{G_v} \Phi(xy^{-1})\varphi(y) d_{G_v}(y) \qquad (x \in G_v)$$

とおくと，$\Phi * \varphi$ は再び (ω, δ)-型の Hilbert 保型形式となる．特に $T(\mathfrak{p}^e) = T(\varpi_v^e) \in \mathcal{H}_v(\delta_v)$ $(e \geq 0)$ として，$\Phi' = \Phi * T(\mathfrak{p}^e)$ に対して

$$\Phi_1'(\begin{bmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) = C'(\operatorname{div} y) \cdot W_1(\begin{bmatrix} y_\infty & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix})\Lambda(x)$$

とおくと，Φ の Fourier 係数との間には次の関係が成り立つ；

命題 4.4.1 F の整イデアル $\mathfrak{b} \subset O_F$ に対して

$$C'(\mathfrak{b}\mathcal{D}^{-1}) = N(\mathfrak{p}^e) \cdot C(\mathfrak{p}^e \mathfrak{b}\mathcal{D}^{-1})$$

である．ここで $\mathcal{D} = \mathcal{D}(F/\mathbb{Q})$ は $F/\mathbb{Q}$ の共役差積である．

[**証明**] 命題 4.2.2 より

$$\begin{aligned}
\Phi_1'(\begin{bmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) &= \sum_{t \in O_v/(\varpi_v^e)} \Phi_1(\begin{bmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & \varpi_v^e \end{bmatrix}^{-1}) \cdot \omega_v(\varpi_v^e) \\
&= \sum_t \Phi_1(\begin{bmatrix} 1 & x - yt \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varpi_v^e y & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) \\
&= C(\mathfrak{p}^e \operatorname{div}(y)) \cdot W_1(\begin{bmatrix} y_\infty & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) \cdot \Lambda(x) \sum_{t \in O_v/(\varpi_v^e)} \Lambda_v(-y_v t)
\end{aligned}$$

で

$$\sum_{t \in O_v/(\varpi_v^e)} \Lambda_v(-y_v t) = \begin{cases} N(\mathfrak{p}^e) & : y_v \in \mathcal{D}_v^{-1} \text{ のとき} \\ 0 & : y_v \notin \mathcal{D}_v^{-1} \text{ のとき} \end{cases}$$

だから，$\operatorname{div}(y) = \mathfrak{b}\mathcal{D}^{-1}$ なる $y \in F_A^\times$ をとれば求める関係式を得る．■

4.5 F の整イデアル $\mathfrak{n} \subset O_F$ と $\mathfrak{f}_\omega | \mathfrak{n}$ なる F の量指標 ω をとる．$n = (n_v)_{v \in P_\infty(F)} \in \mathbb{Z}^g$ は $n \gg 0$ であると仮定して，3.6 節で定義した Hilbert 尖点形式の空間 $S_n(\mathfrak{n}, \omega)$ を考える．まず F の整イデアル $\mathfrak{m}$ が $\mathfrak{f}_\omega | \mathfrak{m}$ かつ $\mathfrak{m} | \mathfrak{n}$ を満たせば $S_n(\mathfrak{m}, \omega) \subset S_n(\mathfrak{n}, \omega)$ である．又，$\mathfrak{p} \in P_f(F)$ と $\Phi \in S_n(\mathfrak{n}, \omega)$ に対して

$$(D_\mathfrak{p} \Phi)(x) = \Phi(x \begin{bmatrix} \varpi_\mathfrak{p} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}) \qquad (x \in G_A)$$

とおくと，$D_\mathfrak{p} \Phi \in S_n(\mathfrak{n}\mathfrak{p}, \omega)$ である．そこで

$$\bigcup_{\mathfrak{f}_\omega | \mathfrak{m}, \mathfrak{m} | \mathfrak{n}} S_n(\mathfrak{m}, \omega)$$

及び

$$\left\{ D_\mathfrak{p} \Phi \,\middle|\, \Phi \in S_n(\mathfrak{n}\mathfrak{p}^{-1}, \omega) \text{ for } \mathfrak{p} \in P_f(F) \text{ s.t. } \mathfrak{p} | \mathfrak{n}\mathfrak{f}_\omega^{-1} \right\}$$

によって $\mathbb{C}$ 上張られる $S_n(\mathfrak{n}, \omega)$ の部分空間を $S_n^1(\mathfrak{n}, \omega)$ とおき，$S_n(\mathfrak{n}, \omega)$ における内積

$$(\Phi, \Psi) = \int_{F_{A,\infty}^\times G_F \backslash G_A} \Phi(x) \overline{\Psi}(x) d_{G_A}(\dot{x})$$

に関する直交補空間を $S_n^0(\mathfrak{n}, \omega)$ とおいて，$S_n^0(\mathfrak{n}, \omega)$ の元を (ω, δ)-型の Hilbert new form と呼ぶ．一変数保型形式の new form の理論（[1]）と同様の議論により，次の定理が証明される；

定理 4.5.1 new form Φ は Hecke 作用素の同時関数であるとする，即ち，$0 \neq \Phi \in S_n^0(\mathfrak{n}, \omega)$ は $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{n}$ なる任意の $\mathfrak{p} \in P_f(F)$ に対して $\Phi * T(\mathfrak{p}) = \lambda_\mathfrak{p} \Phi$ $(\lambda_\mathfrak{p} \in \mathbb{C})$ であるとする．このとき

1) Φ の Fourier 展開

$$\Phi(\begin{bmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) = \sum_{0 \ll t \in F^\times} C(\mathrm{div}(ty)) W_1(\begin{bmatrix} ty_\infty & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) \Lambda(tx)$$

において $C(\mathcal{D}(F/\mathbb{Q})^{-1}) \neq 0$ である，

2) $\Psi \in S_n(\mathfrak{n}, \omega)$ が $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{n}$ なる任意の $\mathfrak{p} \in P_f(F)$ に対して $\Psi * T(\mathfrak{p}) = \lambda_\mathfrak{p} \Psi$ を満たすならば $\Psi = c \cdot \Phi$ $(c \in \mathbb{C})$ となる．

よって (ω, δ)-型の Hilbert 尖点形式 $\Phi \in S_n(\mathfrak{n}, \omega)$ が new form であって，(18) が $v \nmid \mathfrak{n}$ なる全ての $v \in P_f(F)$ に対して成り立つならば，$v | \mathfrak{n}$ なる全ての $v = \mathfrak{p} \in P_f(F)$ に対して $\mathbb{C}$-代数の準同型写像 $\lambda_v : \mathcal{H}_v(\delta_v) \to \mathbb{C}$ があって

$$\Phi * \varphi = \lambda_v(\varphi) \cdot \Phi \qquad \forall \varphi \in \mathcal{H}_v(\delta_v)$$

となる．特に $\lambda(\mathfrak{p}^e) = \lambda_v(T(\mathfrak{p}^e)) \in \mathcal{H}_v(\delta_v)$ とおくと，(17) より

$$\sum_{e \geq 0} \lambda(\mathfrak{p}^e) X^e = P_\mathfrak{p}(X)^{-1}, \qquad P_\mathfrak{p}(X) = 1 - \lambda(\mathfrak{p}) X \tag{22}$$

となる．よって

$$L(\Phi,\alpha,s) = C(\mathcal{D}(F/\mathbb{Q})^{-1}) \times \prod_{\mathfrak{p}\nmid\mathfrak{n}\mathfrak{f}_\alpha} P_{\mathfrak{p}}(\chi_\omega(\mathfrak{p})^{-1}\chi_\alpha(\mathfrak{p})N(\mathfrak{p})^{-(s+1)})^{-1} \times \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{n}} P_{\mathfrak{p}}(\chi_\alpha(\mathfrak{p})N(\mathfrak{p})^{-(s+1)})^{-1}$$

となる．ここで

$$P_{\mathfrak{p}}(X) = \begin{cases} 1-\lambda(\mathfrak{p})X + \chi_\omega(\mathfrak{p})^{-1}N(\mathfrak{p})X^2 & : \mathfrak{p}\nmid\mathfrak{n}\mathfrak{f}_\alpha \\ 1-\lambda(\mathfrak{p})X & : \mathfrak{p}|\mathfrak{n} \end{cases}$$

である．

4.6　3.6 節で示した通り，Hilbert 尖点形式 Φ に付随する Dirichlet 級数 $L(\Phi,\alpha,s)$ は，$\mathrm{Re}\,s$ が十分大きいとき絶対収束し，s に関して全複素平面に正則に解析接続され，$s\mapsto -s$ に関する関数等式をもつ．更に Φ が Hecke 作用素 $T(\mathfrak{p}^e)$ の同時固有関数ならば $L(\Phi,\alpha,s)$ は Euler 積分解をもつ．逆にこのような性質をもつ Dirichlet 級数は Hilbert 尖点形式に付随したものに限ることを主張するのが，以下に述べる Hecke と Weil による逆定理である．F の 2 次元 Galois 表現に付随する Artin の L-関数や F 上定義された楕円曲線の Hasse の ζ-関数（の non-trivial part）を通して，保型形式の整数論的な重要性を裏付けているのがこの逆定理である．

F の整イデアル $\mathfrak{n}$ をとり，$G_{A,f}$ の開コンパクト部分群 $K_f = \prod_{v\in P_f(F)} K_v$ を

$$K_v = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in GL_2(O_v) \;\middle|\; c\in\mathfrak{n}O_v \right\} \qquad (v\in P_f(F))$$

により定める．$\mathfrak{f}_\omega|\mathfrak{n}$ なる F の量指標 ω をとり，K_f の 1 次元表現 δ_f を

$$\delta_f \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \prod_{v|\mathfrak{n}} \omega_v(d_v)^{-1}$$

により定義する．$n=(n_v)_{v\in P_\infty(F)}\in\mathbb{Z}^g$ をとり，K_∞ の 1 次元表現 δ_n を

$$\delta_n(k) = J(k,z_0)^n \qquad (k\in K_\infty, z_0=(\sqrt{-1},\cdots,\sqrt{-1})\in\mathfrak{H}^g)$$

により定める．F の整イデアルを変数とする複素数値関数 $\mathfrak{b}\mapsto c(\mathfrak{b})$ に対して Dirichlet 級数

$$L(c,\alpha,s) = \sum_{(\mathfrak{b},\mathfrak{f}_\alpha)=1} c(\mathfrak{b})\chi_\alpha(\mathfrak{b})N(\mathfrak{b})^{-s}$$

が定義される．ここで α は F の量指標である．又，$\mathfrak{p}\nmid\mathfrak{n}$ なる F の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して

$$(T(\mathfrak{p}^e)c)(\mathfrak{b}) = \sum_{0\le k\le \mathrm{Min}\{\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b}),e\}} c(\mathfrak{p}^{e-2k}\mathfrak{b})\chi_\omega(\mathfrak{p}^{k-e})N(\mathfrak{p}^{e-k}) \quad (0\le e\in\mathbb{Z})$$

とおく．このとき逆定理は次のように述べられる [11, pp. 132–140]；

定理 4.6.1 F の整イデアルを変数とする複素数値関数

$$\mathfrak{b} \mapsto c(\mathfrak{b}), \qquad \mathfrak{b} \mapsto c'(\mathfrak{b})$$

が与えられたとき，

1) $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{n}$ なる F の任意の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して

$$T(\mathfrak{p}^e)c = \lambda(\mathfrak{p}^e)c, \quad T(\mathfrak{p}^e)c' = \lambda(\mathfrak{p}^e)\chi_\omega(\mathfrak{p}^e)c' \quad (0 \leq \forall e \in \mathbb{Z})$$

なる $\lambda(\mathfrak{p}^e) \in \mathbb{C}$ があり，かつ $c(1) = c'(1) = 1$,

2) $(\mathfrak{f}_\alpha, \mathfrak{n}) = 1$ なる F の任意の量指標 α に対して Dirichlet 級数 $L(c, \alpha, s)$, $L(c', \overline{\alpha}, s)$ は $\mathrm{Re}\, s$ が十分大きいとき絶対収束し，

$$\Lambda(c, \alpha, s) = \Gamma(\omega_\infty, \delta_n; \alpha_\infty; s) \cdot L(c, \alpha, s),$$
$$\Lambda(c', \overline{\alpha}, s) = \Gamma(\overline{\omega}_\infty, \delta_n; \overline{\alpha}_\infty; s) \cdot L(c', \overline{\alpha}, s)$$

は s に関して全複素平面に正則に解析接続され関数等式

$$\Lambda(c, \alpha, -s) = \varepsilon(\omega, \alpha; s) \cdot \Lambda(c', \overline{\alpha}, s)$$

が成り立つ（ここで $\Gamma(\omega_\infty, \delta_n; \alpha_\infty; s)$ と $\varepsilon(\omega, \alpha; s)$ は定理 3.6.1 の通りとする），

3) $\Lambda(c, \alpha, s)$ は任意の帯状領域 $A \leq \mathrm{Re}\, s \leq B$ で有界，

ならば

$$\Phi(\begin{bmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) = \sum_{t \gg 0}^{(y)} c(t\mathrm{div}(y)\mathcal{D}(F/\mathbb{Q}))W_1(\begin{bmatrix} y_\infty & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix})\Lambda(x)$$

なる (ω, δ)-型の Hilbert 尖点形式 Φ が存在する．更にこのとき

$$\widetilde{\Phi}(\begin{bmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) = \sum_{t \gg 0}^{(y)} c'(t\mathrm{div}(y)\mathcal{D}(F/\mathbb{Q}))W_1(\begin{bmatrix} y_\infty & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix})\Lambda(x)$$

である．

5 表現論的背景

以下では，一般の局所コンパクト群上の球関数の理論を概説して，Hilbert 保型形式における Hecke 作用素の表現論的な背景をみることにする．証明は述べないが，[2] に詳しい解説があるので参照してほしい．

以下，G を局所コンパクトユニモジュラー群，$K \subset G$ をコンパクト部分群として，K の既約ユニタリ表現 (δ, V_δ) を一つ固定しておく．K はコンパクトだから δ は有限次元である（[7]）．G, K 上の Haar 測度を夫々 $d_G(x), d_K(k)$ として $\int_K d_K(k) = 1$ と正規化しておく．

5.1 G 上の複素数値関数 ψ が正定値であるとは，任意の有限集合 $\{x_1, \cdots, x_n\} \subset G$ に対して，正方行列 $(\psi(x_i^{-1}x_j))_{i,j=1,\cdots,n}$ が半正定値 Hermite 行列なることをいう．このとき

1) $\overline{\psi(x)} = \psi(x^{-1})$,
2) $|\psi(x)| \leq \psi(1)\ \forall x \in G$,
3) $|\psi(x) - \psi(y)|^2 \leq 2 \cdot \psi(1) \cdot \mathrm{Re}(\psi(1) - \psi(xy^{-1}))\ \forall x, y \in G$

が成り立つ．G のユニタリ表現 (π, H_π) に対して，$u \in H_\pi$ をとって $\psi_{\pi,u}(x) = (\pi(x)u, u)$ $(x \in G)$ とおくと，$\psi_{\pi,u}$ は G 上の正定値連続関数となる．

G のユニタリ表現 (π, H_π) に対して，$\{\pi(x)u \mid x \in G\}$ が H_π の稠密な部分空間を張るような $u \in H_\pi$ が存在するとき，π を巡回表現と呼び，u を巡回ベクトルと呼ぶ．次の二つの命題が基本的である；

命題 5.1.1 G の巡回表現 π_i $(i = 1, 2)$ の巡回ベクトルを u_i として，$\psi_{\pi_1,u_1} = \psi_{\pi_2,u_2}$ ならば π_1 と π_2 はユニタリ同値である．

命題 5.1.2 G 上の正定値連続関数 ψ に対して，$\psi = \psi_{\pi,u}$ となるような G の巡回表現 π と巡回ベクトル u が存在する．

5.2 $L^1(G)$ は G 上の畳込み積

$$(\varphi * \psi)(x) = \int_G \varphi(xy^{-1})\psi(y)d_G(y)$$

により複素 Banach 環となる．更に $\varphi^*(x) = \overline{\varphi(x^{-1})}$ とおけば $\varphi \mapsto \varphi^*$ は $L^1(G)$ 上の対合となり，$L^1(G)$ は Banach $*$-環となる．(π, H_π) を G のユニタリ表現とする．$\varphi \in L^1(G)$ に対して

$$(\pi(\varphi)u, v) = \int_G \varphi(x)(\pi(x)u, v)d_G(x) \qquad (\forall u, v \in H_\pi)$$

なる H_π 上の有界作用素 $\pi(\varphi) \in \mathcal{L}(H_\pi)$ が一意的に定まる．このとき $\varphi \mapsto \pi(\varphi)$ は Hilbert 空間 H_π 上の Banach $*$-環 $L^1(G)$ の $*$-表現となり，

$$\{\pi(\varphi)u \mid \varphi \in L^1(G), u \in H_\pi\}$$

は H_π の稠密な部分空間を張る（即ち，$L^1(G)$ の非退化な表現である）．逆に Hibert 空間 H 上の $L^1(G)$ の非退化な $*$-表現 ρ に対して，G の H 上のユニタリ表現 π が定まって $\rho(\varphi) = \pi(\varphi)$ $(\forall \varphi \in L^1(G))$ となる．

G のユニタリ表現 (π, H_π) が既約なることと，それが $L^1(G)$ の $*$-表現として既約なることは同値である．又，G のユニタリ表現 (π_i, H_i) $(i = 1, 2)$ と有界作用素 $T : H_1 \to H_2$ に対して

$$T \circ \pi_1(x) = \pi_2(x) \circ T\ \ \forall x \in G \ \Leftrightarrow\ T \circ \pi_1(\varphi) = \pi_2(\varphi) \circ T\ \ \forall \varphi \in L^1(G)$$

である．この様な T 全体のなす複素ベクトル空間を (π_1, π_2) と書く．特に π_1 と π_2 が G のユニタリ表現としてユニタリ同値なることと $L^1(G)$ の $*$-表現としてユニタリ同値なることは同値である．

G の既約ユニタリ表現のユニタリ同値類の全体を $\widehat{G}$ と書く．

5.3 $e_\delta(k) = \dim\delta \cdot \mathrm{tr}\,\delta(k^{-1})$ $(k \in K)$ とおく．コンパクト群の指標の直交関係から K 上の畳込み積に関して $e_\delta * e_\delta = e_\delta$ である．G のユニタリ表現 (π, H_π) に対して

$$H_\pi(\delta) = \overline{\sum_{T \in (\delta, \pi|_K)} \mathrm{Im}\,T}$$

を (π, H_π) の δ-等型成分と呼ぶが，$\pi(e_\delta)$ は H_π から $H_\pi(\delta)$ への直交射影を与える．

G の既約ユニタリ表現 (π, H_π) の K への制限 $\pi|_K$ は K のユニタリ表現となるが，$\pi|_K$ における δ の重複度を $m(\delta, \pi|_K) = \dim_{\mathbb{C}}(\delta, \pi|_K)$ として，$0 < m(\delta, \pi|_K) < \infty$ なるとき，π をクラス-δ の既約ユニタリ表現と呼び，重複度

$$r = m(\delta, \pi|_K) = \dim_{\mathbb{C}} H_\pi(\delta) / \dim\delta$$

を π の高さと呼ぶ[8]．クラス-δ の既約ユニタリ表現の全体を $\widehat{G}(\delta)$ と書くことにする．

クラス-δ の既約ユニタリ表現 $\pi \in \widehat{G}(\delta)$ に対して

$$\Phi_{\pi,\delta}(x) = \pi(e_\delta) \circ \pi(x)|_{H_\pi(\delta)} \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(H_\pi(\delta)) \qquad (x \in G)$$

とおいて，G 上の関数 $\Phi_{\pi,\delta}$ を π に付随する K-タイプ δ の球関数 (spherical function) と呼ぶ．又，

$$\psi_{\pi,\delta}(x) = (\dim\delta)^{-1} \mathrm{tr}\,\Phi_{\pi,\delta}(x) \qquad (x \in G)$$

とおいて，これを π に付随する K-タイプ δ の球跡関数 (spherical trace function) と呼ぶ．

5.4

$$L^1(G, \delta) = \{\varphi \in L^1(G) \mid e_\delta * \varphi = \varphi * e_\delta = \varphi\}$$

は $L^1(G)$ の Banach $*$-部分環をなす．但し

$$(e_\delta * \varphi)(x) = \int_K e_\delta(k)\varphi(k^{-1}x) d_K(k), \quad (\varphi * e_\delta)(x) = \int_K \varphi(xk^{-1}) e_\delta(k) d_K(k)$$

[8] 一般に G が連結半単純実 Lie 群で K が G の極大コンパクト部分群ならば，任意の $\pi \in \widehat{G}$ と $\delta \in \widehat{K}$ に対して $m(\delta, \pi|_K) \leq \dim\delta$ である（Harish-Chandra の定理）．

である．又

$$\begin{aligned} L^1(G,\delta)^o &= \{\varphi \in L^1(G,\delta) \mid \varphi(kxk^{-1}) = \varphi(x)\ \forall k \in K\} \\ &= \left\{ \varphi \in L^1(G) \;\middle|\; \begin{array}{l} 1)\ \varphi(kxk^{-1}) = \varphi(x)\ \forall k \in K, x \in G \\ 2)\ e_\delta * \varphi = \varphi \end{array} \right\} \end{aligned}$$

は $L^1(G,\delta)$ の Banach $*$-部分環である．G 上の台がコンパクトなる複素数値連続関数全体を $C_c(G)$ と書くと，$C_c(G)$ は $L^1(G)$ の稠密な $\mathbb{C}$-部分代数である．そこで

$$C_c(G,\delta) = C_c(G) \cap L^1(G,\delta), \qquad C_c(G,\delta)^o = C_c(G) \cap L^1(G,\delta)^o$$

とおく．$C_c(G,\delta)^o$ を K-タイプ δ の Hecke 作用素の環と呼ぶ[9]．$L^1(G,\delta)$ の中心は $L^1(G,\delta)^o$ に含まれる．$C_c(G,\delta)$, $C_c(G,\delta)^o$ は夫々$L^1(G,\delta)$, $L^1(G,\delta)^o$ の稠密な部分空間である．

(π, H_π) を G のユニタリ表現とすると，$\varphi \in L^1(G,\delta)$ に対して $\pi_\delta(\varphi) = \pi(\varphi)|_{H_\pi(\delta)}$ は Hilbert 空間 $H_\pi(\delta)$ の有界作用素となり，$\varphi \mapsto \pi_\delta(\varphi)$ は Banach $*$-環 $L^1(G,\delta)$ の $H_\pi(\delta)$ 上の $*$-表現となる．更に $\varphi \in L^1(G,\delta)^o$ ならば

$$\pi_\delta(\varphi) \circ \pi(k) = \pi(k) \circ \pi_\delta(\varphi)\ \ \forall k \in K$$

である．

$\pi \in \widehat{G}(\delta)$ とすると，$\psi_{\pi,\delta}$ は G 上の有界連続関数だから，$\varphi \in L^1(G,\delta)^o$ に対して

$$\widehat{\psi}_{\pi,\delta}(\varphi) = \int_G \varphi(x)\psi_{\pi,\delta}(x) d_G(x) \in \mathbb{C}$$

とおくと，次の定理が示すように，$\psi_{\pi,\delta}$ 或いは $\widehat{\psi}_{\pi,\delta}$ は G の既約ユニタリ表現 π を特徴づける；

定理 5.4.1 $\pi_i \in \widehat{G}(\delta)$ $(i = 1,2)$ に対して，次は同値である；

1) π_1 と π_2 はユニタリ同値,
2) $\psi_{\pi_1,\delta} = \psi_{\pi_2,\delta}$,
3) $C_c(G,\delta)^o$ 上で $\widehat{\psi}_{\pi_1,\delta} = \widehat{\psi}_{\pi_2,\delta}$.

$(\pi, H_\pi) \in \widehat{G}(\delta)$ の高さを r とすると，$H_\pi(\delta)$ は K の表現としては (δ, V_δ) の r 個の直積と同型である．そこで同一視 $H_\pi(\delta) = \bigoplus^r V_\delta$ を一つ固定すると

$$\mathrm{End}_K(H_\pi(\delta)) = \{T \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(H_\pi(\delta)) \mid T \circ \pi(k) = \pi(k) \circ T\ \ \forall k \in K\}$$

は行列環 $M_r(\mathbb{C})$ と同一視される．以下，この同一視を固定しておく．$\varphi \in L^1(G,\delta)^o$ に対して

$$\widehat{\Phi}_{\pi,\delta}(\varphi) = \int_G \varphi(x)\Phi_{\pi,\delta}(x) d_G(x) = \pi_\delta(\varphi) \in \mathrm{End}_K(H_\pi(\delta))$$

[9] $v \in P_f(F)$ に対して $G = GL_2(F_v)$, $K = GL_2(O_v)$ として，$\delta = \mathbf{1}_K$ が K の自明な 1 次元表現の場合，$C_c(G,\delta)^o$ は 4.1 で定義した $\mathcal{H}_v$ に一致し，これが Hilbert 保型形式に対する Hecke 作用素を与えるから．

とおくと，$\widehat{\Phi}_{\pi,\delta}(\varphi) \in M_r(\mathbb{C})$ とみて

$$\mathrm{tr}\,\widehat{\Phi}_{\pi,\delta}(\varphi) = \widehat{\psi}_{\pi,\delta}(\varphi) \qquad (\varphi \in L^1(G,\delta)^o)$$

である．更に $C_c(G,\delta)^o$ に制限して

$$\widehat{\Phi}_{\pi,\delta} : C_c(G,\delta)^o \to M_r(\mathbb{C})$$

は全射 $\mathbb{C}$-代数準同型写像である．定義から球跡関数 $\psi_{\pi,\delta}$ は G 上の正定値連続関数であるが，逆に次の定理が成り立つ；

定理 5.4.2 G 上の正定値連続関数 ψ に対して

1) $\psi * \overline{e}_\delta = \psi$ かつ任意の $k \in K$ に対して $\psi(kxk^{-1}) = \psi(x)$ $(x \in G)$,
2) 全射 $\mathbb{C}$-代数準同型写像 $\omega : L^1(G,\delta)^o \to M_r(\mathbb{C})$ があって，任意の $\varphi \in L^1(G,\delta)^o$ に対して $\omega(\varphi^*) = \omega(\varphi)^*$ かつ

$$\int_G \varphi(x)\psi(x)d_G(x) = \mathrm{tr}\,\omega(\varphi)$$

が成り立つ

ならば，$\psi = \psi_{\pi,\delta}$ かつ高さが r なる $\pi \in \widehat{G}(\delta)$ が存在する．

[**証明**] 専門家には良く知られた結果であるが，参考となる文献は見つけ難い．高橋礼司氏による未発表のノートがある．■

5.5 後に詳しく述べるように，$\pi \in \widehat{G}(\delta)$ の高さが 1 の場合が特に重要である．この場合 $\widehat{\psi}_{\pi,\delta} = \widehat{\Phi}_{\pi,\delta}$ であるから

$$\widehat{\psi}_{\pi,\delta} : L^1(G,\delta)^o \to \mathbb{C}$$

が $\mathbb{C}$-代数の準同型写像となり，$C_c(G,\delta)^o$ に制限しても全射である．又 $\psi_{\pi,\delta}$ は次の積分公式を満たす；

命題 5.5.1 $\pi \in \widehat{G}(\delta)$ の高さが 1 ならば

$$\int_G \psi_{\pi,\delta}(kxk^{-1}y)d_K(k) = \psi_{\pi,\delta}(x) \cdot \psi_{\pi,\delta}(y) \qquad (x, y \in G)$$

である．

更に $C_c(G,\delta)^o$ の可換性とも密接に関連している；

命題 5.5.2 1) $C_c(G,\delta)^o$ が可換ならば，任意の $\pi \in \widehat{G}(\delta)$ の高さは 1 である，

2) 任意の $\pi \in \widehat{G}$ に対して $m(\delta, \pi|_K) \leq 1$ ならば $L^1(G,\delta)$ の中心は $L^1(G,\delta)^o$ に一致する．特に $C_c(G,\delta)^o$ は可換である．

特に δ が K の 1 次元表現の場合には

命題 5.5.3 $\dim\delta = 1$ のとき，次は同値である；

1) 任意の $\pi \in \widehat{G}$ に対して $m(\delta, \pi|_K) \leq 1$,
2) $L^1(G,\delta)$ の中心は $L^1(G,\delta)^o$ に一致する，
3) $L^1(G,\delta)^o$ は可換，
4) $C_c(G,\delta)^o$ は可換.

5.6 ここでは特に $\delta = \mathbf{1}_K$ が K の自明な 1 次元表現の場合を考える[10].

$$C_c(G,K) = C_c(G, \mathbf{1}_K)^o = \{\varphi \in C_c(G) \mid \varphi(kxk') = \varphi(x)\ \forall k, k' \in K\}$$

とおき，G 上の複素数値連続関数 ω と $\varphi \in C_c(G,K)$ に対して

$$\check{\omega}(\varphi) = \int_G \varphi(x)\omega(x^{-1})d_G(x)$$

とおく.

定義 5.6.1 0 でない連続関数 $\omega : G \to \mathbb{C}$ が

$$\check{\omega}(\varphi * \psi) = \check{\omega}(\varphi) \cdot \check{\omega}(\psi)\ \ \forall\varphi, \psi \in C_c(G,K)$$

を満たすとき，ω を G 上の K に関する帯球関数と呼ぶ.

G 上の K に関する帯球関数の全体を $\Omega(G,K)$ と書くことにする.

命題 5.6.2 $\omega \in \Omega(G,K)$ に対して

1) 任意の $\varphi \in C_c(G,)$ に対して $\varphi * \omega = \omega * \varphi = \check{\omega}(\varphi) \cdot \omega$,
2) 任意の $x, y \in G$ に対して $\displaystyle\int_K \omega(xky)d_K(k) = \omega(x)\cdot\omega(y)$. 特に $\omega(1) = 1$.

逆にこれらの性質が帯球関数を特徴づける．即ち，

命題 5.6.3 連続関数 $\omega : G \to \mathbb{C}$ が二条件

1) 任意の $k, k' \in K$ に対して $\omega(kxk') = \omega(x)$，かつ $\omega(1) = 1$,
2) 任意の $\varphi \in C_c(G,K)$ に対して $\varphi * \omega = \lambda_\varphi \cdot \omega$ $(\lambda_\varphi \in \mathbb{C})$

を満たすならば $\omega \in \Omega(G,K)$ である.

[10] この部分に関しては特に [10] を参照のこと.

命題 5.6.4 0 でない連続関数 $\omega : G \to \mathbb{C}$ が積分公式

$$\int_K \omega(xky)d_K(k) = \omega(x)\cdot\omega(y) \quad \forall x, y \in G$$

を満たすならば $\omega \in \Omega(G, K)$ である．

$C_c(G)$ に位相を定義して局所凸空間にする．まずコンパクト部分集合 $M \subset G$ に対して

$$C_M(G) = \{\varphi \in C_c(G) \mid \operatorname{supp}\varphi \subset M\}$$

はノルム $|\varphi|_M = \sup_{x\in M}|\varphi(x)|$ に関して複素 Banach 空間となる．そこで

$$C_c(G) = \bigcup_{M\subset G;\mathrm{compact}} C_M(G) = \operatorname*{inj\,lim}_{M\subset G:\mathrm{compact}} C_M(G)$$

に自然に位相を導入して局所凸空間とするのである．$C_c(G,K)$ には相対位相を与える．

命題 5.6.5 $\omega \in \Omega(G, K)$ に対して $\check{\omega} : C_c(G, K) \to \mathbb{C}$ は連続である．

逆に

命題 5.6.6 $\mathbb{C}$-代数準同型写像 $\lambda; C_c(G,K) \to \mathbb{C}$ が全射かつ連続ならば，$\lambda = \check{\omega}$ なる $\omega \in \Omega(G, K)$ が唯一存在する．

更に

命題 5.6.7 K が G のコンパクト開部分群ならば，任意の $\mathbb{C}$-線形写像 $\lambda : C_c(G, K) \to \mathbb{C}$ は連続である．

最後に帯球関数と G のユニタリ表現の関係を述べておく．$\pi \in \widehat{G}(\mathbf{1}_K)$ の高さ 1 のとき，π の表現空間 H_π における K-不変ベクトルは 1 次元である．そこで長さ 1 の K-不変ベクトル $u \in H_\pi$ に対して $\omega_\pi(x) = (\pi(x)u, u)$ $(x \in G)$ とおくと（5.1 節の記号を用いれば $\omega_\pi = \psi_{\pi,u}$ である），命題 5.5.1 と命題 5.6.4 より $\omega_\pi \in \Omega(G, K)$ であり，かつ ω_π は G 上の正定値関数である．

逆に $\omega \in \Omega(G, K)$ が正定値ならば，命題 5.1.2 により G の巡回表現 (π, H_π) と長さ 1 の巡回ベクトル $v \in H_\pi$ があって $\omega(x) = (\pi(x)v, v)$ となる．このとき $\pi \in \widehat{G}(\mathbf{1}_K)$ かつ高さは 1 で $v \in H_\pi$ は K-不変ベクトルとなる．

5.7 δ は K の既約ユニタリ表現として，以下，$\pi \in \widehat{G}(\delta)$ は高さ 1 であると仮定する．まず次の定理が成り立つ；

定理 5.7.1 $\pi \in \widehat{G}(\delta)$ は高さ 1 とする．このとき G の任意のユニタリ表現 (σ, E) に対して，その π-等型成分 $E(\pi)$ の中の δ-等型成分を $E(\pi;\delta)$ とすると

$$E(\pi;\delta) = \{u \in E \mid \sigma(\varphi)u = \widehat{\psi}_{\pi,\delta}(\varphi)u\ \forall\varphi \in C_c(G,\delta)^o\}$$

となる．

G の中心 $Z(G)$ の閉部分群 $A \subset Z(G)$ をとり，G の閉部分群 $\Gamma \subset G$ は A を開部分群として含むとする．従って Γ/A は G/A の離散部分群であり，Γ はユニモジュラーである．ρ を γ の 1 次元表現とする．このときデータ $\{A, \Gamma, \rho, \pi, \delta\}$ に付随する G 上の保型形式の空間を次のように定義する；

定義 5.7.2 連続関数 $f : G \to V_\delta$ であって条件

1) 任意の $\gamma \in \Gamma$ に対して $f(\gamma x) = \rho(\gamma)^{-1} f(x)$,
2) $\displaystyle\int_{\Gamma\backslash G} |f(x)|^2 d_{\Gamma\backslash G}(\dot{x}) < \infty$,
3) 任意の $k \in K$ に対して $f(xk) = \delta(k^{-1})f(x)$,
4) 任意の $\varphi \in C_c(G,\delta)^o$ に対して $\displaystyle\int_G f(xy^{-1})\varphi(y)d_G(y) = \widehat{\psi}_{\pi,\delta}(\varphi)\cdot f(x)$

をみたすもの全体を $\check{\mathcal{A}}_\delta(\Gamma\backslash G, \rho, \pi)$ と書く．

複素ベクトル空間 $\check{\mathcal{A}}_\delta(\Gamma\backslash G, \rho, \pi)$ は内積

$$(f, g) = \int_{\Gamma\backslash G} (f(x), g(x))_\delta d_{\Gamma\backslash G}(\dot{x})$$

に関して複素 Hilbert 空間となる．V_δ の双対空間を V_δ^* として，自然な pairing を $\langle v, \alpha\rangle = \alpha(v)$ とする．$f \otimes \alpha \in \check{\mathcal{A}}_\delta(\Gamma\backslash G, \rho, \pi) \otimes_{\mathbb{C}} V_\delta^*$ に対して

$$F_{f\otimes\alpha}(x) = (\dim\delta)^{-1/2}\langle f(x), \alpha\rangle \qquad (x \in G)$$

と定義する．誘導表現 $\mathrm{Ind}_\Gamma^G \rho^{-1}$ に定理 5.7.1 を適用すると，写像 $f\otimes\alpha \mapsto F_{f\otimes\alpha}$ は複素 Hilbert 空間の同型写像

$$\check{\mathcal{A}}_\delta(\Gamma\backslash G, \rho, \pi) \otimes_{\mathbb{C}} V_\delta^* \xrightarrow{\sim} (\mathrm{Ind}_\Gamma^G \rho^{-1})(\check{\pi};\check{\delta})$$

を与えることが判る．ここで $\check{\pi}, \check{\delta}$ は夫々π, δ の反傾表現である．

5.8 4 章の状況を，$\mathfrak{n} = 1$ 及び $\omega = 1$ の仮定の下に，表現論との関係で考えてみる．

G_A は局所コンパクト群で，$K = K_\infty \times K_f$ はそのコンパクト部分群である．$\Gamma = F_A^\times G_F$ は G_A の閉部分群で，G_A の中心 $F_A^\times$ を開部分群として含む．$\rho = \mathbf{1}_\Gamma$ は自明な 1 次元表現としよう．$\delta = \delta_n \otimes \delta_f$ は K の 1 次元表現であり，$\delta_f = \mathbf{1}_{K_f}$ は自明な 1 次元表現である．$n = (n_v)_{v\in P_\infty(F)}$ は $1 \le n_v \in \mathbb{Z}$ と仮定する．

$v \in P_\infty(F)$ とする．$G_v^1 = SL_2(\mathbb{R})$ の既約ユニタリ表現 π_v^+ で $\pi_v^+|_{K_v} = \bigoplus_{0 \le k \in \mathbb{Z}} \delta_{n_v+2k}$ となるものが唯一存在する（$n_v > 1$ ならば $SL_2(\mathbb{R})$ の正則離散系列表現，$n_v = 1$ ならば limit of discrete series [9]）．$G_v^+ = \mathbb{R}_{>0}^\times \times G_v^1$ だから（$\mathbb{R}_{>0}^\times$ は正の実数のなす乗法群），$\mathbb{R}_{>0}^\times$ 上では自明であるとして π_v^+ を G_v^+ の既約ユニタリ表現に延長する．このとき G_v の既約ユニタリ表現 π_v であって $\pi_v|_{G_v^+} = \pi_v^+ \oplus \check{\pi}_v^+$ なる分解をもつ G_v の既約ユニタリ表現 π_v が唯一存在する（$\check{\pi}_v^+$ は π_v^+ の反傾表現）．π_v^+, π_v の表現空間を夫々 H_v^+, H_v とすると $\delta_v = \delta_{n_v}$-等型成分 $H_v(\delta_v) = H_v^+(\delta_v)$ は 1 次元だから，長さ 1 のベクトル $u_v \in H_v(\delta_v)$ を一つ固定しておく．

$v \in P_f(F)$ に対しては $\pi_v \in \widehat{G}_v(\mathbf{1}_{K_v})$ を一つとる．$C_c(G_v, \delta_v)^o = C_c(G_v, K_v) = \mathcal{H}_v$ は可換だから，$m(\mathbf{1}_{K_v}, \pi_v|_{K_v}) = 1$ である（命題5.5.3）．π_v の表現空間 H_v における K_v-不変ベクトルは 1 次元だから，長さ 1 のベクトル $u_v \in H_v(\mathbf{1}_{K_v})$ を一つ固定しておく．

$\{\pi_v\}_{v \in P(F)}$ の $\{u_v\}_{v \in P_f(F)}$ に関する制限テンソル積[11]π は G_A の既約ユニタリ表現であり $m(\delta, \pi|_K) = 1$ となり，$H = \bigotimes'_{v \in P(F)} H_v$ とおくと，$H(\delta) = \mathbb{C} \bigotimes_{v \in P(F)} u_v$ である．さらに

$$\psi_{\pi,\delta}(x) = \prod_{v \in P(F)} \psi_{\pi_v, \delta_v}(x_v) \qquad (x \in G_A)$$

となる．一方，全ての $v \in P_f(F)$ に対して $C_c(G_v, K_v)$ は 1 をもつ（K_v の G_v における特性関数）から，それを $1_v \in C_c(G_v, \delta_v)^o$ とおくと，$\{C_c(G_v, \delta_v)^o\}_{v \in P(F)}$ の $\{1_v\}_{v \in P_f(F)}$ に関する代数的制限テンソル積は $C_c(G_A, \delta)^o$ の稠密な部分空間となるから，局所コンパクト群上の保型形式の定義 5.7.2 における条件 4) は各 $v \in P(F)$ に対する $C_c(G_v, \delta_v)^o$ の作用に帰着される．特に有限素点 $v \in P_f(F)$ における作用が 4.1 で述べた Hecke 作用素の作用を与える．無限素点 $v \in P_\infty(F)$ における条件は，G_v 上で見れば $\check{\pi}_v$-等型成分の $\check{\delta}_v$-等型成分に属することを述べている．ところで，π_v^+ の構成法から $u \in H_v^+(\delta_m)$ は $(X_+ - X_1)u = -\sqrt{-1}m \cdot u$ と同値である．一方，$[X_+ - X_-, W_+] = 2\sqrt{-1}W_+$ だから，$u \in H_v^+(\delta_m)$ $(m \in \mathbb{Z})$ ならば $W_+ u \in H_v^+(\delta_{m-2})$ となる．よって $u \in H_v(\delta_v) = H_v^+(\delta_v)$ ならば $W_+ u = 0$ である（$\pi_v^+|_{K_v} = \bigoplus_{0 \le k \in \mathbb{Z}} \delta_{n_v+2k}$ だから）．反傾表現にうつれば u が $\check{\pi}_v$ の $\check{\delta}_v$-等型成分に含まれれば $W_- u = 0$ となる．よって定義 5.7.2 の条件 4) の無元素点における条件は，各 $v \in P_\infty(F)$ に対して G_v 上で $W_- f = 0$ を満たすこととなり，$\check{\mathcal{A}}_\delta(\Gamma \backslash G, \rho, \pi)$ は Hilbert 保型形式からなることがわかる．逆に Hilbert 保型形式 Φ の Fourier 展開の

---

[11] $\{H_v\}_{v \in P(F)}$ の代数的テンソル積 $\bigotimes_{v \in P(F)} H_v$ の中で，殆ど全ての $v \in P_f$ に対して $w_v = u_v$ となる $\otimes_{v \in P(F)} w_v$ の張る部分空間（これを $\{H_v\}_{v \in P(F)}$ の $\{u_v\}_{v \in P_f(F)}$ に関する代数的制限テンソル積と呼ぼう）は G_A の自然な作用に対して安定であり，ノルム $|\otimes_{v \in P(F)} w_v| = \prod_{v \in P(F)} |w_v|$ に関して前 Hilbert 空間をなすから，その完備化 $\bigotimes'_{v \in P(F)} H_v$ 上に G_A のユニタリ表現が実現できる．これを $\{\pi_v\}_{v \in P(F)}$ の $\{u_v\}_{v \in P_f(F)}$ に関する制限テンソル積と呼ぶ．各 π_v が既約ならば制限テンソル積も既約である．逆に G_A の既約ユニタリ表現は適当な既約ユニタリ表現 $\{\pi_v\}_{v \in P(F)}$ の制限テンソル積となる [3].

形と ψ_{π_v,δ_v} の具体的な形から，定義 5.7.2 の条件 4) の無元素点における条件が満たされることが判る．アデール群 G_A 上の表現論的立場から見れば，保型形式が Hecke 作用素の同時固有関数であることは必然的な要請である．

参考文献

[1] 土井公二，三宅敏恒：保型形式と整数論（紀伊国屋書店, 1976）

[2] S.T.Gaal : Linear Analysis and Representation Theory (Die Grund. math. Wiss. Einzel. 198, Springer-Verlag, 1973)

[3] R.Godement : Notes on Jacquet-Langlands theory (The Institute of Avdanced Study, 1970)

[4] 彌永昌吉編：数論 (岩波書店, 1969)

[5] M.Kneser:*Strong approximation* (in Algebraic Groups and Discontinuous Subgroup, PSPM 9, A.M.S 1966)

[6] D.Mumford : Abelian Varieties (Oxford Univ. Press, 1970)

[7] A.Robert : Introduction to the Representation Theory of Compact and Locally Compact Groups (London Math. Soc. Lecture Note Ser. 80, Cambridge Univ. Press, 1983)

[8] I.Satake : Algebraic Structures of Symmetric Domains (Iwanami-Shoten and Princeton Univ. Press, 1980)

[9] 杉浦光夫 : ユニタリ表現入門（上，下）(上智大学数学講究録 No. 8 (1980), No. 13 (1982))

[10] T.Tamagawa : *On Selberg's trace formula* (J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, (1960) 363–386)

[11] A.Weil : Dirichlet Series and Automorphic Forms (Lecture Notes in Math. 189, Springer-Verlag, 1971)