KATZ'S p-ADIC MODULAR FORMS

山上 敦士 （京大理）

0. Introduction

p を素数とする. p-adic modular form の理論は, なにか適当な代数体 F に対する Dedekind の ζ-関数 ζ_F の特殊値の p-冪を法としての合同に関する性質や, Eisenstein 級数の Fourier 展開の定数項にその特殊値が現れることから, modular form の Fourier 係数そのものの p-冪を法とした合同に関する性質を研究することがその motivation となっている.

そこで modular form の p-adic theory を構築する方法として示されたものとして, modular form の Fourier 展開を p-進数係数の冪級数とみなしその p-進極限として p-adic modular form を定義するといった Serre [24] による代数的な手法と, p-進環上で定義された楕円曲線の arithmetic moduli scheme に "growth condition" を付したうえで relative differential sheaf の global section をとることで p-adic modular form を定義する Katz [12] による幾何的な手法の二つが主なものとして示されている.

本稿では, そのうち Katz により定式化された p-adic modular form の理論について, 有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の場合は Section 1 にて主に Katz [12] と Gouvêa [7] を, 総実代数体上の場合には Section 2 において主に Goren [6] をそれぞれ参考にしながら紹介させていただく. ちなみに, 原論文としては Katz の一連の論文 [12], [13], [14], [15], [16], [17] そして [18] が挙げられる. 一方で, Serre の p-adic modular form に関しては, 本報告集の長岡昇勇氏の論説 "Serre の p 進 modular 形式について" を参照していただきたい.

さらに Section 3 では, サマースクールでの講演で触れることができなかった Katz の "generalized p-adic modular function" の定義と, Gouvêa により構成された generalized p-adic modular function に付随する Galois 表現について [7] を参考にしながら紹介したい.

Acknowledgement. 2005 年度整数論サマースクール「Hilbert 保型形式入門」におきまして, 講演の機会を与えていただいた世話人の浜畑芳紀氏と青木宏樹氏に厚く御礼申し上げます. また, 講演を準備するにあたり有益なコメントをしてくださった落合理氏に心より感謝申し上げます。

Date: 2005 年 8 月 26 日発表.

Contents

1. **Elliptic case**

p を素数とする. Katz [12] による "p-adic modular form" の定式化は, 次の Observation に見られるような modular form を "幾何的にとらえる" という見地から行われる:

Observation 1.1 (cf. [12, Appendix 1] and [23, Section 7.2])**.** ここでは, 複素数体 $\mathbb{C}$ 上の modular form が "$\mathbb{C}$ 上の楕円曲線の同型類のなす集合上の関数" と対応していることについて概観する.

k を整数とする. 上半平面 $\mathfrak{h} := \{\tau \in \mathbb{C} | \operatorname{Im}(\tau) > 0\}$ 上の $\mathbb{C}$-値正則関数 f が (*weakly*) *modular form of weight* k *and level* 1 であるとは, 有理整数環 $\mathbb{Z}$-係数の特殊線形群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の任意の元 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して,

$$f(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}) = (c\tau + d)^k f(\tau) \qquad (\tau \in \mathfrak{h})$$

となること. ここで "weakly" とは, f の無限遠点における振る舞いについて条件を課していないことを意味する.

これらの f と, $\mathbb{C}$ 上の lattice の集合 $\{L = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2 | \operatorname{Im}(\frac{\omega_1}{\omega_2}) > 0\}$ 上の関数 F で

$$F(\lambda L) = \lambda^{-k} F(L) \qquad (\lambda \in \mathbb{C}^\times)$$

を満たすものとが関係式

$$F(L) = \omega_2^{-k} f(\frac{\omega_1}{\omega_2})$$

により対応することがわかる. (逆に, lattice の集合上の関数 F で上の条件を満たすものから weight k の modular form f を作るには,

$$f(\tau) := F(\mathbb{Z}\tau \oplus \mathbb{Z}) \quad (\tau \in \mathfrak{h})$$

とすればよい.)

さらに, これらの lattice の集合上の関数 F と, $\mathbb{C}$ 上の楕円曲線 E とその上の 0 でない不変微分形式のなす組の同型類の集合 $\{(E_{/\mathbb{C}}, \omega)\}_{/\cong}$ 上の関数 $\mathbb{F}$ で

$$\mathbb{F}(E, \lambda\omega) = \lambda^{-k}\mathbb{F}(E, \omega) \qquad (\lambda \in \mathbb{C}^{\times})$$

を満たすものとが関係式

$$\mathbb{F}(E, \omega) = F(\{\int_{\gamma} \omega | \gamma \in H_1(E, \mathbb{Z})\})$$

により対応することがわかる. (逆に, 楕円曲線と不変微分形式のなす組の同型類の集合上の関数 $\mathbb{F}$ で上の条件を満たすものから lattice の集合上の関数 F を作るには,

$$F(L) := \mathbb{F}(\mathbb{C}/L, dz) \quad (z \in \mathbb{C})$$

とすればよい.)

このように modular form を "幾何的にとらえる" ということに関して本質的なことは, modular form を "楕円曲線の moduli scheme 上の relative differential sheaf の global section" とみなすことであり (Remark 1.1), この観点で重要なポイントは, moduli scheme で parametrize される楕円曲線の定義環として, $\mathbb{C}$ だけではなく様々な可換環 (特に, p-adic ring A, すなわち自然な同型

$$A \cong A^{\wedge} := \varprojlim_n A/p^n A$$

が成立する可換環) に取り替えることができる点である (cf. [6, Section 1.4]).

以下, Section 1.1 で classical modular form の幾何的な定式化を行い, Section 1.2 において Katz's p-adic modular form with "growth condition" の定義を紹介する. Section 1.3 では, p-adic modular form with growth condition が classcal modular form のなす収束無限級数の形で表される "Katz's expansion" を紹介し, Section 1.4 において, Katz's expansion を用いることで Serre [24] の p-adic modular form を Katz's p-adic modular form with growth condition 1 と同一視できることを概説する.

1.1. **Classical modular forms**

ここでは, Katz [12, Section 1.2] による classical modular form の幾何的な定式化を, Gouvêa [7, Section I.2] に沿って紹介する. $N \geq 5$ と k を整数とし, R を $\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]$-algebra とする.

Definition 1.1 (cf. [12, Section 1.2] and [7, Section I.1])**.** (1) A を勝手な R-algebra とし, $\boldsymbol{\mu}_N$ を 1 の N 乗根のなす A 上の finite flat な group scheme とする (cf. [6, Section A.3.2]). $E_{/A}$ を A 上の楕円曲線, ω を E 上の 0 でない不変微分形式, そして $\iota : \boldsymbol{\mu}_N \hookrightarrow E[N]$ を finite flat な group scheme の A-inclusion (このような ι を E 上の *arithmetic level* $\Gamma_1(N)$*-structure* という) とするとき, 三つ組 $(E_{/A}, \omega, \iota)$ を *classical test object of level* N とよぶ. ここで, $E[N]$ は E の N-torsion point のなす subgroup を表す.

(2) f が *classical modular form of weight* k *and level* N *defined over* R であるとは, 勝手な classical test object $(E_{/A}, \omega, \iota)$ of level N に値 $f(E_{/A}, \omega, \iota) \in A$ をあてがい, 次の四つの条件を満たす rule のことをいう:

(i) 値 $f(E_{/A}, \omega, \iota) \in A$ は test object $(E_{/A}, \omega, \iota)$ の A-同型の差を除いて定まる;

(ii) 任意の R-algebra の準同型 $\varphi : A \to A'$ に対し,

$$f(E \otimes_A A'_{/A'}, \varphi^*(\omega), \iota \otimes_A A') = \varphi(f(E_{/A}, \omega, \iota));$$

(iii) 任意の $\lambda \in A^\times$ に対し,

$$f(E_{/A}, \lambda\omega, \iota) = \lambda^{-k} f(E_{/A}, \omega, \iota);$$

(iv) (カスプでの正則性) この四番目の条件について述べる前に Observation 1.1 に関連した考察をしたい:

Observation 1.2. Observation 1.1 において (weakly) modular form $f : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ に対応する, 楕円曲線と不変微分形式のなす組 $(E_{/\mathbb{C}}, \omega)$ の同型類上の関数 $\mathbb{F}$ は, 上半平面 $\mathfrak{h}$ の点 τ から定まる楕円曲線 $(\mathbb{C}/\mathbb{Z}\tau \oplus \mathbb{Z}, dz)$ での値を取るものになっている.

したがって, f の無限遠点における振る舞いを見ることは, $\mathbb{C}$ 上の同型

$$(\mathbb{C}/\mathbb{Z}\tau \oplus \mathbb{Z}, dz) \cong (\mathbb{C}^\times/q^{\mathbb{Z}}, \frac{dt}{t}), \quad z \mapsto t = e^{2\pi\sqrt{-1}z} \ (q := e^{2\pi\sqrt{-1}\tau})$$

を通して, $\mathbb{C}$ 上の *Tate* 曲線 $(\mathbb{C}^\times/q^{\mathbb{Z}}, \frac{dt}{t})$ における値 $\mathbb{F}(\mathbb{C}^\times/q^{\mathbb{Z}}, \frac{dt}{t})$ を見ることに対応する.

ここで, 1 の原始 N 乗根 ζ_N を一つ固定する. Observation 1.2 に現れる $\mathbb{C}$ 上の Tate 曲線を, 乗法群 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ の商として Laurent 級数のなす

環 $R[\zeta_N, \frac{1}{N}]((q^{\frac{1}{N}}))$ 上で代数化して得られる group scheme

$$(\mathrm{Tate}(q)_{/R[\zeta_N,\frac{1}{N}]((q^{\frac{1}{N}}))}, \omega_{\mathrm{can}}, \iota)$$

を arithmetic level $\Gamma_1(N)$-structure $\iota : \boldsymbol{\mu}_N \hookrightarrow \mathrm{Tate}(q)[N]$ 付きの *Tate object* とよぶ. ここで ω_{can} とは, $\frac{dt}{t}$ に由来する $\mathrm{Tate}(q)$ 上の標準的な 0 でない不変微分形式である (cf. [12, Section 1.2] and [6, Section 4.5]). f が満たすべき四つ目の条件 (iv) とは, 任意の arithmetic level $\Gamma_1(N)$-structure ι 付きの Tate object $(\mathrm{Tate}(q), \omega_{\mathrm{can}}, \iota)$ に対し,

$$f(\mathrm{Tate}(q), \omega_{\mathrm{can}}, \iota) \in R[\zeta_N, \frac{1}{N}][\![q^{\frac{1}{N}}]\!]$$

となることである. 特に, 自然な inclusion $\boldsymbol{\mu}_N \hookrightarrow \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ から誘導される標準的な arithmetic level $\Gamma_1(N)$-structure ι_{can} に対する値

$$f(q) := f(\mathrm{Tate}(q), \omega_{\mathrm{can}}, \iota_{\mathrm{can}}) \in R[\![q]\!]$$

を f の *q-expansion* とよぶ.

(3) classical modular form f of weight k and level N defined over R 全体のなす R-module を $M(R, k, N)$ とかく.

次の定理は, classical modular form を扱ううえで重要な基本定理であり, *q-expansion principle* とよばれる:

Theorem 1.1 (cf. [12, Theorem 1.6.1])**.** $f \in M(R, k, N)$ について, $f(q) = 0$ であれば $f = 0$.

Remark 1.1. arithmetic level $\Gamma_1(N)$-structure 付きの楕円曲線に対する R 上の moduli scheme $M_1(N)_{/R}$ の "minimal compactification" を $M_1^*(N)_{/R}$ とかくことにする (cf. [12, Section 1.5] and [6, Section 4.6.3]).

仮定 $N \geq 5$ のもとでは, $M_1^*(N)_{/R}$ 上に "universal object" が生じて relative differential sheaf $\underline{\omega}$ が誘導される. このとき, R-module $M(R, k, N)$ は cohomology group $H^0(M_1^*(N)_{/R}, \underline{\omega}^k)$ と自然に同一視され, cohomological な議論が適用できる. 上述の Theorem 1.1 もこの同一視を通して, moduli scheme $M_1^*(N)_{/R}$ の幾何的性質を用いて証明される ([12, Section 1.6]).

1.2. p-Adic modular forms with growth condition

Katz's p-adic modular form with growth condition は, Section 1.1 で扱った classical test object に "p-進的な制限" を付け加えたものを "p-adic test object with growth condition" とよび, それらに値をあてがう rule として定式化される. このことから, p-adic modular form with growth condition は classical modular form を自然に包含するものとして定式化されることになる.

以下, $p \geq 5$ を素数, $N \geq 5$ を p と互いに素な整数とし, 考える modular form の定義環 R を p-進整数環

$$\mathbb{Z}_p := \varprojlim_n \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$$

とする. このとき, $\mathbb{Z}_p$ は $\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]$-algebra となっていることに注意.

まず test object に “p-進的な制限” を付け加えるために, q-expansion が

$$E_{p-1}(q) = 1 - \frac{2(p-1)}{B_{p-1}} \sum_{n\geq 1} (\sum_{0<d|n} d^{p-2}) q^n$$

で与えられる Eisenstein 級数 E_{p-1} of weight $p-1$ を考える. ここで, B_{p-1} は $p-1$ 番目の Bernoulli 数であり, Clausen-von-Staudt の定理 (cf. [25, Theorem 5.10]) により, ある整数 x が存在して

$$B_{p-1} = x - \sum_q \frac{1}{q}$$

と表される. ここでの和 $\sum_q$ は $(q-1)|(p-1)$ なる素数 q を走る. これにより, $E_{p-1}(q) \in \mathbb{Z}_p[\![q]\!]$ であることがわかり, さらに

$$E_{p-1}(q) \equiv 1 \pmod p$$

となる.

Remark 1.2. $\mathbb{Z}_p$ 上の Eisenstein 級数 E_{p-1} of weight $p-1$ の q-expansion が

$$E_{p-1}(q) \equiv 1 \pmod p$$

を満たすということから, E_{p-1} が “Hasse invariant” とよばれる標数 p の素体 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 上の classical modular form of weight $p-1$ を $\mathbb{Z}_p$ 上へ持ち上げたものであることが導かれる. このことは, Seciton 2 で見るように, Katz's p-adic modular form を総実代数体上で定式化する際に重要なポイントとなる.

ちなみに Hasse invariant という modular form defined over $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ は, 標数 p 上の楕円曲線が “ordinary” であるか “supersingular” であるかの判別を与えるものであり, 詳しくは [12, Sections 2.0 and 2.1] を参照していただきたい.

さて, $0 \neq r \in \mathbb{Z}_p$ を固定する. “p-adic test object with growth condition r” を定義するための classical test object に付け加える “p-進的な制限” とは, (i) まず test object $(E_{/A}, \omega, \iota)$ として定義環 A が p-adic $\mathbb{Z}_p$-algebra であるものだけを取り出し, (ii) さらに Eisenstein 級数 E_{p-1} での値 $E_{p-1}(E_{/A}, \omega) \in A$ の “A における p-進付値” が r の p-進付値よりも小さなものだけを対象にする, といったものである. より厳密に言えば,

Definition 1.2 (cf. [12, Section 2.2] and [7, Section I.2.1]). (1) $0 \neq r \in \mathbb{Z}_p$ を固定する. A を勝手な p-adic $\mathbb{Z}_p$-algebra とし, $E_{/A}$ を A 上の楕円曲線, ω を E 上の 0 でない不変微分形式, そして $\iota : \boldsymbol{\mu}_N \hookrightarrow E[N]$ を E 上の arithmetic level $\Gamma_1(N)$-structure とする. さらに $Y \in A$ で

$$YE_{p-1}(E_{/A}, \omega) = r$$

となるものをとり, 四つ組 $(E_{/A}, \omega, \iota, Y)$ を *p-adic test object of level N with growth condition r* とよぶ. このとき, Y を $(E_{/A}, \omega)$ 上の *r-structure* という.

(2) k を整数とする. f が *p-adic modular form of weight k and level N with growth condition r defined over $\mathbb{Z}_p$* であるとは, 勝手な p-adic test object $(E_{/A}, \omega, \iota, Y)$ of level N with growth condition r に値 $f(E_{/A}, \omega, \iota, Y) \in A$ をあてがい, 次の四つの条件を満たす rule のことをいう:

(i) 値 $f(E_{/A}, \omega, \iota, Y) \in A$ は test object $(E_{/A}, \omega, \iota, Y)$ の A-同型の差を除いて定まる;

(ii) 任意の p-adic $\mathbb{Z}_p$-algebra の準同型 $\varphi : A \to A'$ に対し,

$$f(E \otimes_A A'_{/A'}, \varphi^*(\omega), \iota \otimes_A A', \varphi(Y)) = \varphi(f(E_{/A}, \omega, \iota, Y)).$$

ここで, 関係式 $YE_{p-1}(E_{/A}, \omega) = r$ により

$$\varphi(Y)E_{p-1}(E \otimes_A A'_{/A'}, \varphi^*(\omega)) = r$$

となることから, $\varphi(Y)$ は $(E \otimes_A A'_{/A'}, \varphi^*(\omega))$ 上の r-structure であることに注意;

(iii) 任意の $\lambda \in A^\times$ に対し,

$$f(E_{/A}, \lambda\omega, \iota, \lambda^{p-1}Y) = \lambda^{-k} f(E_{/A}, \omega, \iota, Y).$$

ここで, 関係式 $YE_{p-1}(E_{/A}, \omega) = r$ により

$$(\lambda^{p-1}Y)E_{p-1}(E_{/A}, \lambda\omega) = r$$

となることから, $\lambda^{p-1}Y$ は $(E_{/A}, \lambda\omega)$ 上の r-structure であることに注意;

(iv) (カスプでの正則性) 任意の arithmetic level $\Gamma_1(N)$-structure ι 付きの *p-adic Tate object* $(\mathrm{Tate}(q)_{/\mathbb{Z}_p[\zeta_N]((q^{\frac{1}{N}}))^\wedge}, \omega_{\mathrm{can}}, \iota, rE_{p-1}(q)^{-1})$ に対し,

$$f(\mathrm{Tate}(q), \omega_{\mathrm{can}}, \iota, rE_{p-1}(q)^{-1}) \in \mathbb{Z}_p[\zeta_N][\![q^{\frac{1}{N}}]\!]$$

となることである. ここで, $E_{p-1}(q) \equiv 1 \pmod p$ であることから $E_{p-1}(q) \in \mathbb{Z}_p[\![q]\!]^\times$ であることに注意. 特に, 標準的な arithmetic level $\Gamma_1(N)$-structure ι_{can} に対して,

$$f(q) := f(\mathrm{Tate}(q), \omega_{\mathrm{can}}, \iota_{\mathrm{can}}, rE_{p-1}(q)^{-1}) \in \mathbb{Z}_p[\![q]\!]$$

を f の *q-expansion* とよぶ.

(3) p-adic modular form f of weight k and level N with growth condition r defined over $\mathbb{Z}_p$ 全体のなす $\mathbb{Z}_p$-module を $M(\mathbb{Z}_p, k, N; r)$ とかく.

次の proposition により, p-adic modular form with growth condition は classical modular form を自然に包含していることがわかる:

Proposition 1.2. 任意の $0 \neq r \in \mathbb{Z}_p$ に対して, 写像

$$M(\mathbb{Z}_p, k, N) \to M(\mathbb{Z}_p, k, N; r),$$
$$f \mapsto (\tilde{f} : (E_{/A}, \omega, \iota, Y) \mapsto f(E_{/A}, \omega, \iota))$$

は $\mathbb{Z}_p$-module の injection である.

Proof. classical modular form f の定義から $\tilde{f} \in M(\mathbb{Z}_p, k, N; r)$ であることと, 写像 $f \mapsto \tilde{f}$ が $\mathbb{Z}_p$-module の準同型となることはすぐにわかる. もし $\tilde{f} = 0$ となれば, q-expansion をとると $0 = \tilde{f}(q) = f(q)$. よって, Theorem 1.1 から $f = 0$ である. □

1.3. **Katz's expansion**

以下, $p \geq 5$ を素数, $N \geq 5$ を p と互いに素な整数, $k \geq 2$ を整数とする.

Remark 1.3. Section 1.1 と Section 1.2 では k を任意の整数としてあったが, この Section からは, moduli scheme $M_1^*(N)_{/\mathbb{Z}_p}$ 上の relative differential sheaf $\underline{\omega}$ の global section に対する "Base change theorem" を保証するために $k \geq 2$ と仮定する. つまり $k \geq 2$ の時, 任意の $\mathbb{Z}_p$-module R に対して次の自然な同型が成立する:

$$H^0(M_1^*(N)_{/R}, \underline{\omega}^k) \cong H^0(M_1^*(N)_{/\mathbb{Z}_p}, \underline{\omega}^k) \otimes_{\mathbb{Z}_p} R$$

(cf. [12, Theorem 1.7] and [6, Lemma 4.6.9]). この Section の主定理である "Katz's expansion" を紹介する中で, 証明を省略した命題をいくつか述べるが, それらの証明には全てこの Base change theorem が用いられていることに注意していただきたい.

この Section では, p-adic modular form with growth condition が classical modular form のなす収束無限級数の形で表される "Katz's expansion" を紹介し, そのことから導かれる p-adic modular form with growth condition の性質をいくつか証明したい.

$a \geq 1$ を整数とする. Eisenstein 級数 E_{p-1} の q-expansion が

$$E_{p-1}(q) \equiv 1 \pmod{p}$$

であることから, E_{p-1} 倍写像

$$M(\mathbb{Z}_p, k + (a-1)(p-1), N) \to M(\mathbb{Z}_p, k + a(p-1), N),$$
$$f \mapsto E_{p-1} f$$

は injective な $\mathbb{Z}_p$-module の準同型である. classical modular form のなす $M(\mathbb{Z}_p, k+(a-1)(p-1), N)$ と $M(\mathbb{Z}_p, k+a(p-1), N)$ はいずれも finite free な $\mathbb{Z}_p$-module であり, [12, Lemma 2.6.1] により E_{p-1} 倍写像の cokernel も finite free な $\mathbb{Z}_p$-module となる (このことは, Igusa の定理により $M_1^*(N)_{/\mathbb{Z}_p}$ 上の quotient sheaf として $\underline{\omega}^{k+a(p-1)}/E_{p-1}(\underline{\omega}^{k+(a-1)(p-1)})$ は $\mathbb{Z}_p$-flat であり, mod p すると skyscraper sheaf になることから導かれる). したがって, ある直和因子 $A(\mathbb{Z}_p, k, a, N)$ が存在して

$$\begin{aligned} &M(\mathbb{Z}_p, k + a(p-1), N) \\ &\qquad = E_{p-1}(M(\mathbb{Z}_p, k + (a-1)(p-1), N)) \oplus A(\mathbb{Z}_p, k, a, N) \end{aligned}$$

と直和分解できる. $a = 0$ に対しては,

$$A(\mathbb{Z}_p, k, 0, N) := M(\mathbb{Z}_p, k, N)$$

と定義すれば,

Lemma 1.3. 任意の整数 $j \geq 0$ に対し, $\mathbb{Z}_p$-module の同型

$$\oplus_{a=0}^{j} A(\mathbb{Z}_p, k, a, N) \xrightarrow{\sim} M(\mathbb{Z}_p, k + j(p-1), N),$$
$$\sum_{a=0}^{j} b_a \mapsto \sum_{a=0}^{j} E_{p-1}^{j-a} b_a$$

を得る.

Proof. $j = 0$ の時は定義により明らか. $j \geq 1$ の時は, 各 $1 \leq a \leq j$ に対する同型写像

$$\begin{aligned} &M(\mathbb{Z}_p, k + (j-a)(p-1), N) \oplus A(\mathbb{Z}_p, k, j-a+1, N) \\ &\quad \xrightarrow{\sim} E_{p-1}(M(\mathbb{Z}_p, k + (j-a)(p-1), N)) \oplus A(\mathbb{Z}_p, k, j-a+1, N) \\ &\qquad (= M(\mathbb{Z}_p, k + (j-a+1)(p-1), N)), \\ &\quad f \oplus g \mapsto E_{p-1} f \oplus g \end{aligned}$$

を重ね合わせることで, 求める同型を得ることができる. □

この同型に growth condition r で "p-進的な重み" をつけながら p-進完備化を取ったような, p-進完備な $\mathbb{Z}_p$-module の同型を得ることができる:

Theorem 1.4 (cf. [12, Theorem 2.5.1 and Proposition 2.6.2], [7, Propositions I.2.5 and I.2.6])**.** 任意の $0 \neq r \in \mathbb{Z}_p$ に対して, 次の完備な $\mathbb{Z}_p$-modules の完全列のなす可換図式が得られる:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to (E_{p-1} - r) \to & (\oplus_{a=0}^{\infty} M(\mathbb{Z}_p, k + a(p-1), N))^{\wedge} & \xrightarrow{\kappa_r} & M(\mathbb{Z}_p, k, N; r) \to 0 \\ & \bigcup & & \| \\ \kappa_r : & (\oplus_{a=0}^{\infty} A(\mathbb{Z}_p, k, a, N))^{\wedge} & \xrightarrow{\sim} & M(\mathbb{Z}_p, k, N; r). \end{array}$$

ただし, 第一列目の左側の写像は部分加群を埋め込む自然な injection であり, 写像 κ_r は

$$\kappa_r : \sum_{a=0}^{\infty} b_a \mapsto (\sum_{a=0}^{\infty} \frac{b_a}{E_{p-1}^a} r^a : (E_{/A}, \omega, \iota, Y) \overset{\text{def}}{\mapsto} \sum_{a=0}^{\infty} b_a(E_{/A}, \omega, \iota) Y^a)$$

で定義される $\mathbb{Z}_p$-module の準同型である. ここで, $\mathbb{Z}_p$-module M に対して,

$$M^\wedge := \varprojlim_n M/p^n M$$

は M の p-進完備化を表す. とくに, $M(\mathbb{Z}_p, k, N; r)$ は完備な $\mathbb{Z}_p$-module である.

Definition 1.3. p-adic modular form $f \in M(\mathbb{Z}_p, k, N; r)$ を同型写像 κ_r により $\sum_{a=0}^{\infty} b_a \in (\oplus_{a=0}^{\infty} A(\mathbb{Z}_p, k, a, N))^\wedge$ を用いて

$$f = \sum_{a=0}^{\infty} \frac{b_a}{E_{p-1}^a} r^a$$

と表したものを f の *Katz's expansion* と呼ぶ. Katz's expansion は growth condition r のとり方によらず, 統一的に $(\oplus_{a=0}^{\infty} A(\mathbb{Z}_p, k, a, N))^\wedge$ の元を用いて展開されることに注意.

Proof. まず, 任意の元 $\sum_{a=0}^{\infty} b_a \in (\oplus_{a=0}^{\infty} M(\mathbb{Z}_p, k + a(p-1), N))^\wedge$ に対し, κ_r による像 $\sum_{a=0}^{\infty} \frac{b_a}{E_{p-1}^a} r^a$ が $M(\mathbb{Z}_p, k, N; r)$ の元であることを示す. これが示されたならば, κ_r が $\mathbb{Z}_p$-module の準同型であることは明らかである.

勝手な p-adic test object $(E_{/A}, \omega, \iota, Y)$ について, A は p-adic ring であり, $\sum_{a=0}^{\infty} b_a$ が p-進完備化の元であることから,

$$\sum_{a=0}^{\infty} \frac{b_a}{E_{p-1}^a} r^a (E_{/A}, \omega, \iota, Y) = \sum_{a=0}^{\infty} b_a(E_{/A}, \omega, \iota) Y^a \in A$$

が定まり, 各 b_a が classical modular form であることから Definition 1.2 (2) の条件 (i) と (ii) は明らか. b_a は weight $k + a(p-1)$ だから, 任意の $\lambda \in A^\times$ に対し

$$\begin{aligned} \sum_{a=0}^{\infty} \frac{b_a}{E_{p-1}^a} r^a (E_{/A}, \lambda\omega, \iota, \lambda^{p-1} Y) &= \sum_{a=0}^{\infty} b_a(E_{/A}, \lambda\omega, \iota)(\lambda^{p-1} Y)^a \\ &= \lambda^{-k} \sum_{a=0}^{\infty} b_a(E_{/A}, \omega, \iota) Y^a \\ &= \lambda^{-k} (\sum_{a=0}^{\infty} \frac{b_a}{E_{p-1}^a} r^a (E_{/A}, \omega, \iota, Y)) \end{aligned}$$

となり, 条件 (iii) が満たされることがわかる. さらに $\mathbb{Z}_p[\![q]\!]$ が p-adic ring であることから, 条件 (iv) も成立し

$$\sum_{a=0}^{\infty} \frac{b_a}{E_{p-1}^a} r^a \in M(\mathbb{Z}_p, k, N; r)$$

である. さて, この証明では第一列目が完全列であることは認めたうえで, 第二列目の κ_r が同型写像であることを証明したい. ちなみに, 第一列目の完全性は, 任意の整数 $n \geq 1$ に対し base ring を $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ に base change した際, 関手

$$\begin{aligned} &\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\text{-}SCH \to SETS, \\ &\qquad S \mapsto \{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\text{-morphism } g : S \to M_1^*(N)_{/\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}} \\ &\qquad\qquad\qquad \text{with } Y \in g^*(\underline{\omega}^{1-p})\} \end{aligned}$$

が $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$-scheme $\underline{\mathrm{Spec}}_{M_1^*(N)_{/\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}}(\mathrm{Symm}(\underline{\omega}^{1-p})^\vee)$ で表現可能であることから導かれる (ここで, $\vee$ は dual sheaf を表す). この証明に関する詳細は [12, Sections 2.3-2.5] を参照していただきたい.

まず, κ_r が単射であることを証明する. もし $(\oplus_{a=0}^{\infty} A(\mathbb{Z}_p, k, a, N))^\wedge$ の元 $\sum_{a=0}^{\infty} b_a$ について

$$\sum_{a=0}^{\infty} \frac{b_a}{E_{p-1}^a} r^a = 0$$

となれば第一列目の完全列により, ある $\sum_{a=0}^{\infty} s_a \in (\oplus_{a=0}^{\infty} M(\mathbb{Z}_p, k + a(p-1), N))^\wedge$ が存在して

$$\sum_{a=0}^{\infty} b_a = (E_{p-1} - r) \sum_{a=0}^{\infty} s_a$$

と表される. 任意の整数 $n \geq 1$ を固定したもとで, 各 $a \geq 0$ に対し $b_a \equiv 0 \pmod{p^n}$ を示せば, Theorem 1.1 (q-expansion principle) により $\sum_{a=0}^{\infty} b_a = 0$ がわかり κ_r が単射であることが証明される. p-進完備化の定義により, ある整数 $m \geq 1$ が存在して任意の $a \geq m+1$ に対し

$$b_a \equiv s_a \equiv 0 \pmod{p^n}$$

となる. したがって, mod p^n で $\sum_{a=0}^{\infty} b_a = (E_{p-1} - r) \sum_{a=0}^{\infty} s_a$ の weight $k + (m+1)(p-1)$-部分を比較すれば

$$\begin{aligned} 0 &\equiv b_{m+1} - (E_{p-1} s_m - r s_{m+1}) \pmod{p^n} \\ &\equiv -E_{p-1} s_m \pmod{p^n} \end{aligned}$$

となり, $E_{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ であるから

$$s_m \equiv 0 \pmod{p^n}.$$

一方, weight $k+m(p-1)$-部分を比較すれば

$$b_m \equiv E_{p-1}s_{m-1} \pmod{p^n}$$

となり, 直和因子 $A(\mathbb{Z}_p,k,m,N) \subset M(\mathbb{Z}_p,k+m(p-1),N)$ の定義と base ring $\mathbb{Z}_p$ を mod p^n することに対する Base change theorem により,

$$s_{m-1} \equiv 0 \pmod{p^n}$$

であることがわかり,

$$b_m \equiv 0 \pmod{p^n}$$

を得る. この議論を繰り返せば, 各 $a \geq 0$ に対し

$$b_a \equiv 0 \pmod{p^n}$$

が得られる.

次に, κ_r が全射であることを証明する. そのためには, 第一列目の完全列により任意の元 $\sum_{a=0}^{\infty} s_a \in (\oplus_{a=0}^{\infty} M(\mathbb{Z}_p,k+a(p-1),N))^\wedge$ に対し, ある $b \in (\oplus_{a=0}^{\infty} A(\mathbb{Z}_p,k,a,N))^\wedge$ が存在して

$$b \equiv \sum_{a=0}^{\infty} s_a \pmod{(E_{p-1}-r)}$$

を示せばよい. 各 $a \geq 0$ について, Lemma 1.3 により

$$s_a = \sum_{i+j=a} E_{p-1}^i b_j(a) \quad \text{with} \quad b_j(a) \in A(\mathbb{Z}_p,k,j,N)$$

と表せる. このとき, 各 j について p-進完備化の定義により任意の整数 $n \geq 1$ に対し, ある整数 $m_n \geq 1$ が存在して $a \geq m_n+1$ であれば

$$b_j(a) \in p^n A(\mathbb{Z}_p,k,j,N)$$

となる. したがって, 合同式

$$\begin{aligned}
\sum_{a=0}^{\infty} s_a &= \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{i+j=a} E_{p-1}^i b_j(a) \\
&= \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{i+j=a} \{r^i + (E_{p-1}-r)(\sum_{u+v=i-1} E_{p-1}^u r^v)\} b_j(a) \\
&= \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{i+j=a} r^i b_j(a) + (E_{p-1}-r) \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{i+j=a} b_j(a)(\sum_{u+v=i-1} E_{p-1}^u r^v) \\
&\equiv \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{i+j=a} r^i b_j(a) \pmod{(E_{p-1}-r)} \\
&\equiv \sum_{j=0}^{\infty} (\sum_{i=0}^{\infty} r^i b_j(i+j)) \pmod{(E_{p-1}-r)}
\end{aligned}$$

において,

$$b'_j := \sum_{i=0}^{\infty} r^i b_j(i+j)$$

が $A(\mathbb{Z}_p, k, j, N)$ の元として定まり

$$b := \sum_{j=0}^{\infty} b'_j$$

が求める $(\oplus_{a=0}^{\infty} A(\mathbb{Z}_p, k, a, N))^\wedge$ の元である. □

Corollary 1.5 (cf. [12, Corollary 2.6.3] and [7, Corollary I.2.7]). $\mathbb{Z}_p$ 内で $0 \neq r_2 = rr_1$ という関係があるとき, 次の 完備な $\mathbb{Z}_p$-module の単射準同型のなす可換図式が得られる:

$$\begin{array}{ccc}
(\oplus_{a=0}^{\infty} A(\mathbb{Z}_p, k, a, N))^\wedge & \hookrightarrow & (\oplus_{a=0}^{\infty} A(\mathbb{Z}_p, k, a, N))^\wedge \\
\kappa_{r_2} \cong \downarrow & & \kappa_{r_1} \cong \downarrow \\
M(\mathbb{Z}_p, k, N; r_2) & \hookrightarrow & M(\mathbb{Z}_p, k, N; r_1), \\
 & & f \mapsto (\tilde{f} : (E_{/A}, \omega, \iota, Y) \mapsto f(E_{/A}, \omega, \iota, rY)).
\end{array}$$

ここで, 一列目の写像は

$$\sum_{a=0}^{\infty} b_a \mapsto \sum_{a=0}^{\infty} r^a b_a$$

で与えられる $\mathbb{Z}_p$-module の単射準同型である.
　とくに, $r \in \mathbb{Z}_p^\times$ であれば, 同型

$$M(\mathbb{Z}_p, k, N; r_2) \xrightarrow{\sim} M(\mathbb{Z}_p, k, N; r_1)$$

を得る. さらに任意の $0 \neq r \in \mathbb{Z}_p$ に対して, $\mathbb{Z}_p$-module の単射

$$M(\mathbb{Z}_p, k, N; r) \hookrightarrow M(\mathbb{Z}_p, k, N; 1)$$

が得られる.

Proof. p-進完備化の定義と Theorem 1.1 (q-expansion principle) により, 第一列目の写像が単射準同型であることがわかる. □

Katz's expansion を用いて, p-adic modular form with growth condition r に対する q-expansion principle を証明することができる:

Corollary 1.6 (cf. [12, Proposition 2.7.2] and [7, Proposition I.2.10]). 任意の $0 \neq r \in \mathbb{Z}_p$ をとる. もし $f \in M(\mathbb{Z}_p, k, N; r)$ が $f(q) = 0$ であれば $f = 0$.

Proof. Corollary 1.5 における $\mathbb{Z}_p$-module の単射準同型

$$M(\mathbb{Z}_p, k, N; r) \hookrightarrow M(\mathbb{Z}_p, k, N; 1),$$
$$f \mapsto \tilde{f}$$

において q-expansion をとれば

$$\begin{aligned}\tilde{f}(q) &= \tilde{f}(\mathrm{Tate}(q), \omega_{\mathrm{can}}, \iota_{\mathrm{can}}, E_{p-1}(q)^{-1}) \\ &= f(\mathrm{Tate}(q), \omega_{\mathrm{can}}, \iota_{\mathrm{can}}, rE_{p-1}(q)^{-1}) \\ &= f(q)\end{aligned}$$

であるから, 始めから $r = 1$ と仮定してよい.

$$f = \sum_{a=0}^{\infty} \frac{b_a}{E_{p-1}^a}$$

を $\sum_{a=0}^{\infty} b_a \in (\oplus_{a=0}^{\infty} A(\mathbb{Z}_p, k, a, N))^\wedge$ を用いた f の Katz's expansion として両辺で q-expansion をとると, $\mathbb{Z}_p[\![q]\!]$ 内で

$$\sum_{a=0}^{\infty} b_a(q) E_{p-1}(q)^{-a} = 0.$$

p-進完備化の定義により, 任意の整数 $n \geq 1$ に対してある整数 $m_n \geq 1$ が存在して,

$$\sum_{a=0}^{m_n} b_a(q) E_{p-1}(q)^{-a} \equiv 0 \pmod{p^n}$$

となり, このことから

$$\sum_{a=0}^{m_n} b_a(q) E_{p-1}^{m_n - a}(q) \equiv 0 \pmod{p^n}$$

を得るので, Base change theorem (Remark 1.3) と q-expansion principle (Theorem 1.1) により, $M(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, k + m_n(p-1), N)$ 内で

$$\sum_{a=0}^{m_n} b_a E_{p-1}^{m_n - a} = 0.$$

したがって, Base change theorem と Lemma 1.3 により, 任意の $n \geq 1$ に対し

$$\sum_{a=0}^{m_n} b_a \equiv 0 \pmod{p^n}$$

が得られ, $(\oplus_{a=0}^{\infty} A(\mathbb{Z}_p, k, a, N))^\wedge$ において

$$\sum_{a=0}^{\infty} b_a = 0$$

となるので $f = 0$ である. □

1.4. Serre's p-adic modular forms との関係

ここでは, Katz's expansion (Theorem 1.4) を用いることで, Serre の p-adic modular form ([24], 本報告集の長岡氏の論説を参照のこと) が Katz の p-adic modular form with growth condition 1 と同一視できることを証明する. すなわち,

Theorem 1.7 (cf. [12, Proposition 2.7.2] and [7, Proposition I.2.12])**.** 形式的冪級数 $f(q) \in \mathbb{Z}_p[\![q]\!]$ について, 次の二つの条件は同値:

(i) ある $f \in M(\mathbb{Z}_p, k, N; 1)$ が存在して, f の q-expansion は $f(q)$ で与えられる;

(ii) 任意の整数 $n \geq 1$ に対して, p^{n-1} で割り切れるある整数 $m_n \geq 1$ と $g_n \in M(\mathbb{Z}_p, k + m_n(p-1), N)$ が存在して

$$f(q) \equiv g_n(q) \pmod{p^n}.$$

したがって, Serre の p-adic modular form of weight k and level N defined over $\mathbb{Z}_p$ は Katz の p-adic modular form of weight k and level N with growth condition 1 defined over $\mathbb{Z}_p$ と同一視することができる.

Proof. (i)⇒ (ii) $\sum_{a=0}^{\infty} b_a \in (\oplus_{a=0}^{\infty} A(\mathbb{Z}_p, k, a, N))^{\wedge}$ を用いて f の Katz's expansion が

$$f = \sum_{a=0}^{\infty} \frac{b_a}{E_{p-1}^a}$$

で与えられているとする. p-進完備化の定義により任意の整数 $n \geq 1$ に対して, ある整数 $m_n \geq 1$ が存在して任意の整数 $a \geq m_n + 1$ について

$$b_a \in p^n M(\mathbb{Z}_p, k + a(p-1), N)$$

となっている. m_n を p^{n-1} で割り切れるように大きくとっておき,

$$g_n := \sum_{a=0}^{m_n} b_a E_{p-1}^{m_n - a} \in M(\mathbb{Z}_p, k + m_n(p-1), N)$$

とおく.

$$f(q) = \sum_{a=0}^{\infty} b_a(q) E_{p-1}(q)^{-a} \equiv \sum_{a=0}^{m_n} b_a(q) E_{p-1}(q)^{-a} \pmod{p^n}$$

であり, $E_{p-1}(q) \equiv 1 \pmod{p}$ であることから

$$E_{p-1}(q)^{p^{n-1}} \equiv 1 \pmod{p^n}$$

となり, とくに

$$E_{p-1}(q)^{m_n} \equiv 1 \pmod{p^n}$$

であるので

$$f(q) \equiv \sum_{a=0}^{m_n} b_a(q) E_{p-1}(q)^{m_n - a} = g_n(q) \pmod{p^n}.$$

(ii)⇒(i) 条件 (ii) において classical modular form g_n of weight $k + m_n(p-1)$ を, 整数 $l \geq 1$ を用いて weight $k + (m_n + lp^{n-1})(p-1)$ の classical modular form $g_n E_{p-1}^{p^{n-1}l}$ に取り替えてもよいので, 始めから任意の整数 $n \geq 1$ に対して

$$m_n < m_{n+1}$$

であると仮定してよい. このとき

$$\Delta_n := m_{n+1} - m_n > 0$$

とおけば,

$$\begin{aligned} g_{n+1}(q) - g_n(q) E_{p-1}(q)^{\Delta_n} &\equiv g_{n+1}(q) - g_n(q) \\ &\equiv f(q) - f(q) = 0 \pmod{p^n}. \end{aligned}$$

したがって, q-expansion principle により

$$g_{n+1} - g_n E_{p-1}^{\Delta_n} \in p^n M(\mathbb{Z}_p, k + m_{n+1}(p-1), N)$$

となり, $(\oplus_{m=0}^{\infty} M(\mathbb{Z}_p, k + m(p-1), N))^\wedge$ の元

$$\begin{aligned} h := g_1 + (g_2 - g_1 E_{p-1}^{\Delta_1}) + (g_3 - g_2 E_{p-1}^{\Delta_2}) \\ + \cdots + (g_{n+1} - g_n E_{p-1}^{\Delta_n}) + \cdots \end{aligned}$$

が定まる. Theorem 1.4 の第一列目の準同型

$$(\oplus_{m=0}^{\infty} M(\mathbb{Z}_p, k + m(p-1), N))^\wedge \xrightarrow{\kappa_1} M(\mathbb{Z}_p, k, N; 1)$$

による h の像を $\tilde{h} \in M(\mathbb{Z}_p, k, N; 1)$ とおき, その q-expansion をとり mod p^n すれば,

$$\begin{aligned} \tilde{h}(q) &\equiv g_1(q) E_{p-1}(q)^{-m_1} + (g_2(q) - g_1(q) E_{p-1}^{\Delta_1}) E_{p-1}^{-m_2} \\ &\quad + \cdots + (g_n(q) - g_{n-1}(q) E_{p-1}(q)^{\Delta_{n-1}}) E_{p-1}(q)^{-m_n} \pmod{p^n} \\ &= g_n(q) E_{p-1}(q)^{-m_n} \\ &\equiv g_n(q) \\ &\equiv f(q) \pmod{p^n} \end{aligned}$$

となるので, $\mathbb{Z}_p[\![q]\!]$ 内で

$$\tilde{h}(q) = f(q)$$

が得られる. □

Remark 1.4. Corollary 1.7 が示唆しているように, Katz [12, Chapter 4] は growth condition 1 付きの楕円曲線の arithmetic moduli scheme の基本群を, universal elliptic curve の p-冪ねじれ部分群のétale 商に作用させることで, Serre [24] による "weight の収束定理" (cf. 本報告集の長岡氏による論説の Section 1.4 の定理 2) の幾何的な別証を与えた ([12, Theorem 4.5.1]).

このことから, p-adic modular form with growth condition 1 の q-expansion の定数項について p-冪を法とした合同に関する性質が得られ ([12, Corollary 4.5.3]), 適当な代数体 F に対する Dedekind の ζ-関数 ζ_F の特殊値の p-冪を法とした合同に関する性質を調べることに応用することができる (cf. [12, Remark 4.4.4 and Example 4.5.4]).

2. **Hilbert case**

ここでは, 総実代数体上の "Katz's p-adic Hilbert modular form" について, 主に [6] に沿って概説したい.

F を総実代数体とし, その拡大次数を $g \geq 2$ とする. O_F を F の整数環, d を判別式, $\mathcal{D}$ を差積とする. また, $\tilde{F}$ を F の Galois 閉包, $O_{\tilde{F}}$ をその整数環とし, $\sigma_1, \ldots, \sigma_g$ を F の $\tilde{F}$ への埋め込み全体とする. Section 1 で概観した $\mathbb{Q}$ 上の Katz's p-adic modular form の理論を F 上へ拡張するうえで, $\mathbb{Q}$ 上での理論を構築する際に次の二点がキーポイントとなっていたことに注意したい:

(i) $N \geq 4$ という仮定のもと, $\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]$-algebra R に対し, classical modular form of weight $k \in \mathbb{Z}$ and level N defined over R のなす R-module $M(R, k, N)$ が, arithmetic level $\Gamma_1(N)$-structure $\boldsymbol{\mu}_N \hookrightarrow E[N]$ に対する R 上の moduli scheme $M_1(N)_{/R}$ の minimal compactification $M_1^*(N)_{/R}$ 上の relative differential sheaf $\underline{\omega}$ の global section のなす R-module $H^0(M_1^*(N)_{/R}, \underline{\omega}^k)$ と自然に同一視できる (Remark 1.1). この同一視により, classical modular form に対する q-expansion principle (Theorem 1.1) や Base change theorem ($k \geq 2$ のとき, Remark 1.3) を $M_1^*(N)_{/R}$ の幾何的な性質を用いて証明できる.

とくに重要なポイントは, compactified moduli scheme $M_1^*(N)$ 上に universal object 生じ, そこから relative differential sheaf $\underline{\omega}$ が得られることである (cf. [12, Section 1.5] and [6, Section 4.6.3]);

(ii) $p \geq 5$ という仮定のもと, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 上の classical modular form である "Hasse invariant" を, $\mathbb{Z}_p$ 上へ持ち上げた classical modular form として Eisenstein 級数 E_{p-1} が取れる. とくに q-expansion が

$$E_{p-1}(q) \equiv 1 \pmod{p}$$

を満たすことが重要なポイントである (Remark 1.2).

以上の二点を総実代数体 F 上の理論へと一般化することについては, 次のように考察できる:

(i) F の分数 ideal $\mathfrak{c}$ を一つ固定する. $N \geq 5$ を整数とし, 1 の原始 N 乗根 ζ_N を一つとる. R を $O_{\tilde{F}}[\zeta_N, \frac{1}{dN}]$-algebra とする.

Definition 2.1 (cf. [18, Section 1.0], [6, Section 3.5] and [11, Section 4.1.1])**.** (1) 任意の R-algebra B 上の $\mathfrak{c}$-*polarized Hilbert-Blumenthal abelian variety* $\underline{A}_{/B} = (A_{/B}, i, \lambda)$ とは, real multiplication とよばれる環としての injection

$$i : O_F \hookrightarrow \mathrm{End}(A_{/B})$$

を持つ, $\mathfrak{c}$-polarization λ が付いた B 上の abelian variety A であって, その原点における cotangent space $\underline{\omega}_{A_{/B}}$ が locally free $O_F \otimes_{\mathbb{Z}} B$-module of rank 1 となるもののことである.

(2) R-algebra B 上の $\mathfrak{c}$-polarized Hilbert-Blumenthal abelian variety $\underline{A}_{/B} = (A_{/B}, i, \lambda)$ に対し, O_F-action と可換な finite flat な group scheme の B-inclusion

$$\iota : \boldsymbol{\mu}_N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{D}^{-1} \hookrightarrow A[N]$$

を $\underline{A}_{/B}$ 上の *arithmetic level* $\Gamma_1(N)$-*structure* とよぶ.

このとき, arithmetic level $\Gamma_1(N)$-structure 付きの $\mathfrak{c}$-polarized Hilbert-Blumenthal abelian variety を parametrize する R 上の moduli scheme $M_1(N)_{/R}$ が存在する (cf. [18, Section 1.0]). $M_1(N)_{/R}$ の compactification として, *minimal compactification* $M_1^*(N)$ と *toroidal compactification* $M_1(N)^{\mathrm{tor}}$ の二つがあり, 一般に $M_1^*(N)$ 上には universal object は存在せず, $M_1(N)^{\mathrm{tor}}$ 上に universal object が生じる. このことから, まず $M_1(N)^{\mathrm{tor}}$ 上に relative differential sheaf $\underline{\omega}^{\mathrm{tor}}$ が誘導されて, 自然な射

$$M_1(N)^{\mathrm{tor}}_{/R} \to M_1^*(N)_{/R}$$

で $\underline{\omega}^{\mathrm{tor}}$ を押し出すことで $M_1^*(N)_{/R}$ 上に ample な relative differential sheaf $\underline{\omega}$ を得ることができる. その global section のなす R-module $H^0(M_1^*(N)_{/R}, \underline{\omega}^k)$ が "classical $\mathfrak{c}$-polarized Hilbert modular form of parallel weight $k \in \mathbb{Z}$ and level N defined over R" と同一視されるものに相当する. (toroidal compactification については [22] を, minimal compactification との関連については [4] もしくは [11, Section 4.1.4] を参照.)

(ii) $\mathbb{Q}$ 上の理論と同様に, 標数 p 上の abelian variety が ordinary かどうかの判別を与える "Hasse invariant" とよばれる標数 p 上の classical Hilbert modular form H of parallel weight $p-1$ が存在する.

これを標数 0 へ持ち上げる際には global section のなす module に対する Base change theorem (cf. Remark 1.3) を適用するため, $M_1^*(N)$

上で $\underline{\omega}^{m(p-1)}$ が very ample になるくらいに整数 m を大きくとっておいたうえで Hasse invariant の冪 H^m を持ち上げることになる．そのようにして持ち上げた parallel weight $l := m(p-1)$ の classical Hilbert modular form E_l を, Section 1 での Eisenstein 級数 E_{p-1} と同等の役割を演じる modular form として採用する．とくに "q-expansion" が

$$E_l(q) \equiv 1 \pmod p$$

を満たすことに注意 (cf. [11, Section 4.1.6]).

ちなみに, F に対する Dedekind の ζ 関数 ζ_F の特殊値 $\zeta_F(1-l)$ が p-integral でないときには, E_l として q-expansion が次で与えられる Siegel により定義された Eisenstein 級数 of parallel weight l

$$E_l(q) = 1 + \frac{2^g}{\zeta_F(1-l)} \sum_{\nu \in O_F^+} \Big(\sum_{(\nu) \subset \mathfrak{c} \subset O_F} (\sharp(O_F/\mathfrak{c}))^{l-1} \Big) q^\nu$$

を用いることができる (cf. [5, Section 3])．ここで,

$$O_F^+ := \{\nu \in O_F | \sigma_i(\nu) > 0,\ i = 1, \ldots, g\}$$

であり, この q-expansion を g 個の複素上半平面の直積の上の関数とみなす関係式は

$$q^\nu = e^{2\pi\sqrt{-1}(\sigma_1(\nu)\tau_1 + \cdots + \sigma_g(\nu)\tau_g)} \quad ((\tau_1, \ldots, \tau_g) \in \mathfrak{h} \times \cdots \times \mathfrak{h})$$

で与えられる．

以上の考察のもとで, Section 2.1 では [6, Section 5.1] を参考に classical $\mathfrak{c}$-polarized Hilbert modular form の幾何的な定式化を行い, Section 2.2 において [6, Section 5.6] に沿って Katz's p-adic $\mathfrak{c}$-polarized Hilbert modular form with growth condition の定義を概説する．そして Section 2.3 で $\mathbb{Q}$ 上の場合と同様に, Katz's p-adic $\mathfrak{c}$-polarized Hilbert modular form が Katz's expansion をもち, それを用いて Serre 流の p-adic Hilbert modular form が Katz's p-adic Hilbert modular form with growth condition と同一視できることを紹介する．

本稿では簡単のため "parallel weight" の Hilbert modular form だけを扱う ("non-parallel weight" の扱い方については [6, Section 5.1] を参照のこと).

2.1. Classical Hilbert modular forms

R を $O_{\tilde{F}}[\zeta_N, \frac{1}{dN}]$-algebra とする．

Definition 2.2. R-algebra B に対し, $d \in B^\times$ であるから B-algebra の同型

$$O_F \otimes_{\mathbb{Z}} B \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^{g} B,$$
$$x = a \otimes b \mapsto (\sigma_i(x) := \sigma_i(a)b)_{i=1}^{g}$$

が得られる. この同型を単数群に制限して, 各成分の積を取った群準同型として

$$\mathrm{Norm} : (O_F \otimes_{\mathbb{Z}} B)^\times \to B^\times,$$
$$x \mapsto \prod_{i=1}^{g} \sigma_i(x)$$

を定義する.

$N \geq 5$ を整数とし, F の分数 ideal $\mathfrak{c}$ を一つ固定する.

Definition 2.3 (cf. [18, Section 1.2])**.** (1) B を勝手な R-algebra とし, $\boldsymbol{\mu}_N$ を 1 の N 乗根のなす B 上の finite flat な group scheme とする. $\underline{A}_{/B}$ を B 上の $\mathfrak{c}$-polarized Hilbert-Blumenthal abelian variety, ω を $\underline{\omega}_{A_{/B}}$ の B-basis, そして

$$\iota : \boldsymbol{\mu}_N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{D}^{-1} \hookrightarrow A[N]$$

を $\underline{A}_{/B}$ 上の arithmetic level $\Gamma_1(N)$-structure とするとき, これらからなる三つ組 $(\underline{A}_{/B}, \omega, \iota)$ を *classical* $\mathfrak{c}$*-polarized Hilbert test object of level* N とよぶ.

(2) k を整数とする. f が *classical* $\mathfrak{c}$*-polarized Hilbert modular form of parallel weight* k *and level* N *defined over* R であるとは, 勝手な classical $\mathfrak{c}$-polarized Hilbert test object $(\underline{A}_{/B}, \omega, \iota)$ of level N に値 $f(\underline{A}_{/B}, \omega, \iota) \in B$ をあてがい, 次の三つの条件を満たす rule のことをいう:

(i) 値 $f(\underline{A}_{/B}, \omega, \iota) \in B$ は test object $(\underline{A}_{/B}, \omega, \iota)$ の B-同型の差を除いて定まる;

(ii) 任意の R-algebra の準同型 $\varphi : B \to B'$ に対し,

$$f(\underline{A} \otimes_B B'_{/B'}, \varphi^*(\omega), \iota \otimes_B B') = \varphi(f(\underline{A}_{/B}, \omega, \iota));$$

(iii) 任意の $\lambda \in (O_F \otimes_{\mathbb{Z}} B)^\times$ に対し,

$$f(\underline{A}_{/B}, \lambda\omega, \iota) = \mathrm{Norm}(\lambda)^{-k} f(\underline{A}_{/B}, \omega, \iota).$$

(3) classical $\mathfrak{c}$-polarized Hilbert modular form of parallel weight k and level N defined over R 全体のなす R-module を $\mathbb{M}(R, k, N)$ とかく.

Remark 2.1. "Köcher's principle" により, $\mathbb{Q}$ 上 Definition 1.1 (2) (iv) で要求した "カスプでの正則性" については, F 上においては自動的に満たされることに注意 (cf. [18, (1.2.13)]).

Definition 2.4. $f \in \mathbb{M}(R,k,N)$ に対して, *standard* $\mathfrak{c}$*-polarized Tate object*

$$(\underline{T}_{\mathfrak{c}}(\underline{q})_{/R((\mathfrak{c}^{-1};\Delta))}, \omega_{\mathrm{can}}, \iota_{\mathrm{can}})$$

(この object の定義については [6, Section 5.2] を参照のこと) での値

$$f(q) \in R[\![q^{\nu}|\nu \in (\mathfrak{c}^{-1})^{+}]\!]$$

を f の *q-expansion* とよぶ. ここで, 冪級数環 $R[\![q^{\nu}|\nu \in (\mathfrak{c}^{-1})^{+}]\!]$ の演算は

$$q^0 = 1, \quad q^{\nu}q^{\nu'} = q^{\nu+\nu'} \ (\nu,\ \nu' \in (\mathfrak{c}^{-1})^{+})$$

で与えられる.

Theorem 1.1 と同様に, classical $\mathfrak{c}$-polarized Hilbert modular form に対しても *q-expansion principle* が成立する:

Theorem 2.1 (cf. [18, (1.2.16)])**.** $f \in \mathbb{M}(R,k,N)$ について, もし $f(q) = 0$ であれば $f = 0$.

2.2. p-Adic Hilbert modular forms

ここでは, Goren [6, Section 5.6] の定式化に従う形で Katz's p-adic $\mathfrak{c}$-polarized Hilbert modular form with growth condition の紹介をする.

改めて p を素数として $N \geq 5$ を p と互いに素な整数とする. 1 の原始 N 乗根 ζ_N を一つ固定し,

$$L := \tilde{F}(\zeta_N)$$

とおく. 簡単のため p は L で惰性すると仮定する (もう少し仮定をゆるめて, p が L で不分岐となる状況で以下の理論を同様に展開することができる. 詳細は [5] を参照のこと). とくに, L の整数環 $\mathcal{O}$ の p-進完備化 $\mathcal{O}_p$ は $O_{\tilde{F}}[\zeta_N, \frac{1}{dN}]$-algebra となる. Section 2.1 に入る前の考察に現れた Hasse invariant H の冪 H^m (ここで m は十分大きな整数) を $\mathcal{O}_p$ 上へ持ち上げた classical Hilbert modular form of parallel weight $l := m(p-1)$ を E_l とする. とくに

$$E_l(q) \equiv 1 \pmod{p}$$

であることに注意. この状況のもとで, Section 1.2 と同様に:

Definition 2.5 (cf. [6, Section 5.6.1])**.** (1) $0 \neq r \in \mathcal{O}_p$ を固定する. B を勝手な p-adic $\mathcal{O}_p$-algebra とし, $\underline{A}_{/B}$ を B 上の $\mathfrak{c}$-polarized Hilbert-Blumenthal abelian variety, ω を $\underline{\omega}_{A_{/B}}$ の B-basis, そして

$$\iota : \boldsymbol{\mu}_N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{D}^{-1} \hookrightarrow A[N]$$

を $\underline{A}_{/B}$ 上の arithmetic level $\Gamma_1(N)$-structure とする．さらに $Y \in B$ で

$$YE_l(\underline{A}_{/B}, \omega) = r$$

となるものをとり，四つ組 $(\underline{A}_{/B}, \omega, \iota, Y)$ を *p-adic $\mathfrak{c}$-polarized Hilbert test object of level N with growth condition r* とよぶ．このとき，Y を $(\underline{A}_B, \omega)$ 上の *r-structure* という．

(2) k を整数とする．f が *p-adic $\mathfrak{c}$-polarized Hilbert modular form of weight k and level N with growth condition r defined over $\mathcal{O}_p$* であるとは，勝手な p-adic $\mathfrak{c}$-polarized Hilbert test object $(\underline{A}_{/B}, \omega, \iota, Y)$ of level N with growth condition r に値 $f(\underline{A}_{/B}, \omega, \iota, Y) \in B$ をあてがい，次の三つの条件を満たす rule のことをいう：

(i) 値 $f(\underline{A}_{/B}, \omega, \iota, Y) \in B$ は p-adic $\mathfrak{c}$-polarized Hilbert test object $(\underline{A}_{/B}, \omega, \iota, Y)$ の B-同型の差を除いて定まる；

(ii) 任意の p-adic $\mathcal{O}_p$-algebra の準同型 $\varphi : B \to B'$ に対し，

$$f(\underline{A} \otimes_B B'_{/B'}, \varphi^*(\omega), \iota \otimes_B B', \varphi(Y)) = \varphi(f(\underline{A}_{/B}, \omega, \iota, Y)).$$

ここで，関係式 $YE_l(\underline{A}_{/B}, \omega) = r$ により

$$\varphi(Y)E_l(\underline{A} \otimes_B B'_{/B'}, \varphi^*(\omega)) = r$$

となることから，$\varphi(Y)$ は $(\underline{A} \otimes_B B'_{/B'}, \varphi^*(\omega))$ 上の r-structure であることに注意；

(iii) 任意の $\lambda \in (O_F \otimes_{\mathbb{Z}} B)^\times$ に対し，

$$f(\underline{A}_{/B}, \lambda\omega, \iota, \mathrm{Norm}(\lambda)^l Y) = \mathrm{Norm}(\lambda)^{-k} f(\underline{A}_{/B}, \omega, \iota, Y).$$

ここで，関係式 $YE_l(\underline{A}, \omega) = r$ により

$$(\mathrm{Norm}(\lambda)^l Y)E_l(\underline{A}_{/B}, \lambda\omega) = r$$

となることから，$\mathrm{Norm}(\lambda)^l Y$ は $(\underline{A}_{/B}, \lambda\omega)$ 上の r-structure であることに注意.

(3) p-adic $\mathfrak{c}$-polarized Hilbert modular form f of weight k and level N with growth condition r defined over $\mathcal{O}_p$ 全体のなす $\mathcal{O}_p$-module を $\mathbb{M}(\mathcal{O}_p, k, N; r)$ とかく．

Remark 2.2. Remark 2.1 と同様に "Köcher's principle" により，$\mathbb{Q}$ 上 Definition 1.2 (2) (iv) で要求した "カスプでの正則性" については，F 上においては自動的に満たされるため，三つの条件だけであることに注意 (cf. [6, Proposition 5.6.6(2)]).

Definition 2.6. *standard p-adic $\mathfrak{c}$-polarized Tate object*

$$(\underline{T}_{\mathfrak{c}}(\underline{q})_{/\mathcal{O}_p((\mathfrak{c}^{-1};\Delta))^\wedge}, \omega_{\mathrm{can}}, \iota_{\mathrm{can}}, rE_l(q)^{-1})$$

で $f \in \mathbb{M}(\mathcal{O}_p, k, N; r)$ の値をとったものを

$$f(q) \in \mathcal{O}_p[\![q^\nu | \nu \in (\mathfrak{c}^{-1})^+]\!]$$

とおき, f の *q-expansion* とよぶ.

q-expansion principle (Theorem 2.1) により, Proposition 1.2 と同様に classical $\mathfrak{c}$-polarized Hilbert modular form は自然に p-adic $\mathfrak{c}$-polarized Hilbert modular form with growth condition に包含される:

Proposition 2.2. 任意の $0 \neq r \in \mathcal{O}_p$ に対して, 写像

$$\mathbb{M}(\mathcal{O}_p, k, N) \to \mathbb{M}(\mathcal{O}_p, k, N; r),$$
$$f \mapsto (\tilde{f} : (\underline{A}_{/B}, \omega, \iota, Y) \mapsto f(\underline{A}_{/B}, \omega, \iota))$$

は $\mathcal{O}_p$-module の 単射準同型である.

2.3. **Katz's expansion 及び p-adic Hilbert modular forms à la Serre との関係**

arithmetic level $\Gamma_1(N)$-structure 付きの Hilbert-Blumenthal abelian variety に対する $\mathcal{O}_p$ 上の moduli scheme $M_1(N)_{/\mathcal{O}_p}$ の minimal compactification $M_1^*(N)_{/\mathcal{O}_p}$ 上で, $\underline{\omega}^k$ が very ample になるくらいに整数 k を大きくとっておく. このとき Remark 1.3 と同様に *Base change theorem* が成立する. すなわち, 任意の $\mathcal{O}_p$-module R に対し, 自然な同型

$$H^0(M_1^*(N)_{/R}, \underline{\omega}^k) \cong H^0(M_1^*(N)_{/\mathcal{O}_p}, \underline{\omega}^k) \otimes_{\mathcal{O}_p} R$$

が得られる (cf. [11, Section 4.1.4]).

$a \geq 1$ を整数とする.

$$E_l(q) \equiv 1 \pmod{p}$$

であるから, E_l 倍写像

$$\mathbb{M}(\mathcal{O}_p, k + (a-1)l, N) \to \mathbb{M}(\mathcal{O}_p, k + al, N),$$
$$f \mapsto E_l f$$

は $\mathcal{O}_p$-module の単射準同型であり, Section 1.3 と同様に, ある直和因子

$$\mathbb{A}(\mathcal{O}_p, k, a, N) \subset \mathbb{M}(\mathcal{O}_p, k + al, N)$$

が存在して

$$\mathbb{M}(\mathcal{O}_p, k + al, N) = E_l(\mathbb{M}(\mathcal{O}_p, k + (a-1)l, N)) \oplus \mathbb{A}(\mathcal{O}_p, k, a, N)$$

と直和分解できる. $a = 0$ のときには

$$\mathbb{A}(\mathcal{O}_p, k, 0, N) := \mathbb{M}(\mathcal{O}_p, k, N)$$

と定義すれば, Theorem 1.4 と同様に p-adic $\mathfrak{c}$-polarized Hilbert modular form with growth condition の Katz's expansion が存在することがわかる:

Theorem 2.3 (cf. [6, Propositions 6.7 and 6.8])**.** 任意の $0 \neq r \in \mathcal{O}_p$ に対して, 次の完備な $\mathcal{O}_p$-module の可換図式が得られる:

$$\begin{array}{ccc} 0 \to (E_l - r) \to & (\oplus_{a=0}^{\infty}\mathbb{M}(\mathcal{O}_p, k+al, N))^{\wedge} \xrightarrow{\kappa_r} & \mathbb{M}(\mathcal{O}_p, k, N; r) \to 0 \\ & \bigcup & \| \\ \kappa_r : & (\oplus_{a=0}^{\infty}\mathbb{A}(\mathcal{O}_p, k, a, N))^{\wedge} \xrightarrow{\sim} & \mathbb{M}(\mathcal{O}_p, k, N; r), \end{array}$$

ただし, 第一列目の左側の写像は部分加群を埋め込む自然な injection であり, 写像 κ_r は

$$\kappa_r : \sum_{a=0}^{\infty} b_a \mapsto (\sum_{a=0}^{\infty} \frac{b_a}{E_l^a} r^a : (\underline{A}_{/B}, \omega, \iota, Y) \overset{\mathrm{def}}{\mapsto} \sum_{a=0}^{\infty} b_a(\underline{A}_{/B}, \omega, \iota)Y^a)$$

で定義される $\mathcal{O}_p$-module の準同型である.

とくに, $\mathbb{M}(\mathcal{O}_p, k, N; r)$ は完備な $\mathcal{O}_p$-module である.

Definition 2.7. $\sum_{a=0}^{\infty} b_a \in (\oplus_{a=0}^{\infty}\mathbb{A}(\mathcal{O}_p, k, a, N))^{\wedge}$ を用いて p-adic $\mathfrak{c}$-polarized Hilbert modular form $f \in \mathbb{M}(\mathcal{O}_p, k, N; r)$ を同型写像 κ_r により

$$f = \sum_{a=0}^{\infty} \frac{b_a}{E_l^a} r^a$$

と表したものを f の *Katz's expansion* とよぶ. Katz's expansion は growth condition r のとり方によらず, 統一的に $(\oplus_{a=0}^{\infty}\mathbb{A}(\mathcal{O}_p, k, a, N))^{\wedge}$ の元を用いて展開されることに注意.

Katz's expansion を用いて, Corollary 1.5 や Corollary 1.6 と同様な p-adic $\mathfrak{c}$-polarized Hilbert modular form with growth condition の性質を証明することができる:

Corollary 2.4. $\mathcal{O}_p$ 内で $0 \neq r_2 = rr_1$ という関係があるとき, 次の 完備な $\mathcal{O}_p$-module の単射準同型のなす可換図式が得られる:

$$\begin{array}{ccc} (\oplus_{a=0}^{\infty}\mathbb{A}(\mathcal{O}_p, k, a, N))^{\wedge} & \hookrightarrow & (\oplus_{a=0}^{\infty}\mathbb{A}(\mathcal{O}_p, k, a, N))^{\wedge} \\ \kappa_{r_2} \cong \downarrow & & \kappa_{r_1} \cong \downarrow \\ \mathbb{M}(\mathcal{O}_p, k, N; r_2) & \hookrightarrow & \mathbb{M}(\mathcal{O}_p, k, N; r_1), \\ & & f \mapsto (\tilde{f} : (\underline{A}_{/B}, \omega, \iota, Y) \mapsto f(\underline{A}_{/B}, \omega, \iota, rY)). \end{array}$$

ここで, 一列目の写像は

$$\sum_{a=0}^{\infty} b_a \mapsto \sum_{a=0}^{\infty} r^a b_a$$

で与えられる $\mathcal{O}_p$-module の単射準同型である.

とくに, $r \in \mathcal{O}_p^\times$ であれば, 同型

$$\mathbb{M}(\mathcal{O}_p, k, N; r_2) \xrightarrow{\sim} \mathbb{M}(\mathcal{O}_p, k, N; r_1)$$

を得る. さらに任意の $0 \neq r \in \mathcal{O}_p$ に対して, $\mathcal{O}_p$-module の単射

$$\mathbb{M}(\mathcal{O}_p, k, N; r) \hookrightarrow \mathbb{M}(\mathcal{O}_p, k, N; 1)$$

が得られる.

Corollary 2.5 (cf. [6, Corollary 5.6.10])**.** 任意の $0 \neq r \in \mathcal{O}_p$ をとる. もし $f \in \mathbb{M}(\mathcal{O}_p, k, N; r)$ が $f(q) = 0$ であれば $f = 0$.

さらに, Theorem 1.7 と同様に:

Corollary 2.6 (cf. [6, Theorem 6.12])**.** 形式的冪級数 $f(q) \in \mathcal{O}_p[\![q^\nu | \nu \in (\mathfrak{c}^{-1})^+]\!]$ について, 次の二つの条件は同値:
(i) ある $f \in \mathbb{M}(\mathcal{O}_p, k, N; 1)$ が存在して, f の q-expansion は $f(q)$ で与えられる;
(ii) 任意の整数 $n \geq 1$ に対して, p^{n-1} で割り切れるある整数 $m_n \geq 1$ と $g_n \in \mathbb{M}(\mathcal{O}_p, k + m_n l, N)$ が存在して,

$$f(q) \equiv g_n(q) \pmod{p^n}.$$

Remark 2.3. Andreatta-Goren は [1, Definition 10.8] において, Corollary 2.6 の 条件 (ii) をもって, *p-adic $\mathfrak{c}$-polarized Hilbert modular form à la Serre of weight k and level N* を定義している. その意味で Corollary 2.6 は p-adic $\mathfrak{c}$-polarized Hilbert modular form à la Serre of weight k and level N は Katz's p-adic $\mathfrak{c}$-polarized Hilbert modular form of weight k and level N with growth condition 1 と同一視できることを主張している (cf. [1, Theorem 11.11]).

3. **Appendix**

ここでは, サマースクールでの講演で触れることができなかった Katz の "generalized p-adic modular function" の定義と, Gouvêa により構成された generalized p-adic modular function に付随する Galois 表現について [7] を参考にしながら紹介したい. まず Section 3.1 で Katz [14, Section X] により定式化された generalized p-adic modular function について [7, Section I.3] に沿って概説し, Section 3.2 において [7, Chapter III] に従う形で, Gouvêa による Katz の generalized p-adic modular function に付随する Galois 表現の構成法を紹介する.

3.1. **Generalized p-adic modular functions**

$p \geq 5$ を素数, $N \geq 5$ を p と互いに素な整数, $m \geq 0$ を整数とする.

Definition 3.1 (cf. [14, Section X] and [7, Section I.3.1])**.** (1) A を勝手な p-adic $\mathbb{Z}_p$-algebra とし, $E_{/A}$ を A 上の楕円曲線, φ を E の *trivialization*, すなわち A 上の formal group の同型

$$\varphi : \hat{E} \xrightarrow{\sim} \hat{\mathbb{G}}_{\mathrm{m}},$$

そして $\iota : \boldsymbol{\mu}_{Np^m} \hookrightarrow E[Np^m]$ を E 上の arithmetic level $\Gamma_1(Np^m)$-structure であって ι から誘導される写像

$$\boldsymbol{\mu}_{Np^m} \hookrightarrow \hat{E} \xrightarrow{\sim} \hat{\mathbb{G}}_{\mathrm{m}}$$

が自然な inclusion となるものとする. このとき, 三つ組 $(E_{/A}, \varphi, \iota)$ を A 上の *trivialized elliptic curve with arithmetic level* $\Gamma_1(Np^m)$*-structure* とよぶ. ここで, $\hat{E}$ は E の zero-section に沿った formal completion, $\hat{\mathbb{G}}_{\mathrm{m}}$ は formal multiplicative group を表す.

(2) f が *holomorphic generalized* p*-adic modular function of tame level* N *defined over* $\mathbb{Z}_p$ であるとは, ある整数 $m \geq 0$ を固定したもとで, 勝手な p-adic $\mathbb{Z}_p$-algebra A とその上の trivialized elliptic curve $(E_{/A}, \varphi, \iota)$ with arithmetic level $\Gamma_1(Np^m)$-structure に値 $f(E_{/A}, \varphi, \iota) \in A$ をあてがい, 次の三つの条件を満たす rule のことをいう:

(i) 値 $f(E_{/A}, \varphi, \iota) \in A$ は trivialized elliptic curve $(E_{/A}, \varphi, \iota)$ の A-同型の差を除いて定まる;

(ii) 任意の p-adic $\mathbb{Z}_p$-algebra の準同型 $\psi : A \to A'$ に対し,

$$f(E \otimes_A A'_{/A'}, \varphi \otimes_A A', \iota \otimes_A A') = \psi(f(E_{/A}, \varphi, \iota));$$

(iii) (カスプでの正則性) $\mathbb{Z}_p((q))^\wedge$ 上定義された trivialized Tate curve $(\mathrm{Tate}(q)_{/\mathbb{Z}_p((q))^\wedge}, \varphi_{\mathrm{can}}, \iota_{\mathrm{can}})$ に対し,

$$f(q) := f(\mathrm{Tate}(q)_{/\mathbb{Z}_p((q))^\wedge}, \varphi_{\mathrm{can}}, \iota_{\mathrm{can}}) \in \mathbb{Z}_p[\![q]\!]$$

となる. この値を f の q*-expansion* とよぶ. ここで,

$$\varphi_{\mathrm{can}} : \mathrm{Tate}(q)^\wedge \xrightarrow{\sim} \hat{\mathbb{G}}_{\mathrm{m}}$$

は $\mathrm{Tate}(q)$ が $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ の商として与えられることに由来する $\mathrm{Tate}(q)$ 上の標準的な trivialization. さらに, f の q-expansion について

$$f(q) \in q\mathbb{Z}_p[\![q]\!]$$

となるとき, f を *generalized* p*-adic cuspidal modular function* であるという.

(3) holomorphic generalized p-adic modular function f of tame level N defined over $\mathbb{Z}_p$ 全体のなす $\mathbb{Z}_p$-module を $\boldsymbol{M}(\mathbb{Z}_p, N)$ とかく. また generalized p-adic cuspidal modular function からなる $\boldsymbol{M}(\mathbb{Z}_p, N)$ の $\mathbb{Z}_p$-submodule を $\boldsymbol{S}(\mathbb{Z}_p, N)$ とかくことにする.

Remark 3.1. (1) holomorphic generalized p-adic modular function を定義する際に, test object として trivialization

$$\varphi : \hat{E} \xrightarrow{\sim} \hat{\mathbb{G}}_{\mathrm{m}}$$

と可換な arithmetic level $\Gamma_1(Np^m)$-structure を用いていることから, Definition 3.1 (2) は固定した整数 $m \geq 0$ に依存しないことがわかる. 付随する level について "tame level N" と称するのはそのためである.

(2) 整数 $m \geq 1$ について, arithmetic level $\Gamma_1(Np^m)$-structure

$$\boldsymbol{\mu}_{Np^m} \hookrightarrow E[Np^m]$$

付きの楕円曲線 E に対する $\mathbb{Z}_p$ 上の moduli scheme $M^{\mathrm{arith}}(Np^m)_{/\mathbb{Z}_p}$ は, Katz-Mazur [19] により定義された level $\Gamma_1(Np^m)$-structure 付きの楕円曲線に対する moduli scheme $M_1(Np^m)_{/\mathbb{Z}_p}$ の open subscheme となっており, $M^{\mathrm{arith}}(Np^m)_{/\mathbb{Z}_p}$ に cusp を付け加えることで得られる scheme $M(Np^m)_{/\mathbb{Z}_p}$ は $M_1(Np^m)_{/\mathbb{Z}_p}$ の minimal compactification $M_1^*(Np^m)_{/\mathbb{Z}_p}$ に affine open subscheme として包含される. ここで, 整数 $n \geq 0$ に対し affine scheme

$$M(Np^m)_{/\mathbb{Z}_p} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$$

の座標環を $\boldsymbol{M}_{n,m}$ とおく.

一方 $m = 0$ の時は, $M_1^*(N)_{/\mathbb{Z}_p} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ から supersingular point を除くことで得られる affine scheme の座標環として $\boldsymbol{M}_{n,0}$ を定義することで, holomorphic generalized p-adic modular function のなす $\mathbb{Z}_p$-module $\boldsymbol{M}(\mathbb{Z}_p, N)$ を

$$\boldsymbol{M}(\mathbb{Z}_p, N) = \varprojlim_n \varinjlim_m \boldsymbol{M}_{n,m}$$

と幾何的に定式化することができる (cf. [7, Section I.3.1]).

holomorphic generalized p-adic modular function に対しても q-expansion principle は成立する:

Theorem 3.1 (cf. [7, Theorem I.3.1])**.** $f \in \boldsymbol{M}(\mathbb{Z}_p, N)$ について, $f(q) = 0$ であれば $f = 0$.

ここで, classical modular form と holomorphic generalized p-adic modular function の関係について考察したい.

k を整数とする. Section 1 では, p と互いに素な level をもつ classical modular form を扱ったが, ここでは $m \geq 0$ を固定し, Definition 1.1 と同様に, arithmetic level $\Gamma_1(Np^m)$-structure

$$\iota : \boldsymbol{\mu}_{Np^m} \hookrightarrow E[Np^m]$$

をもつ classical test object $(E_{/A}, \omega, \iota)$ を用いて定義される classical modular form of weight k and level Np^m defined over $\mathbb{Z}_p$ のなす $\mathbb{Z}_p$-module $M(\mathbb{Z}_p, k, Np^m)$ を扱う. さらに $f \in M(\mathbb{Z}_p, k, Np^m)$ について,

その q-expansion が

$$f(q) \in q\mathbb{Z}_p[\![q]\!]$$

となるものを *cusp form* といい, それらのなす $M(\mathbb{Z}_p, k, Np^m)$ s の $\mathbb{Z}_p$-submodule を $S(\mathbb{Z}_p, k, Np^m)$ とかく.

p-adic $\mathbb{Z}_p$-algebra A 上の trivialized elliptic curve $(E_{/A}, \varphi, \iota)$ with arithmetic level $\Gamma_1(Np^m)$-structure から, $\hat{\mathbb{G}}_{\mathrm{m}}$ 上の標準的な不変微分形式 $\frac{dt}{1+t}$ を φ で引き戻し E 上に延長した不変微分形式 $\varphi^*(\frac{dt}{1+t})$ が得られる. このことから, $\mathbb{Z}_p$-module の準同型

$$\phi_k : M(\mathbb{Z}_p, k, Np^m) \to \boldsymbol{M}(\mathbb{Z}_p, N)$$

$$f \mapsto ((E_{/A}, \varphi, \iota) \mapsto f(E_{/A}, \varphi^*(\frac{dt}{1+t}), \iota))$$

が定義され, q-expansion principle (Theorem 1.1) により $\mathbb{Z}_p$-module の自然な単射準同型のなす可換図式

$$\begin{array}{rcl} \phi := \oplus_{k=0}^{\infty}\phi_k : \oplus_{k=0}^{\infty} M(\mathbb{Z}_p, k, Np^m) & \hookrightarrow & \boldsymbol{M}(\mathbb{Z}_p, N) \\ \bigcup & & \bigcup \\ \oplus_{k=0}^{\infty} S(\mathbb{Z}_p, k, Np^m) & \hookrightarrow & \boldsymbol{S}(\mathbb{Z}_p, N) \end{array}$$

を得る.

Definition 3.2. $\mathbb{Q}_p$ を $\mathbb{Z}_p$ の商体 (p-進数体) とし, $k \geq 0$ を整数とする.

$$M_k(\mathbb{Z}_p, Np^m) := \{\sum_{j=0}^{k} f_j \in \oplus_{j=0}^{k} M(\mathbb{Q}_p, j, Np^m) | \sum_{j=0}^{k} f_j(q) \in \mathbb{Z}_p[\![q]\!]\}$$

を *module of divided congruences of weight* k *and level* Np^m *defined over* $\mathbb{Z}_p$ とよび,

$$M(\mathbb{Z}_p, Np^m) := \varinjlim_k M_k(\mathbb{Z}_p, Np^m)$$

を *ring of divided congruences of level* Np^m *defined over* $\mathbb{Z}_p$ とよぶ. cusp form に対しても同様に,

$$S_k(\mathbb{Z}_p, Np^m) := \{f \in \oplus_{j=0}^{k} S(\mathbb{Q}_p, j, Np^m) | f(q) \in \mathbb{Z}_p[\![q]\!]\}$$

と

$$S(\mathbb{Z}_p, Np^m) := \varinjlim_k S_k(\mathbb{Z}_p, Np^m)$$

を定義する.

$f \in M(\mathbb{Z}_p, Np^m)$ に対し, 適当な整数 $k \geq 0$ と $n \geq 1$ をとれば

$$p^n f \in \oplus_{j=0}^{k} M(\mathbb{Z}_p, j, Np^m)$$

であり, $\phi(p^n f) \in \boldsymbol{M}(\mathbb{Z}_p, N)$ となる. したがって, q-expansion principle (Theorem 3.1) により, $\tilde{f} \in \boldsymbol{M}(\mathbb{Z}_p, N)$ で

$$\tilde{f}(q) = f(q)$$

となるものがただ一つ存在し, このことから $\mathbb{Z}_p$-module の自然な単射準同型のなす可換図式

$$\begin{array}{ccc} \alpha : M(\mathbb{Z}_p, N) & \hookrightarrow & \boldsymbol{M}(\mathbb{Z}_p, N) \\ \bigcup & & \bigcup \\ \beta : S(\mathbb{Z}_p, N) & \hookrightarrow & \boldsymbol{S}(\mathbb{Z}_p, N) \end{array}$$

が得られる.

次の定理は, classical modular form が holomorphic generalized p-adic modular function のなす空間において p-進位相の意味で dense であることを主張するものであり "Katz's density" とよばれる. この定理は Section 3.2 で Galois 表現を構成する際に本質的な役割を果たす:

Theorem 3.2 (cf. [13, Theorem 2.2], [7, Propositions I.3.7 and I.3.9])**.** 上の可換図式において, α と β の像はそれぞれ $\boldsymbol{M}(\mathbb{Z}_p, N)$ と $\boldsymbol{S}(\mathbb{Z}_p, N)$ において p-進位相の意味で dense である.

Remark 3.2. $N \geq 5$ を p と互いに素な整数, k を整数とする. Definition 1.2 で定義された p-adic modular form with growth condition と holomorphic generalized p-adic modular function は, $\mathbb{Z}_p$-module の自然な単射準同型

$$\begin{aligned} M(\mathbb{Z}_p, k, N; 1) &\hookrightarrow \boldsymbol{M}(\mathbb{Z}_p, N) \\ f &\mapsto ((E_{/A}, \varphi, \iota) \mapsto \\ &\qquad f(E_{/A}, \varphi^*(\frac{dt}{1+t}), \iota, E_{p-1}(E_{/A}, \varphi^*(\frac{dt}{1+t}))^{-1})) \end{aligned}$$

で関係付けられる. ここの ι は arithmetic level $\Gamma_1(N)$-structure を用いている.

3.2. **Galois 表現**

まず, holomorphic generalized p-adic modular function に付随する Galois 表現の構成を述べる前に, それらに作用する Hecke algebra について考察する.

$p \geq 5$ を素数, $N \geq 5$ を p と互いに素な整数とする.

$$G(N) := \mathbb{Z}_p^\times \times (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$$

とおく. $(x, y) \in G(N), f \in \boldsymbol{M}(\mathbb{Z}_p, N)$ そして trivialized elliptic curve $(E_{/A}, \varphi, \iota)$ with arithmetic level $\Gamma_1(N)$-structure に対して

$$(\langle x, y\rangle f)(E_{/A}, \varphi, \iota) := f(E_{/A}, x^{-1}\varphi, y\iota)$$

と定義することで, $G(N)$ の $\boldsymbol{M}(\mathbb{Z}_p, N)$ 上への作用が定まる. この作用素 $\langle x, y\rangle$ を *diamond operator* とよぶ. ここで, $x^{-1}\varphi$ は φ から誘導される E 上の互いに compatible な arithmetic level $\Gamma_1(p^m)$-structure $(m \geq 1)$ の列に $x^{-1} \in \mathbb{Z}_p^\times$ の作用を施して得られる trivialization, $y\iota$ は $\boldsymbol{\mu}_N$ 上の $y \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ の自然な作用から誘導される E 上の arithmetic level $\Gamma_1(N)$-structure である.

整数 $m \geq 0$ を固定する. 整数 $k \geq 0$ に対して,

$$M'_k(\mathbb{Z}_p, Np^m) := \{f \in \oplus_{j=1}^k M(\mathbb{Q}_p, j, Np^m) | f(q) \in \mathbb{Z}_p[\![q]\!]\}$$

とおき,

$$M'(\mathbb{Z}_p, Np^m) := \varinjlim_k M'_k(\mathbb{Z}_p, Np^m)$$

と定義すれば,

$$1 = \lim_{n\to\infty} E_{p-1}^{p^n}$$

であることから, Theorem 3.2 により $M'(\mathbb{Z}_p, Np^m)$ も $\boldsymbol{M}(\mathbb{Z}_p, N)$ において dense となる.

以下, $m \geq 1$ と仮定する. l を Np を割らない素数, q を Np の素因数とする. $T_l^{(j)}$ と $U_q^{(j)}$ をそれぞれ素数 l と q に対する classical modular form $M(\mathbb{Q}_p, j, Np^m)$ に作用する Hecke operator とし, module of divided congruences $M'_k(\mathbb{Z}_p, Np^m)$ 上の Hecke operator を

$$T_l := \oplus_{j=1}^k T_l^{(j)}, \quad U_q := \oplus_{j=1}^k U_q^{(j)}$$

と定義する (classical modular form 上の Hecke operator の定義については [12, Section 1.11] や [7, Section II.1] を参照のこと). 一方で, 自然な単射

$$M'_k(\mathbb{Z}_p, Np^m) \hookrightarrow \boldsymbol{M}(\mathbb{Z}_p, N)$$

により $\boldsymbol{M}(\mathbb{Z}_p, N)$ 上の daimond operator を $M'_k(\mathbb{Z}_p, Np^m)$ に誘導しておき, $M'_k(\mathbb{Z}_p, Np^m)$ 上の Hecke algebra $\mathcal{T}'_k$ を $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}_p}(M'_k(\mathbb{Z}_p, Np^m))$ 内で T_l $(l \nmid Np)$ と U_q $(q \mid Np)$ そして diamond operator で生成された $\mathbb{Z}_p$-subalgebra として定義する. さらに, この生成系のうち U_q $(q \mid Np)$ を取り除いて生成した $\mathbb{Z}_p$-subalgebra $\mathcal{T}'^{\star}_k$ を *restricted Hecke algebra* とよぶ.

$j < k$ に対して, 制限写像

$$\mathcal{T}'_k \to \mathcal{T}'_j, \quad \mathcal{T}'^{\star}_k \to \mathcal{T}'^{\star}_j$$

が生じ, それらの射影極限として得られる $M'(\mathbb{Z}_p, Np^m)$ 上の Hecke algebra

$$\boldsymbol{T} := \varprojlim_k \mathcal{T}'_k, \quad \boldsymbol{T}^{\star} := \varprojlim_k \mathcal{T}'^{\star}_k$$

は p-adic $\mathbb{Z}_p$-algebra であり, その作用を q-expansion を通して $\mathbb{Z}_p[\![q]\!]$ 上に誘導すれば q-expansion での位相に関して一様連続となる.

Theorem 3.2 により $M'(\mathbb{Z}_p, Np^m)$ は $\boldsymbol{M}(\mathbb{Z}_p, N)$ において dense であるから, $\boldsymbol{T}$ と $\boldsymbol{T}^\star$ の作用は自然に $\boldsymbol{M}(\mathbb{Z}_p, N)$ 上に延長される. そのように定義された Hecke algebra と restricted Hecke algebra をそれぞれ $\boldsymbol{T}(\mathbb{Z}_p, N)$ と $\boldsymbol{T}^\star(\mathbb{Z}_p, N)$ とかくことにする. 同様に, cusp form のなす空間 $\boldsymbol{S}(\mathbb{Z}_p, N)$ 上の Hecke algebra $\boldsymbol{T}_0(\mathbb{Z}_p, N)$ と restricted Hecke algebra $\boldsymbol{T}_0^\star(\mathbb{Z}_p, N)$ を定義する. これらの Hecke algebra は射影極限の位相に関して compact であることに注意.

classical cusp form $S(\mathbb{Z}_p, k, Np^m)$ とそれに作用する Hecke algebra $\mathcal{T}_0(\mathbb{Z}_p, k, Np^m)$ に対して "duality theoerm" が成立する, すなわち cusp form f の q-expansion

$$f(q) = \sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n(f) q^n \in q\mathbb{Z}_p[\![q]\!]$$

における q の係数 $a_1(f)$ を用いて得られる pairing

$$\mathcal{T}_0(\mathbb{Z}_p, k, Np^m) \times S(\mathbb{Z}_p, k, Np^m) \to \mathbb{Z}_p,$$
$$(T, f) \mapsto a_1(f|T)$$

が非退化であることから (cf. [9, Theorem 5.3.1]), Theorem 3.2 により

Theorem 3.3 (cf. [7, Corollary III.1.3]). 次の $\mathbb{Z}_p$-module の同型が得られる:

$$\boldsymbol{S}(\mathbb{Z}_p, N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}.\mathbb{Z}_p\text{-mod}}(\boldsymbol{T}_0(\mathbb{Z}_p, N), \mathbb{Z}_p)$$
$$f \mapsto (\phi_f : T \mapsto a_1(f|T)).$$

ここで "cont.$\mathbb{Z}_p$-mod" は連続な $\mathbb{Z}_p$-module の準同型を表す.

さらに, この同型において ϕ_f が $\mathbb{Z}_p$-algebra の準同型となることと f が *normalized* な *eigenfunction*, つまり $a_1(f) = 1$ であるような Hecke algebra $\boldsymbol{T}_0(\mathbb{Z}_p, N)$ 内の Hecke operator 全てに対する同時固有関数であることが同値である. このとき, $a_1(f|T)$ は f の Hecke operator T に対する固有値と一致する.

以下, Gouvêa [7, Section III] により構成された generalized p-adic cuspidal eigenfunction f of tame level N defined over $\mathbb{Z}_p$ に付随する Galois 表現 ρ_f について概説する. "f に付随する" という言葉は Galois 表現

$$\rho_f : G_S \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$$

が Np を割らない全ての素数 l に対して

$$\mathrm{Trace}(\rho_f(\mathrm{Frob}_l)) = a_1(f|T_l)$$

を満たすことを意味する. ここで, S は Np の素因数と無限素点 ∞ からなる有理素点の有限集合, G_S は S の外不分岐な $\mathbb{Q}$ 上の最大 Galois

拡大の Galois 群, そして $\mathrm{Frob}_l \in G_S$ は素数 l における Frobenius 元を表す.

これまで通り, $p \geq 5$ を素数とし, $N \geq 5$ を p と互いに素な整数とする. $k \geq 0$ を整数とし, $\mathcal{T}_0^\star(\mathbb{Z}_p, k, Np)$ を classical cusp form のなす空間 $S(\mathbb{Z}_p, k, Np)$ 上に作用する restricted Hecke algebra とすれば, $\boldsymbol{T}_0^\star(\mathbb{Z}_p, N)$ の定義により

$$\boldsymbol{T}_0^\star(\mathbb{Z}_p, N) = \varprojlim_k \mathcal{T}_0^\star(\mathbb{Z}_p, k, Np)$$

となる.

$f \in \boldsymbol{S}(\mathbb{Z}_p, N)$ を normalized な generalized p-adic cuspidal eigenfunction とする. Theorem 3.3 により, 連続な $\mathbb{Z}_p$-algebra の準同型

$$\phi_f : \boldsymbol{T}_0^\star(\mathbb{Z}_p, N) \to \mathbb{Z}_p$$

で, Hecke operator $T \in \boldsymbol{T}_0^\star(\mathbb{Z}_p, N)$ に対し

$$\phi_f(T) = a_1(f|T)$$

となるものが存在する. ϕ_f と mod p する写像 $\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の合成を

$$\bar{\phi}_f : \boldsymbol{T}_0^\star(\mathbb{Z}_p, N) \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

とおけば, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ には離散位相が入っており $\boldsymbol{T}_0^\star(\mathbb{Z}_p, N)$ には射影極限の位相を入れているので, ある整数 $k \geq 2$ が存在して, 全ての整数 $j \geq k$ について $\bar{\phi}_f$ は $\mathcal{T}_0^\star(\mathbb{Z}_p, j, Np)$ を経由する. その写像を

$$\bar{\phi}_j : \mathcal{T}_0^\star(\mathbb{Z}_p, j, Np) \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

とおけば, 連続な Galois 表現

$$\bar{\rho}_f : G_S \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

で, Np を割らない全ての素数 l に対し

$$\mathrm{Trace}(\bar{\rho}_f(\mathrm{Frob}_l)) = \bar{\phi}_j(T_l^{(j)})$$

を満たすものが存在する (cf. [10, Theorem 3.26]). この Trace の値は $j \geq k$ に依存せず, f の Hecke operator に対する固有値を mod p したものから定まることに注意. つまり, $\bar{\rho}_f$ は f に付随する mod p Galois 表現である. 以下, $\bar{\rho}_f$ は絶対既約であると仮定する.

$$\mathfrak{m}_f := \ker \bar{\phi}_f, \qquad \mathfrak{m}_j := \ker \bar{\phi}_j \ (j \geq k)$$

とおけば, $\mathfrak{m}_f$ と $\mathfrak{m}_j$ はそれぞれ $\boldsymbol{T}_0^\star(\mathbb{Z}_p, N)$ と $\mathcal{T}_0^\star(\mathbb{Z}_p, j, Np)$ の極大 ideal であり, [7, Lemma III.4.9] により

$$\boldsymbol{T}_0^\star(\mathbb{Z}_p, N)^\wedge_{\mathfrak{m}_f} = \varprojlim_{j \geq k} \mathcal{T}_0^\star(\mathbb{Z}_p, j, Np)_{\mathfrak{m}_j}$$

となる. 一方で classical modular form の “newform” の理論 (cf. [21, Section 4.6]) により, $j \geq k$ について $\mathcal{T}_0^\star(\mathbb{Z}_p, j, Np)_{\mathfrak{m}_j}$ は $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ を剰余

体とする有限個の p-adic な離散付値環 $\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_r$ の直積の部分環とみなせる:

$$\mathcal{T}_0^\star(\mathbb{Z}_p, j, Np)_{\mathfrak{m}_j} \hookrightarrow \prod_{i=1}^{r} \mathcal{O}_i.$$

この injection を各 $\mathcal{O}_i$ ごとに射影して得られる $\mathbb{Z}_p$-algebra の準同型

$$\phi_i : \mathcal{T}_0^\star(\mathbb{Z}_p, j, Np)_{\mathfrak{m}_j} \to \mathcal{O}_i$$

に対して, 連続で既約な Galois 表現

$$\rho_{j,i} : G_S \to \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_i)$$

で, Np を割らない全ての素数 l に対し

$$\mathrm{Trace}(\rho_{j,i}(\mathrm{Frob}_l)) = \phi_i(T_l^{(j)})$$

を満たすものが存在する (cf. [10, Theorem 3.26]). "Chebotarev's density theorem" (cf. [9, Theorem 1.3.1]) により, これらの Galois 表現の直積

$$\rho_j := \prod_{i=1}^{r} \rho_{j,i} : G_S \to \mathrm{GL}_2(\prod_{i=1}^{r} \mathcal{O}_i)$$

の Trace の値は部分環である $\mathcal{T}_0^\star(\mathbb{Z}_p, j, Np)_{\mathfrak{m}_j}$ に含まれることがわかる.

$$\bar{\phi}_j \circ \mathrm{Trace}(\rho_j) = \mathrm{Trace}(\bar{\rho}_f)$$

であり $\bar{\rho}_f$ は絶対既約であると仮定しているので, Galois 表現 ρ_j は

$$\rho_j : G_S \to \mathrm{GL}_2(\mathcal{T}_0^\star(\mathbb{Z}_p, j, Np)_{\mathfrak{m}_j})$$

を経由することがわかる (cf. [3, Théorème 2]). この Galois 表現の $j \geq k$ に関する射影極限をとることで, 次の定理が得られる:

Theorem 3.4 (cf. [7, Theorem III.5.6]). $f \in \boldsymbol{S}(\mathbb{Z}_p, N)$ を normalized な generalized p-adic cuspidal eigenfunction とする. f に付随する mod p Galois 表現

$$\bar{\rho}_f : G_S \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

は絶対既約であると仮定する. このとき,

$$\boldsymbol{T}(\bar{\rho}_f, N) := \boldsymbol{T}_0^\star(\mathbb{Z}_p, N)^\wedge_{\mathfrak{m}_f}$$

とおけば, Galois 表現

$$\boldsymbol{\rho}^{\mathrm{mod}} : G_S \to \mathrm{GL}_2(\boldsymbol{T}(\bar{\rho}_f, N))$$

で, Np を割らない全ての素数 l に対して

$$\mathrm{Trace}(\boldsymbol{\rho}^{\mathrm{mod}}(\mathrm{Frob}_l)) = T_l$$

を満たし, 剰余体への reduction map $\boldsymbol{T}(\bar{\rho}_f, N) \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ との合成が $\bar{\rho}_f$ と同値となるものが存在する.

とくに, Theorem 3.3 により f に対して生ずる $\mathbb{Z}_p$-algebra の準同型 ϕ_f から自然に誘導される準同型

$$\phi_f : \boldsymbol{T}(\bar{\rho}_f, N) \to \mathbb{Z}_p$$

との合成

$$\rho_f := \phi_f \circ \boldsymbol{\rho}^{\mathrm{mod}} : G_S \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$$

は, Np を割らない全ての素数 l に対して

$$\mathrm{Trace}(\rho_f(\mathrm{Frob}_l)) = a_1(f|T_l)$$

を満たすことがわかり, f に付随する Galois 表現となっている.

Remark 3.3. Theorem 3.4 の状況で, A を剰余体が $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ である p-adic な Noether 局所環 として Galois 表現

$$\rho : G_S \to \mathrm{GL}_2(A)$$

で reduction map $A \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ との合成が $\bar{\rho}_f$ と同値であるものを考える. このような ρ の A-同値類を $\bar{\rho}_f$ の A への *deformation* といい, Mazur [20] により *universal deformation ring* $\boldsymbol{R}(\bar{\rho}_f, S)$ とそれへの *universal deformation*

$$\boldsymbol{\rho}^{\mathrm{univ}} : G_S \to \mathrm{GL}_2(\boldsymbol{R}(\bar{\rho}_f, S))$$

が構成された. ここで "universal" という言葉は, $\bar{\rho}_f$ の勝手な deformation

$$\rho : G_S \to \mathrm{GL}_2(A)$$

に対して, p-adic $\mathbb{Z}_p$-algebra の準同型

$$\varphi : \boldsymbol{R}(\bar{\rho}_f, S) \to A$$

で $\varphi \circ \boldsymbol{\rho}^{\mathrm{univ}}$ が ρ と同値となるものがただ一つ存在することを意味する.

Theorem 3.4 により p-adic $\mathbb{Z}_p$-algebra の準同型

$$\boldsymbol{R}(\bar{\rho}_f, S) \to \boldsymbol{T}(\bar{\rho}_f, N)$$

で, $\boldsymbol{\rho}^{\mathrm{univ}}$ との合成が $\boldsymbol{\rho}^{\mathrm{mod}}$ と同値となるものが存在することになるが, Gouvêa はこの準同型が同型である, すなわち "$\bar{\rho}_f$ の勝手な deformation は必ず generalized p-adic cuspidal eigenfunction に付随する" と予想した ([7, Question III.5]). この予想は Gouvêa-Mazur [8] や Böckle [2], そして筆者 [26], [27] によって部分的に解決されている.

この予想を, 総実代数体上の Hilbert modular form の場合に定式化し解決を試みることは, 非常に興味深い問題である.

References

[1] F. Andreatta and E.Z. Goren, Hilbert modular forms: mod p and p-adic aspects, Mem. Amer. Math. Soc. **175** (2005), no. **819**, vi+ 100 pp.

[2] G. Böckle, On the density of modular points in universal deformation spaces, *Amer. J. of Math.* **123** (2001), 985-1007.

[3] H. Carayol, Formes modulaires et représentations Galoisiennes à valeurs dans un anneau local complet, pp. 213-237, *in* "p-adic Monodromy and the Birch-Swinnerton-Dyer Conjecture" (B. Mazur and G. Stevens, Eds.), Contemporary Math., Vol **165**, Amer. Math. Soc., 1994.

[4] C.-L. Chai, Arithmetic minimal compactification of the Hilbert-Blumenthal moduli spaces, Appendix to "The Iwasawa conjecture for totally real fields" by A. Wiles, *Ann. of Math.* **131** (1990), 541-554.

[5] E.Z. Goren, Hasse invariants for Hilbert modular varieties, *Israel J. of Math.* **122** (2001), 157-174.

[6] E.Z. Goren, "Lectures on Hilbert Modular Varieties and Modular Forms," CRM Monograph Series, Vol. **14**, American Mathematical Society, 2002.

[7] F.Q. Gouvêa, "Arithmetic of p-adic Modular Forms," Lecture Notes in Math., vol. **1304**, Springer-Verlag, Berlin and Heidelberg, 1988.

[8] F.Q. Gouvêa and B. Mazur, On the density of modular representations, pp. 127-142, *in* "Computational perspective on number theory," AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, vol **7**, Amer. Math. Soc. and International Press, 1998.

[9] H. Hida, "Elementary Theory of L-functions and Eisenstein Series," London Mathematical Society Student Texts **26**, Cambridge University Press, 1993.

[10] H. Hida, "Modular Forms and Galois Cohomology," Cambridge Studies in Advanced Mathematics **69**, Cambridge University Press, 2000.

[11] H. Hida, "p-Adic Automorphic Forms on Shimura Varieties," Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, NewYork, LLC, 2004.

[12] N.M. Katz, p-adic properties of modular schemes and modular forms, *in* "Modular Functions of One Variable III," Lecture Notes in Math., vol. **350**, pp. 69-190, Springer-Verlag, Berlin, 1973.

[13] N.M. Katz, Higher congruences between modular forms, *Ann. of Math.* **101** (1975), 332-367.

[14] N.M. Katz, p-adic L-functions via moduli of elliptic curves, *in* "Algebraic Geometry: Arcata 1974," Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. **29**, pp. 479-506, American Mathematical Society, 1975.

[15] N.M. Katz, p-adic interpolation of real analytic Eisenstein series, *Ann. of Math.* **104** (1976), 459-571.

[16] N.M. Katz, The Eisenstein measure and p-adic interpolation, *Amer. J. of Math.* **99** (1977), 238-311.

[17] N.M. Katz, A result on modular forms in characteristic p, *in* "Modular Functions of One Variable V," Lecture Notes in Math., vol. **601**, pp. 53-61, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[18] N.M. Katz, p-adic L-functions for CM fields, *Invent. Math.* **49** (1978), 199-297.

[19] N.M. Katz and B. Mazur, "Arithmetic Moduli of Elliptic Curves," Annals of Mathematics Studies, vol. **108**, Princeton University Press, 1985.

[20] B. Mazur, Deforming Galois representations, pp. 385-437, *in* "Galois Groups over $\mathbb{Q}$" (Y. Ihara, K. Ribet and J.-P. Serre, Eds.), Springer-Verlag Berlin, Ner York, 1989.

[21] T. Miyake, "Modular Forms," Springer-Verlag, 1989.

[22] M. Rapoport, Compactifications de l'espace de modules de Hilbert-Blumenthal, *Comp. Math.* **36** (1978), 255-335.

[23] J.-P. Serre, "A Course in Arithmetic," Springer-Verlag, 1973.

[24] J.-P. Serre, Formes modulaires et founctions zeta p-adiques, *in* "Modular Functions of One Variable III," Lecture Notes in Math., vol. **350**, pp. 191-268, Springer-Verlag, Berlin, 1973.

[25] L.C. Washington, "Introduction to Cyclotomic Fields," Second Edition, Graduate Texts in Math. **83**, Springer-Verlag, NewYork, 1997.

[26] A. Yamagami, On Gouvêa's conjecture on controlling the conductor, *J. Number Theory* **94** (2002), 90-102.

[27] A. Yamagami, On Gouvêa's conjecture in the unobstructed case, *J. Number Theory* **99** (2003), 120-138.

Department of Mathematics, Kyoto University, Kyoto, 606-8502, Japan

E-mail address: yamagami@math.kyoto-u.ac.jp