Hilbert 保型形式の場合の Eisenstein 級数についての解説

山内淳生

1 Eisenstein 級数の構成

この稿は、主に [1] の第 4 章の要約である。
総実代数体 F について（$[F:\mathbb{Q}]=n$ ）、

$$\mathrm{GL}^{+}(2,F)=\{\gamma\in\mathrm{GL}(2,F)\,|\det(\gamma)>>0\}$$

なる群を考える。（ここで、$>>0$ は、総正を意味する。）このとき、当然 $\mathrm{GL}^{+}(2,F)\supset\mathrm{SL}(2,F)$ であり、$\mathrm{GL}^{+}(2,F)$ は Hilbert 上半空間

$$\mathfrak{H}^{n}=\{z=(z_1,z_2,\ldots,z_n)\in\mathbb{C}^{n}\,|\mathrm{Im}(z_i)>0\quad \text{for any } 1\le i\le n\}$$

に componentwise に作用する。つまり、$\alpha=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in\mathrm{GL}^{+}(2,F)$ と、$z=(z_1,z_2,\ldots,z_n)$ について、

$$\alpha(z)=\big((a_1z_1+b_1)(c_1z_1+d_1)^{-1},\ldots,(a_nz_n+b_n)(c_nz_n+d_n)^{-1}\big)$$

ここで、$a_i,b_i,c_i,d_i,\ (1\le i\le n)$ は、a,b,c,d の i 番目の共役（F の $\mathbb{R}$ への埋め込みを 1 番目から n 番目まで固定する）である。保型因子は、

$$j_i(\alpha,z)=c_iz_i+d_i\qquad(1\le i\le n),$$

となる。また、$\mathfrak{H}^{n}$ 上の任意の（スカラー値）関数 f と $k=(k_1,\ldots,k_n)\in\mathbb{Z}^{\mathbf{a}}$ と $\alpha\in\mathrm{GL}^{+}(2,F)$ について、$f|_k\alpha$ なる $\mathfrak{H}^{n}$ 上の関数を、

$$(f|_k\alpha)(z)=f(\alpha(z))\prod_{i=1}^{n}j_i(\alpha,z)^{-k_i},$$

と定義すると、$|_k\alpha$ は、$\mathrm{GL}^+(2,F)$ の作用となっている。(つまり、$(f|_k\alpha_1)|_k\alpha_2 = f|_k(\alpha_1\alpha_2)$.)

さて、次のような parabolic subgroup P を自然に定義できる。

$$\mathrm{P}(F) = \left\{ \gamma \in \mathrm{GL}(2,F) \,\middle|\, \gamma = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \right\},$$

そして、これについての Eisenstein 級数を、重さ $k=(k_1,\ldots,k_n) \in (2\mathbb{Z})^n$ の場合、

$$E(z,s;k,\Gamma) = \sum_{\gamma \in (\mathrm{P}(F)\cap\Gamma)\backslash\Gamma} \prod_{i=1}^{n} \left(\mathrm{Im}(z_i)^{s-k_i/2} j_i(\gamma,z)^{-k_i} \left| j_i(\gamma,z) \right|^{-2s+k_i} \right),$$

と、定義することができる。なお、Γ は、$\mathrm{SL}(2,F)$ の合同部分群である。(この Γ が充分小さい場合、任意の $k \in \mathbb{Z}^n$ について定義できる。) この級数は、$\mathrm{Re}(s) > 1$ で局所一様絶対収束する。また、定義より当然、

$$E(z,s;k,\Gamma)|_k\gamma = E(z,s;k,\Gamma),$$

が、すべての $\gamma \in \Gamma$ に対して成り立つ。この Eisenstein 級数は、重さが、$k = (\kappa,\kappa,\ldots,\kappa)$ という(いわゆる parallel weight)場合で、$s = \kappa/2$ の時(つまり $\kappa \geq 3$)は、正則保型形式となる。一般の重さ $k = (k_1,k_2,\ldots,k_n) \in \mathbb{Z}^n$, で、正則とは限らない場合も含めると、各 $1 \leq i \leq n$ について、

$$L_{i,k} = -4 \cdot \mathrm{Im}(z_i)^{2-k_i} \left(\frac{\partial}{\partial z_i} \right) \mathrm{Im}(z_i)^{k_i} \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z_i}} \right),$$

なる微分作用素を定義すると、

$$L_{i,k}E(z,s;k,\Gamma) = \left(s - \frac{k_i}{2} \right) \left(1 - s - \frac{k_i}{2} \right) E(z,s;k,\Gamma)$$

を満たす。この微分作用素ついては、[3] を参照。

2 保型形式の Adele 化

一般に、Hecke 作用素などを考えるため、full modular でない合同部分群(level が 1 でない)の場合、adele 化した保型形式を扱う必要がある。

特に、Hilbert 保型形式の場合、総実体 F の類数が 1 でない時は、full modular についての保型形式であっても、adele 化して考えなければならない。（何故 adele 化しないといけないかは、多分他の誰かが書いていると思われるので、省略します。なお、adele 化した保型形式というものは、本質的には、通常の保型形式の有限個の直和になります。）

まず、$\mathrm{GL}(2,F)$ と $\mathrm{SL}(2,F)$ の adele 化、$\mathrm{GL}(2,F_A)$ と $\mathrm{SL}(2,F_A)$ を考える。（以下、F_A が F の adele 環、$F_A^\times$ が F の idele 群を意味する。）即ち、

$$\begin{aligned}\mathrm{GL}(2,F_A) &= \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})^n \times \mathrm{GL}(2,F_\mathfrak{f}),\\ \mathrm{SL}(2,F_A) &= \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})^n \times \mathrm{SL}(2,F_\mathfrak{f}),\end{aligned}$$

但し、

$$\mathrm{GL}(2,F_\mathfrak{f}) = \left\{ x=(x_\mathfrak{p})_\mathfrak{p} \in \prod_\mathfrak{p} \mathrm{GL}(2,F_\mathfrak{p}) \;\middle|\; \begin{array}{c} x_\mathfrak{p} \in \mathrm{GL}(2,\mathcal{O}_\mathfrak{p}) \\ \text{for almost every} \\ \text{finite prime } \mathfrak{p} \text{ of } F \end{array} \right\}$$

$$\mathrm{SL}(2,F_\mathfrak{f}) = \left\{ x=(x_\mathfrak{p})_\mathfrak{p} \in \prod_\mathfrak{p} \mathrm{SL}(2,F_\mathfrak{p}) \;\middle|\; \begin{array}{c} x_\mathfrak{p} \in \mathrm{SL}(2,\mathcal{O}_\mathfrak{p}) \\ \text{for almost every} \\ \text{finite prime } \mathfrak{p} \text{ of } F \end{array} \right\}$$

である。ここで、$\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ は、F の整数環 $\mathcal{O}$ を、$\mathfrak{p}$-進付置で完備化した局所環である。これら $\mathrm{GL}(2,F_A)$, $\mathrm{SL}(2,F_A)$ の中へ、$\mathrm{GL}(2,F)$, $\mathrm{SL}(2,F)$ が、いわゆる diagonal embedding で（つまり、各有限、無限素点ごとに通常の埋め込みで）埋め込まれている。

さて、non-archimedean components である $\mathrm{GL}(2,F_\mathfrak{f})$ または $\mathrm{SL}(2,F_\mathfrak{f})$ の開コンパクト部分群 $D_\mathfrak{f}$ （つまり、$\prod_\mathfrak{p} \mathrm{GL}(2,\mathcal{O}_\mathfrak{p})$ または $\prod_\mathfrak{p} \mathrm{SL}(2,\mathcal{O}_\mathfrak{p})$ と commensurable なもの）を取る。このとき、$D_\mathfrak{f}$ についての重さ $k=(k_1,\ldots,k_n)\in\mathbb{Z}^n$ の adele 化した保型形式とは、$\mathrm{GL}(2,F_A)$ または $\mathrm{SL}(2,F_A)$ 上の $\mathbb{C}$-値関数 $\mathbf{f}$ で、次の条件 (1)-(4) を満たすものをいう。

(1) 任意の $\alpha\in\mathrm{GL}(2,F)$ または $\in\mathrm{SL}(2,F)$ について、$\mathbf{f}(\alpha x)=\mathbf{f}(x)$.

(2) 任意の $d_\mathfrak{f}\in D_\mathfrak{f}$ について、$\mathbf{f}(xd_\mathfrak{f})=\mathbf{f}(x)$.

(3) 任意の $(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n)\in\mathbb{R}^n$ について、$\mathbf{f}(x\cdot c(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n))=\mathbf{f}(x)\times\prod_{i=1}^n \exp(\sqrt{-1}k_i\theta_i)$, 但し、

$$c(\theta_1,\ldots,\theta_n)=\left(\begin{pmatrix}\cos\theta_1 & \sin\theta_1\\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}\cos\theta_n & \sin\theta_n\\ -\sin\theta_n & \cos\theta_n\end{pmatrix}\right)\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})^n.$$

(4) （$\mathrm{GL}(2,F_A)$ の場合のみ）ある Hecke character ω が存在して、任意

の $a\in F_A^\times$ について、$\mathbf{f}(ax)=\omega(a)\mathbf{f}(x)$.

　この adele 化した保型形式 $\mathbf{f}$ と、各 $p\in \mathrm{GL}(2,F_\mathfrak{f})$ または$\in \mathrm{SL}(2,F_\mathfrak{f})$ について、$\mathfrak{H}^n$ 上の関数 f_p を次のように定める。

$$f_p(z)=\omega(\det(\alpha_z)^{-\frac{1}{2}})\mathbf{f}(p\alpha_z)\cdot\prod_{i=1}^n j_i(\alpha_z,\mathbf{i})^{k_i}\det(\alpha_{z,i})^{-k_i/2}.$$

ここで、$\mathbf{i}=(\sqrt{-1},\ldots,\sqrt{-1})\in\mathfrak{H}^n$ で、$\alpha_z\in\mathrm{GL}^+(2,\mathbb{R})^n$ または$\in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})^n$ で、$\alpha_z(\mathbf{i})=z$ となるものである。このとき、$f_p(z)$ は（上記の条件 (3) により）α_z の取り方によらない。また、任意の $\gamma\in(\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})^n\times pD_\mathfrak{f}p^{-1})\cap\mathrm{SL}(2,F)$ について、

$$f_p|_k\gamma=f_p$$

が成り立つ。なお、両側剰余類

$$\begin{array}{rcccl}\mathrm{SL}(2,F) & \backslash & \mathrm{SL}(2,F_A) & / & \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})^n\times D_\mathfrak{f}\\ \mathrm{Z}(F_\infty)\cdot\mathrm{GL}(2,F) & \backslash & \mathrm{GL}(2,F_A) & / & \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})^n\times D_\mathfrak{f}\end{array}$$

は、いずれの場合も有限となるので、adele 化された保型形式は、本質的に通常の保型形式の有限個の直積になっている。

3　Adele 化された Eisenstein 級数

　まず、ベクトル空間 F^2 の adele 化 $(F_A)^2$ 上の $\mathbb{C}$-値関数 φ を、

$$\begin{array}{rcl}\varphi(v) & = & \varphi_\infty(v_\infty)\cdot\varphi_\mathfrak{f}(v_\mathfrak{f})\quad \text{但し、}v=(v_\infty,v_\mathfrak{f})\\ \varphi_\infty & : & (\mathbb{R}^n)^2\text{上の Schwarz 急減少関数}\\ \varphi_\mathfrak{f} & : & (F_\mathfrak{f})^2\text{上の locally constant, compact support な関数}\end{array}$$

ととる。さて、idele norm $|\quad|_{F_A}$ を用いて、

$$F_A^1=\left\{x\in F_A^\times\,\middle|\,|x|_{F_A}=1\right\}$$

と定義すると、この F_A^1 は compact である。自然に、

$$F_A^\times/F^\times=\mathbb{R}^+\times F_A^1/F^\times$$

という直積分解ができる。なお、$\mathbb{R}^+$ は、$\mathbb{R}^n(\subset F_A^\times)$ に $r \to (r^{1/n},\dots,r^{1/n})$ と埋め込むものとする。

Unitary な（つまり値の絶対値が常に 1 である）Hecke character ω, χ を、$\omega|_{\mathbb{R}^+}$ が自明となるようにとる。このとき、この φ, ω, χ についての Eisenstein 級数を、次のように定義できる。（ここで、$g \in \mathrm{GL}(2, F_A)$.）

$$
\begin{aligned}
&E^*(g;\varphi,s;\omega,\chi)\\
&\quad = \chi(\det(g))\,|\det(g)|_{F_A}^s \cdot \int_{F_A^\times/F^\times} |t|_{F_A}^{2s}\,\overline{\omega\chi^2}(t)\left(\sum_{v\in F^2-\{0\}} \varphi(tvg)\right) d^\times t.
\end{aligned}
$$

この積分は、$\mathrm{Re}(s) > 1$ で局所一様絶対収束する。この Eisenstein 級数をより分かりやすくするため、

$$
\varepsilon(g) = \chi(\det(g))\,|\det(g)|_{F_A}^s \cdot \int_{F_A^\times} |t|_{F_A}^{2s}\,\overline{\omega\chi^2}(t)\varphi(t(0,1)g)d^\times t,
$$

という関数を考える。このとき、任意の $\gamma \in \mathrm{P}(F)$ について、$\varepsilon(\gamma g) = \varepsilon(g)$ が成り立ち、かつ

$$
E^*(g;\varphi,s;\omega,\chi) = \sum_{\mathrm{P}(F)\backslash \mathrm{GL}(2,F)} \varepsilon(\gamma g)
$$

である。このように書くと、いかにも Eisenstein 級数らしく見える。（ここで、$\mathrm{P}(F)\backslash\mathrm{GL}(2,F) \cong (F^2-\{0\})/F^\times$ を使っている。）この Eisenstein 級数は、前節に述べた adele 化した保型形式の条件のうち、(3) 以外は全て満たしている。

一般に、重さ $k = (k_1,\dots,k_n)$ の Eisenstein 級数という場合は、φ_∞ を次のように取る。

$$
\begin{aligned}
\varphi_\infty &= \textstyle\prod_{i=1}^n \varphi_i\\
\varphi_i(v_1,v_2) &= \exp(-\pi(v_{1,i}^2+v_{2,i}^2))(-\sqrt{-1}v_{1,i}+v_{2,i})^{k_i} \quad \text{if } k_i \geq 0\\
\varphi_i(v_1,v_2) &= \exp(-\pi(v_{1,i}^2+v_{2,i}^2))(\sqrt{-1}v_{1,i}+v_{2,i})^{-k_i} \quad \text{if } k_i < 0.
\end{aligned}
$$

このとき、$E^*(g;\varphi,s;\omega,\chi)$ は、前節の条件 (1)-(4) を全て満たす。

最も簡単な、$F = \mathbb{Q}$, 重さ $\kappa \geq 4$ の場合で、$\varphi = \varphi_\infty\varphi_{\mathfrak{f}}$ を、

$$
\begin{aligned}
\varphi_{\mathfrak{f}} &= \text{characteristic function of } \left(\prod_p \mathbb{Z}_p, \prod_p \mathbb{Z}_p\right)\\
\varphi_\infty(v_1,v_2) &= \exp(-\pi(v_1^2+v_2^2))(-\sqrt{-1}v_1+v_2)^\kappa,
\end{aligned}
$$

さらに、$\omega=\chi=1$ というときを考える。この場合、任意の $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}^+$ について（$z=x+\sqrt{-1}y$ とおくと）、

$$\begin{aligned} & E^*\left(\left(\begin{array}{cc} 1 & x \\ 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} y^{1/2} & 0 \\ 0 & y^{-1/2} \end{array}\right);\varphi,s;\omega,\chi\right) \\ = \ & \pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(2s)\sum_{\gamma\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})}\mathrm{Im}(z)^s\left|j(\gamma,z)\right|^{-2s+\kappa}j(\gamma,z)^{-\kappa} \end{aligned}$$

となり、第 1 節で考えた Eisenstein 級数と本質的に同じである。

4 函数等式

前節で定義した Eisenstein 級数について、函数等式を考える。

定理 関数 φ を Fourier 変換したものを、$\hat{\varphi}$ と書く。このとき、次の函数等式が成り立つ。

$$E^*(g;\varphi,s;\omega,\chi)=E^*({}^tg^{-1};\hat{\varphi},1-s;\overline{\omega},\overline{\chi}).$$

この Eisenstein 級数は、s について全平面に有理型に解析接続され、極は位数 1 で、次の 2 点のみである。

$$\begin{array}{lll} s=0 & \text{のときで、留数は} & -\dfrac{1}{2}\chi(\det(g))\varphi(0)\delta(\omega\chi^2) \\ s=1 & \text{のときで、留数は} & \dfrac{1}{2}\chi(\det(g))\hat{\varphi}(0)\delta(\omega\chi^2) \end{array}$$

但し、

$$\delta(\omega\chi^2)=\delta(\overline{\omega\chi^2})=\int_{F_A^1/F^\times}\omega\chi^2(t)d^\times t$$

で、これは、$\omega\chi^2$ が $F_A^1/F^\times$ で恒等的に 1 でなければ、$\delta(\omega\chi^2)=0$ である。

証明 Adelic な場合の Poisson 和公式、

$$\sum_{v\in F^2}\varphi(v)=\sum_{v\in F^2}\hat{\varphi}(v)$$

を使う。これは少し変形すると、

$$\sum_{v\in F^2}\varphi(vg)=|\det(g)|_{F_A}^{-1}\sum_{v\in F^2}\hat{\varphi}(v\,{}^tg^{-1})$$

である。実質的には、v は F^2 の中のある lattice を走っていることに注意。（関数 φ_{f} が compact support であることより、ある lattice の点以外では 0 になる。）まず、

$$\begin{aligned}
& E^*(g;\varphi,s;\omega,\chi) \\
= \; & \chi(\det(g))\,|\det(g)|_{F_A}^s \cdot \int_{F_A^\times/F^\times} |t|_{F_A}^{2s}\,\overline{\omega\chi^2}(t)\left(\sum_{v\in F^2-\{0\}} \varphi(tvg)\right) d^\times t \\
= \; & \chi(\det(g))\,|\det(g)|_{F_A}^s \cdot \int_{\substack{t\in F_A^\times/F^\times \\ |t|_{F_A}\geq 1}} |t|_{F_A}^{2s}\,\overline{\omega\chi^2}(t)\left(\sum_{v\in F^2-\{0\}} \varphi(tvg)\right) d^\times t \\
& +\chi(\det(g))\,|\det(g)|_{F_A}^s \cdot \int_{\substack{t\in F_A^\times/F^\times \\ |t|_{F_A}< 1}} |t|_{F_A}^{2s}\,\overline{\omega\chi^2}(t)\left(\sum_{v\in F^2-\{0\}} \varphi(tvg)\right) d^\times t
\end{aligned}$$

と変形し、右辺の上段を I_1, 下段を I_2 とおく。このとき、I_1 は、全平面正則（s について）な函数である。ここで、Adelic な Poisson 和公式を使うと、

$$\begin{aligned}
& I_2 + \chi(\det(g))\,|\det(g)|_{F_A}^s \cdot \int_{\substack{t\in F_A^\times/F^\times \\ |t|_{F_A}< 1}} |t|_{F_A}^{2s}\,\overline{\omega\chi^2}(t)\varphi(0)d^\times t \\
= \; & \chi(\det(g))\,|\det(g)|_{F_A}^s \cdot \int_{\substack{t\in F_A^\times/F^\times \\ |t|_{F_A}< 1}} |t|_{F_A}^{2s}\,\overline{\omega\chi^2}(t)\left(\sum_{v\in F^2} \varphi(tvg)\right) d^\times t \\
= \; & \chi(\det(g))\,|\det(g)|_{F_A}^{s-1} \cdot \int_{\substack{t\in F_A^\times/F^\times \\ |t|_{F_A}< 1}} |t|_{F_A}^{2s-2}\,\overline{\omega\chi^2}(t)\left(\sum_{v\in F^2} \hat{\varphi}(t^{-1}v{}^tg^{-1})\right) d^\times t \\
= \; & \chi(\det(g))\,|\det(g)|_{F_A}^{s-1} \cdot \int_{\substack{t\in F_A^\times/F^\times \\ |t|_{F_A}< 1}} |t|_{F_A}^{2s-2}\,\overline{\omega\chi^2}(t)\left(\sum_{v\in F^2-\{0\}} \hat{\varphi}(t^{-1}v{}^tg^{-1})\right) d^\times t \\
& +\chi(\det(g))\,|\det(g)|_{F_A}^{s-1} \cdot \int_{\substack{t\in F_A^\times/F^\times \\ |t|_{F_A}< 1}} |t|_{F_A}^{2s-2}\,\overline{\omega\chi^2}(t)\hat{\varphi}(0)d^\times t.
\end{aligned}$$

この式の右辺の上段を J_1 とおき、$t\to t^{-1}$ の変数変換をすると、

$$\begin{aligned}
J_1 \; & = \chi(\det(g))\,|\det(g)|_{F_A}^{s-1} \int_{\substack{t\in F_A^\times/F^\times \\ |t|_{F_A}> 1}} |t|_{F_A}^{-2s+2}\,\overline{\omega\chi^2}(t^{-1})\left(\sum_{v\in F^2-\{0\}} \hat{\varphi}(tv{}^tg^{-1})\right) d^\times t \\
& = \overline{\chi}(\det({}^tg^{-1}))\left|\det({}^tg^{-1})\right|_{F_A}^{1-s} \int_{\substack{t\in F_A^\times/F^\times \\ |t|_{F_A}> 1}} |t|_{F_A}^{-2s+2}\,\omega\chi^2(t)\left(\sum_{v\in F^2-\{0\}} \hat{\varphi}(tv{}^tg^{-1})\right) d^\times t
\end{aligned}$$

となり、これは $E^*({}^tg^{-1};\hat{\varphi},1-s;\overline{\omega},\overline{\chi})$ についての I_1 である。(つまり、$1-s$ の函数として、全平面正則である。)よって、これらをまとめると、

$$\begin{aligned}
& E^*(g;\varphi,s;\omega,\chi) \\
= \;& I_1 + J_1 \\
& -\chi(\det(g))\,|\det(g)|_{F_A}^{s} \cdot \int_{\substack{t\in F_A^\times/F^\times \\ |t|_{F_A}<1}} |t|_{F_A}^{2s}\,\overline{\omega\chi^2}(t)\varphi(0)d^\times t \\
& +\chi(\det(g))\,|\det(g)|_{F_A}^{s-1} \cdot \int_{\substack{t\in F_A^\times/F^\times \\ |t|_{F_A}<1}} |t|_{F_A}^{2s-2}\,\overline{\omega\chi^2}(t)\hat{\varphi}(0)d^\times t,
\end{aligned}$$

となる。この式の右辺の第2行は、$\mathrm{Re}(s)>0$ で収束し、値は

$$-\frac{1}{2s}\chi(\det(g))\varphi(0)\delta(\omega\chi^2)$$

で、第3行は、$\mathrm{Re}(s)>1$ で収束し、値は

$$\frac{1}{2s-2}\chi(\det(g))\hat{\varphi}(0)\delta(\omega\chi^2)$$

である。よって、当然ながらどちらも全平面に有理(型)函数として解析接続される。このようにして、函数等式と、全平面への有理型解析接続が証明できた。

5　Eisenstein 級数の Fourier 係数

重さ $(\kappa,\kappa,\ldots,\kappa)$ で、$s=\kappa/2$ の Eisenstein 級数の Fourier 展開について述べることにする。(なお、重さが各無限素点で揃っていない場合は、Eisenstein 級数は、正則とはならない。こういう non-parallel な重さの Hilbert 正則保型形式は、cusp form しかないことは、よく知られている。)まず、F の整数環を $\mathcal{O}$, その $F_{\mathfrak{f}}$ での閉包を $\hat{\mathcal{O}}$ とし、また

$$\mathcal{O}^* = \left\{a\in F \,\middle|\, \mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(ac)\in\mathbb{Z} \text{ for any } c\in\mathcal{O}\right\}$$

とする。このとき、φ を、

$$\begin{aligned}
\varphi_{\mathfrak{f}} &= \text{characteristic function of } \left(\hat{\mathcal{O}},\hat{\mathcal{O}}\right) \\
\varphi_\infty &= \prod_{i=1}^{n}\varphi_i \\
\varphi_i(v_1,v_2) &= \exp(-\pi(v_{1,i}^2+v_{2,i}^2))(-\sqrt{-1}v_{1,i}+v_{2,i})^{\kappa},
\end{aligned}$$

ととる。このとき（任意の $x \in F_A,\ y \in F_A^\times$ について）、

$$
\begin{aligned}
& E^*\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \varphi, \tfrac{1}{2}\kappa; \omega, \chi\right) \\
= \ & \chi(y)\,|y|_{F_A}^{\kappa/2}\Bigl\{\pi^{-n\kappa}\Gamma(\kappa)^n L(\kappa, \overline{\omega\chi^2}) \\
& +\mathrm{sgn}(y_\infty)(-2\sqrt{-1})^{n\kappa}\mathcal{D}^{-1/2} \\
& \quad \times \sum_{\xi \in F^\times} \sigma_{\kappa-1}(\xi_{\mathfrak{f}} y_{\mathfrak{f}}; \overline{\omega\chi^2})\tau(\xi x)\exp\left(-2\pi\sum_{i=1}^{n}\xi_i y_i\right)\Bigr\}
\end{aligned}
$$

という Fourier 展開が成り立つ。但し、$\mathcal{D}$ は F の different で、$L(\cdot, \overline{\omega\chi^2})$ は通常の L-函数、また τ は F_A/F の standard additive character である。ここで、ξ は、$(\xi_\infty y_\infty) = (\xi_1 y_1, \ldots, \xi_n y_n)$ が、総正となるように動く。また、$\sigma_{\kappa-1}(a, \overline{\omega\chi^2})\quad(a \in F_A^\times)$ は、

$$
\sigma_{\kappa-1}(a, \overline{\omega\chi^2}) = \sum_{\mathfrak{a}} \omega\chi^2(\mathfrak{a})N(\mathfrak{a})^{\kappa-1}
$$

（ただし、$\mathfrak{a}$ は F の分数イデアルで、$\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}^*,\ a\hat{\mathcal{O}} \subset \mathfrak{a}\hat{\mathcal{O}}$ となるもの全てを動く）である。つまり、elliptic な Eisenstein 級数の係数の「約数の $\kappa-1$ 乗の和」の一般化である。

　このような Fourier 展開から、例えば正則保型形式の各 Fourier 係数に $\theta \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ を施すいわゆる Galois action により、Eisenstein 級数はやはり Eisenstein 級数に移されることが分かる。（しかもその行き先がはっきり分かる。）

　なお、このような Eisenstein 級数の Fourier 係数の計算は、一般的には [2] で行われている種類の計算を用いる。

参考文献

[1] P. B. Garrett, Holomorphic Hilbert Modular Forms, Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics Series.

[2] G. Shimura, Confluent hypergeometric functions on tube domains, Math. Ann. **260**(1982), 269-302.

[3] G. Shimura, On the Eisenstein series of Hilbert modular groups, Revista Mathematica Iberoamericana **1**(1985), 1-42