# Hilbert 保型形式の場合の Eisenstein 級数についての解説

山内淳生

## 1 Eisenstein 級数の構成

この稿は、主に [1] の第 4 章の要約である。
総実代数体 $F$ について ( $[F:\mathbb{Q}]=n$ ) 、

$$\mathrm{GL}^+(2,F)=\{\gamma\in \mathrm{GL}(2,F)\,|\det(\gamma)>>0\}$$

なる群を考える。( ここで、$>>0$ は、総正を意味する。) このとき、当然 $\mathrm{GL}^+(2,F)\supset \mathrm{SL}(2,F)$ であり、$\mathrm{GL}^+(2,F)$ は Hilbert 上半空間

$$\mathfrak{H}^n=\{z=(z_1,z_2,\ldots,z_n)\in\mathbb{C}^n\,|\mathrm{Im}(z_i)>0 \quad \text{for any } 1\leq i\leq n\}$$

に componentwise に作用する。つまり、$\alpha=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in \mathrm{GL}^+(2,F)$ と、$z=(z_1,z_2,\ldots,z_n)$ について、

$$\alpha(z)=\big((a_1z_1+b_1)(c_1z_1+d_1)^{-1},\ldots,(a_nz_n+b_n)(c_nz_n+d_n)^{-1}\big)$$

ここで、$a_i,b_i,c_i,d_i,\ (1\leq i\leq n)$ は、$a,b,c,d$ の $i$ 番目の共役 ( $F$ の $\mathbb{R}$ への埋め込みを 1 番目から $n$ 番目まで固定する ) である。保型因子は、

$$j_i(\alpha,z)=c_iz_i+d_i \qquad (1\leq i\leq n),$$

となる。また、$\mathfrak{H}^n$ 上の任意の ( スカラー値 ) 関数 $f$ と $k=(k_1,\ldots,k_n)\in \mathbb{Z}^{\mathbf{a}}$ と $\alpha\in\mathrm{GL}^+(2,F)$ について、$f|_k\alpha$ なる $\mathfrak{H}^n$ 上の関数を、

$$(f|_k\alpha)(z)=f(\alpha(z))\prod_{i=1}^n j_i(\alpha,z)^{-k_i},$$

と定義すると、$|_k\alpha$ は、$\mathrm{GL}^+(2,F)$ の作用となっている。( つまり、$(f|_k\alpha_1)|_k\alpha_2 = f|_k(\alpha_1\alpha_2)$. )

さて、次のような parabolic subgroup P を自然に定義できる。

$$\mathrm{P}(F) = \left\{ \gamma \in \mathrm{GL}(2,F) \middle| \gamma = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \right\},$$

そして、これについての Eisenstein 級数を、重さ $k = (k_1, \ldots, k_n) \in (2\mathbb{Z})^n$ の場合、

$$E(z,s;k,\Gamma) = \sum_{\gamma \in (\mathrm{P}(F)\cap\Gamma)\backslash\Gamma} \prod_{i=1}^{n} \left( \mathrm{Im}(z_i)^{s-k_i/2} j_i(\gamma,z)^{-k_i} \, |j_i(\gamma,z)|^{-2s+k_i} \right),$$

と、定義することができる。なお、$\Gamma$ は、$\mathrm{SL}(2,F)$ の合同部分群である。( この $\Gamma$ が充分小さい場合、任意の $k \in \mathbb{Z}^n$ について定義できる。) この級数は、$\mathrm{Re}(s) > 1$ で局所一様絶対収束する。また、定義より当然、

$$E(z,s;k,\Gamma)|_k\gamma = E(z,s;k,\Gamma),$$

が、すべての $\gamma \in \Gamma$ に対して成り立つ。この Eisenstein 級数は、重さが、$k = (\kappa, \kappa, \ldots, \kappa)$ という ( いわゆる parallel weight ) 場合で、$s = \kappa/2$ の時 ( つまり $\kappa \geq 3$ ) は、正則保型形式となる。一般の重さ $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$, で、正則とは限らない場合も含めると、各 $1 \leq i \leq n$ について、

$$L_{i,k} = -4 \cdot \mathrm{Im}(z_i)^{2-k_i} \left( \frac{\partial}{\partial z_i} \right) \mathrm{Im}(z_i)^{k_i} \left( \frac{\partial}{\partial \overline{z_i}} \right),$$

なる微分作用素を定義すると、

$$L_{i,k}E(z,s;k,\Gamma) = \left( s - \frac{k_i}{2} \right) \left( 1 - s - \frac{k_i}{2} \right) E(z,s;k,\Gamma)$$

を満たす。この微分作用素ついては、[3] を参照。

## 2 保型形式の Adele 化

一般に、Hecke 作用素などを考えるため、full modular でない合同部分群 ( level が 1 でない ) の場合、adele 化した保型形式を扱う必要がある。

特に、Hilbert 保型形式の場合、総実体 $F$ の類数が 1 でない時は、full modular についての保型形式であっても、adele 化して考えなければならない。( 何故 adele 化しないといけないかは、多分他の誰かが書いていると思われるので、省略します。なお、adele 化した保型形式というものは、本質的には、通常の保型形式の有限個の直和になります。)

まず、$\mathrm{GL}(2,F)$ と $\mathrm{SL}(2,F)$ の adele 化、$\mathrm{GL}(2,F_A)$ と $\mathrm{SL}(2,F_A)$ を考える。( 以下、$F_A$ が $F$ の adele 環、$F_A^\times$ が $F$ の idele 群を意味する。) 即ち、

$$\begin{aligned}\mathrm{GL}(2,F_A) &= \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})^n \times \mathrm{GL}(2,F_{\mathfrak{f}}),\\ \mathrm{SL}(2,F_A) &= \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})^n \times \mathrm{SL}(2,F_{\mathfrak{f}}),\end{aligned}$$

但し、

$$\mathrm{GL}(2,F_{\mathfrak{f}}) = \left\{ x=(x_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}} \in \prod_{\mathfrak{p}} \mathrm{GL}(2,F_{\mathfrak{p}}) \;\middle|\; \begin{array}{c} x_{\mathfrak{p}} \in \mathrm{GL}(2,\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}) \\ \text{for almost every} \\ \text{finite prime } \mathfrak{p} \text{ of } F \end{array} \right\}$$

$$\mathrm{SL}(2,F_{\mathfrak{f}}) = \left\{ x=(x_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}} \in \prod_{\mathfrak{p}} \mathrm{SL}(2,F_{\mathfrak{p}}) \;\middle|\; \begin{array}{c} x_{\mathfrak{p}} \in \mathrm{SL}(2,\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}) \\ \text{for almost every} \\ \text{finite prime } \mathfrak{p} \text{ of } F \end{array} \right\}$$

である。ここで、$\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ は、$F$ の整数環 $\mathcal{O}$ を、$\mathfrak{p}$-進付置で完備化した局所環である。これら $\mathrm{GL}(2,F_A)$, $\mathrm{SL}(2,F_A)$ の中へ、$\mathrm{GL}(2,F)$, $\mathrm{SL}(2,F)$ が、いわゆる diagonal embedding で ( つまり、各有限、無限素点ごとに通常の埋め込みで ) 埋め込まれている。

さて、non-archimedean components である $\mathrm{GL}(2,F_{\mathfrak{f}})$ または $\mathrm{SL}(2,F_{\mathfrak{f}})$ の開コンパクト部分群 $D_{\mathfrak{f}}$ ( つまり、$\prod_{\mathfrak{p}} \mathrm{GL}(2,\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$ または $\prod_{\mathfrak{p}} \mathrm{SL}(2,\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$ と commensurable なもの ) を取る。このとき、$D_{\mathfrak{f}}$ についての重さ $k=(k_1,\ldots,k_n)\in\mathbb{Z}^n$ の adele 化した保型形式とは、$\mathrm{GL}(2,F_A)$ または $\mathrm{SL}(2,F_A)$ 上の $\mathbb{C}$-値関数 $\mathbf{f}$ で、次の条件 (1)-(4) を満たすものをいう。

(1) 任意の $\alpha\in\mathrm{GL}(2,F)$ または $\in\mathrm{SL}(2,F)$ について、$\mathbf{f}(\alpha x)=\mathbf{f}(x)$.

(2) 任意の $d_{\mathfrak{f}}\in D_{\mathfrak{f}}$ について、$\mathbf{f}(xd_{\mathfrak{f}})=\mathbf{f}(x)$.

(3) 任意の $(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n)\in\mathbb{R}^n$ について、$\mathbf{f}(x\cdot c(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n))=\mathbf{f}(x)\times \prod_{i=1}^n \exp(\sqrt{-1}k_i\theta_i)$, 但し、

$$c(\theta_1,\ldots,\theta_n)=\left(\begin{pmatrix}\cos\theta_1 & \sin\theta_1\\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}\cos\theta_n & \sin\theta_n\\ -\sin\theta_n & \cos\theta_n\end{pmatrix}\right)\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})^n.$$

(4) ( $\mathrm{GL}(2,F_A)$ の場合のみ ) ある Hecke character $\omega$ が存在して、任意

の $a \in F_A^\times$ について、$\mathbf{f}(ax) = \omega(a)\mathbf{f}(x)$.

この adele 化した保型形式 $\mathbf{f}$ と、各 $p \in \mathrm{GL}(2, F_\mathfrak{f})$ または $\in \mathrm{SL}(2, F_\mathfrak{f})$ について、$\mathfrak{H}^n$ 上の関数 $f_p$ を次のように定める。

$$f_p(z) = \omega(\det(\alpha_z)^{-\frac{1}{2}})\mathbf{f}(p\alpha_z) \cdot \prod_{i=1}^{n} j_i(\alpha_z, \mathbf{i})^{k_i} \det(\alpha_{z,i})^{-k_i/2}.$$

ここで、$\mathbf{i} = (\sqrt{-1}, \ldots, \sqrt{-1}) \in \mathfrak{H}^n$ で、$\alpha_z \in \mathrm{GL}^+(2, \mathbb{R})^n$ または $\in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})^n$ で、$\alpha_z(\mathbf{i}) = z$ となるものである。このとき、$f_p(z)$ は ( 上記の条件 (3) により ) $\alpha_z$ の取り方によらない。また、任意の $\gamma \in (\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})^n \times pD_\mathfrak{f}p^{-1}) \cap \mathrm{SL}(2, F)$ について、

$$f_p|_k\gamma = f_p$$

が成り立つ。なお、両側剰余類

$$\begin{array}{rcccl} \mathrm{SL}(2, F) & \backslash & \mathrm{SL}(2, F_A) & / & \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})^n \times D_\mathfrak{f} \\ \mathrm{Z}(F_\infty) \cdot \mathrm{GL}(2, F) & \backslash & \mathrm{GL}(2, F_A) & / & \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})^n \times D_\mathfrak{f} \end{array}$$

は、いずれの場合も有限となるので、adele 化された保型形式は、本質的に通常の保型形式の有限個の直積になっている。

# 3 Adele 化された Eisenstein 級数

まず、ベクトル空間 $F^2$ の adele 化 $(F_A)^2$ 上の $\mathbb{C}$-値関数 $\varphi$ を、

$$\begin{array}{rcl} \varphi(v) & = & \varphi_\infty(v_\infty) \cdot \varphi_\mathfrak{f}(v_\mathfrak{f}) \quad \text{但し、} v = (v_\infty, v_\mathfrak{f}) \\ \varphi_\infty & : & (\mathbb{R}^n)^2 \text{上の Schwarz 急減少関数} \\ \varphi_\mathfrak{f} & : & (F_\mathfrak{f})^2 \text{上の locally constant, compact support な関数} \end{array}$$

ととる。さて、idele norm $|\quad|_{F_A}$ を用いて、

$$F_A^1 = \left\{ x \in F_A^\times \,\middle|\, |x|_{F_A} = 1 \right\}$$

と定義すると、この $F_A^1$ は compact である。自然に、

$$F_A^\times / F^\times = \mathbb{R}^+ \times F_A^1 / F^\times$$

という直積分解ができる。なお、$\mathbb{R}^+$ は、$\mathbb{R}^n(\subset F_A^\times)$ に $r \to (r^{1/n}, \ldots, r^{1/n})$ と埋め込むものとする。

Unitary な ( つまり値の絶対値が常に 1 である ) Hecke character $\omega, \chi$ を、$\omega|_{\mathbb{R}^+}$ が自明となるようにとる。このとき、この $\varphi, \omega, \chi$ についての Eisenstein 級数を、次のように定義できる。( ここで、$g \in \mathrm{GL}(2, F_A)$. )

$$E^*(g; \varphi, s; \omega, \chi)$$
$$= \chi(\det(g)) \, |\det(g)|_{F_A}^s \cdot \int_{F_A^\times / F^\times} |t|_{F_A}^{2s} \, \overline{\omega\chi^2}(t) \left( \sum_{v \in F^2 - \{0\}} \varphi(tvg) \right) d^\times t.$$

この積分は、$\mathrm{Re}(s) > 1$ で局所一様絶対収束する。この Eisenstein 級数をより分かりやすくするため、

$$\varepsilon(g) = \chi(\det(g)) \, |\det(g)|_{F_A}^s \cdot \int_{F_A^\times} |t|_{F_A}^{2s} \, \overline{\omega\chi^2}(t) \varphi(t(0,1)g) d^\times t,$$

という関数を考える。このとき、任意の $\gamma \in \mathrm{P}(F)$ について、$\varepsilon(\gamma g) = \varepsilon(g)$ が成り立ち、かつ

$$E^*(g; \varphi, s; \omega, \chi) = \sum_{\mathrm{P}(F) \backslash \mathrm{GL}(2,F)} \varepsilon(\gamma g)$$

である。このように書くと、いかにも Eisenstein 級数らしく見える。( ここで、$\mathrm{P}(F) \setminus \mathrm{GL}(2, F) \cong (F^2 - \{0\})/F^\times$ を使っている。) この Eisenstein 級数は、前節に述べた adele 化した保型形式の条件のうち、(3) 以外は全て満たしている。

一般に、重さ $k = (k_1, \ldots, k_n)$ の Eisenstein 級数という場合は、$\varphi_\infty$ を次のように取る。

$$\begin{aligned}
\varphi_\infty &= \textstyle\prod_{i=1}^n \varphi_i \\
\varphi_i(v_1, v_2) &= \exp(-\pi(v_{1,i}^2 + v_{2,i}^2))(-\sqrt{-1}v_{1,i} + v_{2,i})^{k_i} \quad \text{if } k_i \geq 0 \\
\varphi_i(v_1, v_2) &= \exp(-\pi(v_{1,i}^2 + v_{2,i}^2))(\sqrt{-1}v_{1,i} + v_{2,i})^{-k_i} \quad \text{if } k_i < 0.
\end{aligned}$$

このとき、$E^*(g; \varphi, s; \omega, \chi)$ は、前節の条件 (1)-(4) を全て満たす。

最も簡単な、$F = \mathbb{Q}$, 重さ $\kappa \geq 4$ の場合で、$\varphi = \varphi_\infty \varphi_\mathfrak{f}$ を、

$$\begin{aligned}
\varphi_\mathfrak{f} &= \text{characteristic function of } \left( \prod_p \mathbb{Z}_p, \prod_p \mathbb{Z}_p \right) \\
\varphi_\infty(v_1, v_2) &= \exp(-\pi(v_1^2 + v_2^2))(-\sqrt{-1}v_1 + v_2)^\kappa,
\end{aligned}$$

さらに、$\omega = \chi = 1$ というときを考える。この場合、任意の $x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}^+$ について ( $z = x + \sqrt{-1}y$ とおくと )

$$\begin{aligned} & E^*\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y^{1/2} & 0 \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix}; \varphi, s; \omega, \chi\right) \\ = \ & \pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(2s) \sum_{\gamma \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})} \mathrm{Im}(z)^s \, |j(\gamma, z)|^{-2s+\kappa} \, j(\gamma, z)^{-\kappa} \end{aligned}$$

となり、第 1 節で考えた Eisenstein 級数と本質的に同じである。

# 4　函数等式

前節で定義した Eisenstein 級数について、函数等式を考える。

定理　関数 $\varphi$ を Fourier 変換したものを、$\hat{\varphi}$ と書く。このとき、次の函数等式が成り立つ。

$$E^*(g; \varphi, s; \omega, \chi) = E^*({}^t g^{-1}; \hat{\varphi}, 1-s; \overline{\omega}, \overline{\chi}).$$

この Eisenstein 級数は、$s$ について全平面に有理型に解析接続され、極は位数 1 で、次の 2 点のみである。

$$\begin{aligned} s = 0 \quad & \text{のときで、留数は} \quad -\frac{1}{2}\chi(\det(g))\varphi(0)\delta(\omega\chi^2) \\ s = 1 \quad & \text{のときで、留数は} \quad \frac{1}{2}\chi(\det(g))\hat{\varphi}(0)\delta(\omega\chi^2) \end{aligned}$$

但し、

$$\delta(\omega\chi^2) = \delta(\overline{\omega\chi^2}) = \int_{F_A^1/F^\times} \omega\chi^2(t) d^\times t$$

で、これは、$\omega\chi^2$ が $F_A^1/F^\times$ で恒等的に 1 でなければ、$\delta(\omega\chi^2) = 0$ である。

証明　Adelic な場合の Poisson 和公式、

$$\sum_{v \in F^2} \varphi(v) = \sum_{v \in F^2} \hat{\varphi}(v)$$

を使う。これは少し変形すると、

$$\sum_{v \in F^2} \varphi(vg) = |\det(g)|_{F_A}^{-1} \sum_{v \in F^2} \hat{\varphi}(v {}^t g^{-1})$$

である。実質的には、$v$ は $F^2$ の中のある lattice を走っていることに注意。( 関数 $\varphi_{\mathfrak{f}}$ が compact support であることより、ある lattice の点以外では $0$ になる。) まず、

$$\begin{aligned}
& E^*(g;\varphi,s;\omega,\chi) \\
= \;& \chi(\det(g))\,|\det(g)|_{F_A}^{s}\cdot\int_{F_A^\times/F^\times}|t|_{F_A}^{2s}\,\overline{\omega\chi^2}(t)\left(\sum_{v\in F^2-\{0\}}\varphi(tvg)\right)d^\times t \\
= \;& \chi(\det(g))\,|\det(g)|_{F_A}^{s}\cdot\int_{\substack{t\,\in\,F_A^\times/F^\times\\ |t|_{F_A}\geq 1}}|t|_{F_A}^{2s}\,\overline{\omega\chi^2}(t)\left(\sum_{v\in F^2-\{0\}}\varphi(tvg)\right)d^\times t \\
& +\chi(\det(g))\,|\det(g)|_{F_A}^{s}\cdot\int_{\substack{t\,\in\,F_A^\times/F^\times\\ |t|_{F_A}< 1}}|t|_{F_A}^{2s}\,\overline{\omega\chi^2}(t)\left(\sum_{v\in F^2-\{0\}}\varphi(tvg)\right)d^\times t
\end{aligned}$$

と変形し、右辺の上段を $I_1$, 下段を $I_2$ とおく。このとき、$I_1$ は、全平面正則 ( $s$ について ) な函数である。ここで、Adelic な Poisson 和公式を使うと、

$$\begin{aligned}
& I_2+\chi(\det(g))\,|\det(g)|_{F_A}^{s}\cdot\int_{\substack{t\,\in\,F_A^\times/F^\times\\ |t|_{F_A}< 1}}|t|_{F_A}^{2s}\,\overline{\omega\chi^2}(t)\varphi(0)d^\times t \\
= \;& \chi(\det(g))\,|\det(g)|_{F_A}^{s}\cdot\int_{\substack{t\,\in\,F_A^\times/F^\times\\ |t|_{F_A}< 1}}|t|_{F_A}^{2s}\,\overline{\omega\chi^2}(t)\left(\sum_{v\in F^2}\varphi(tvg)\right)d^\times t \\
= \;& \chi(\det(g))\,|\det(g)|_{F_A}^{s-1}\cdot\int_{\substack{t\,\in\,F_A^\times/F^\times\\ |t|_{F_A}< 1}}|t|_{F_A}^{2s-2}\,\overline{\omega\chi^2}(t)\left(\sum_{v\in F^2}\hat{\varphi}(t^{-1}v^tg^{-1})\right)d^\times t \\
= \;& \chi(\det(g))\,|\det(g)|_{F_A}^{s-1}\cdot\int_{\substack{t\,\in\,F_A^\times/F^\times\\ |t|_{F_A}< 1}}|t|_{F_A}^{2s-2}\,\overline{\omega\chi^2}(t)\left(\sum_{v\in F^2-\{0\}}\hat{\varphi}(t^{-1}v^tg^{-1})\right)d^\times t \\
& +\chi(\det(g))\,|\det(g)|_{F_A}^{s-1}\cdot\int_{\substack{t\,\in\,F_A^\times/F^\times\\ |t|_{F_A}< 1}}|t|_{F_A}^{2s-2}\,\overline{\omega\chi^2}(t)\hat{\varphi}(0)d^\times t.
\end{aligned}$$

この式の右辺の上段を $J_1$ とおき、$t\to t^{-1}$ の変数変換をすると、

$$\begin{aligned}
J_1 \;& =\chi(\det(g))\,|\det(g)|_{F_A}^{s-1}\int_{\substack{t\,\in\,F_A^\times/F^\times\\ |t|_{F_A}> 1}}|t|_{F_A}^{-2s+2}\,\overline{\omega\chi^2}(t^{-1})\left(\sum_{v\in F^2-\{0\}}\hat{\varphi}(tv^tg^{-1})\right)d^\times t \\
& =\overline{\chi}(\det({}^tg^{-1}))\,\left|\det({}^tg^{-1})\right|_{F_A}^{1-s}\int_{\substack{t\,\in\,F_A^\times/F^\times\\ |t|_{F_A}> 1}}|t|_{F_A}^{-2s+2}\,\omega\chi^2(t)\left(\sum_{v\in F^2-\{0\}}\hat{\varphi}(tv^tg^{-1})\right)d^\times t
\end{aligned}$$

となり、これは $E^*({}^tg^{-1};\hat{\varphi},1-s;\overline{\omega},\overline{\chi})$ についての $I_1$ である。( つまり、$1-s$ の函数として、全平面正則である。) よって、これらをまとめると、

$$\begin{aligned} & E^*(g;\varphi,s;\omega,\chi) \\ = \; & I_1 + J_1 \\ & -\chi(\det(g))\,|\det(g)|_{F_A}^{s} \cdot \int_{\substack{t\,\in\, F_A^\times/F^\times \\ |t|_{F_A}<1}} |t|_{F_A}^{2s}\,\overline{\omega\chi^2}(t)\varphi(0)d^\times t \\ & +\chi(\det(g))\,|\det(g)|_{F_A}^{s-1} \cdot \int_{\substack{t\,\in\, F_A^\times/F^\times \\ |t|_{F_A}<1}} |t|_{F_A}^{2s-2}\,\overline{\omega\chi^2}(t)\hat{\varphi}(0)d^\times t, \end{aligned}$$

となる。この式の右辺の第 2 行は、$\mathrm{Re}(s)>0$ で収束し、値は

$$-\frac{1}{2s}\chi(\det(g))\varphi(0)\delta(\omega\chi^2)$$

で、第 3 行は、$\mathrm{Re}(s)>1$ で収束し、値は

$$\frac{1}{2s-2}\chi(\det(g))\hat{\varphi}(0)\delta(\omega\chi^2)$$

である。よって、当然ながらどちらも全平面に有理 ( 型 ) 函数として解析接続される。このようにして、函数等式と、全平面への有理型解析接続が証明できた。

# 5 Eisenstein 級数の Fourier 係数

重さ $(\kappa,\kappa,\ldots,\kappa)$ で、$s=\kappa/2$ の Eisenstein 級数の Fourier 展開について述べることにする。( なお、重さが各無限素点で揃っていない場合は、Eisenstein 級数は、正則とはならない。こういう non-parallel な重さの Hilbert 正則保型形式は、cusp form しかないことは、よく知られている。) まず、$F$ の整数環を $\mathcal{O}$, その $F_{\mathfrak{f}}$ での閉包を $\hat{\mathcal{O}}$ とし、また

$$\mathcal{O}^* = \left\{ a\in F \,\middle|\, \mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(ac)\in\mathbb{Z} \text{ for any } c\in\mathcal{O} \right\}$$

とする。このとき、$\varphi$ を、

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathfrak{f}} &= \text{characteristic function of } \left(\hat{\mathcal{O}},\hat{\mathcal{O}}\right) \\ \varphi_\infty &= \prod_{i=1}^{n}\varphi_i \\ \varphi_i(v_1,v_2) &= \exp(-\pi(v_{1,i}^2+v_{2,i}^2))(-\sqrt{-1}v_{1,i}+v_{2,i})^\kappa, \end{aligned}$$

ととる。このとき（任意の $x \in F_A,\ y \in F_A^\times$ について）

$$\begin{aligned} & E^*\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \varphi, \tfrac{1}{2}\kappa; \omega, \chi\right) \\ = \ & \chi(y)\,|y|_{F_A}^{\kappa/2}\Big\{\pi^{-n\kappa}\Gamma(\kappa)^n L(\kappa, \overline{\omega\chi^2}) \\ & +\mathrm{sgn}(y_\infty)(-2\sqrt{-1})^{n\kappa}\mathcal{D}^{-1/2} \\ & \quad \times \sum_{\xi \in F^\times} \sigma_{\kappa-1}(\xi_{\mathfrak{f}} y_{\mathfrak{f}}; \overline{\omega\chi^2})\tau(\xi x)\exp\left(-2\pi\sum_{i=1}^n \xi_i y_i\right)\Big\} \end{aligned}$$

という Fourier 展開が成り立つ。但し、$\mathcal{D}$ は $F$ の different で、$L(\cdot, \overline{\omega\chi^2})$ は通常の $L$-函数、また $\tau$ は $F_A/F$ の standard additive character である。ここで、$\xi$ は、$(\xi_\infty y_\infty) = (\xi_1 y_1, \ldots, \xi_n y_n)$ が、総正となるように動く。また、$\sigma_{\kappa-1}(a, \overline{\omega\chi^2})\quad (a \in F_A^\times)$ は、

$$\sigma_{\kappa-1}(a, \overline{\omega\chi^2}) = \sum_{\mathfrak{a}} \omega\chi^2(\mathfrak{a}) N(\mathfrak{a})^{\kappa-1}$$

（ただし、$\mathfrak{a}$ は $F$ の分数イデアルで、$\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}^*,\ a\hat{\mathcal{O}} \subset \mathfrak{a}\hat{\mathcal{O}}$ となるもの全てを動く）である。つまり、elliptic な Eisenstein 級数の係数の「約数の $\kappa - 1$ 乗の和」の一般化である。

このような Fourier 展開から、例えば正則保型形式の各 Fourier 係数に $\theta \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ を施すいわゆる Galois action により、Eisenstein 級数はやはり Eisenstein 級数に移されることが分かる。（しかもその行き先がはっきり分かる。）

なお、このような Eisenstein 級数の Fourier 係数の計算は、一般的には [2] で行われている種類の計算を用いる。

# 参考文献


[1] P. B. Garrett, Holomorphic Hilbert Modular Forms, Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics Series.

[2] G. Shimura, Confluent hypergeometric functions on tube domains, Math. Ann. **260**(1982), 269-302.

[3] G. Shimura, On the Eisenstein series of Hilbert modular groups, Revista Mathematica Iberoamericana **1**(1985), 1-42