講演者：長岡昇勇（近畿大学理工学部）
講演題目：Serre's p-adic modular forms
講演要旨
J.-P. Serre は論文

" Formes modulaires et fonction zêta p-adiques"

において，p 進 modular 形式の概念を定義し，その性質を考察した。通常の ($SL_2(\mathbb{Z})$ に関する) modular 形式は q 展開を通して，$\mathbb{C}$ 係数の冪級数とみなされるが，p 進 modular 形式は，有理係数の modular 形式の列の p 進一様収束した極限冪級数として定義される．
もちろん，通常の（$SL_2(\mathbb{Z})$ に関する)modular 形式を含む概念で，たとえば，$P = 1 - 24\sum \sigma_1(n)q^n$ は良く知られているように，通常の意味では modular 形式とはならないが，weight が 2 の p 進 modular 形式となることが示される．また，$\Gamma_0(p)$ に対する modular 形式は全て p 進 modular 形式となっている．
p 進 modular 形式の理論の応用の一つとして，p 進 zeta 関数の構成に関するものがある．Serre の理論においては，まず，有理係数をもつ modular 形式の列が p 進的に収束すれば，それらに対応する weight の列もある意味で p 進的に収束するということが示される．これより，p 進 modular 形式において (Fourier 展開の) 定数項以外の p 進的性質は，定数項に「遺伝する」ことが示される．これを Eisenstein 級数に適用すれば，定数項以外の「約数の冪和」の p 進的性質（これは容易）が，定数項の zeta 関数の p 進的性質に「遺伝して」Kubota-Leopoldt の p 進 L-関数が得られるという仕掛けである．これは，すでに得られている p 進 L-関数の新しい構成法と考えられるが，Hilbert modular 形式を考えることにより，総実代数体の zeta 関数の p 進的性質が得られる．その idea は次の通りである．まず与えられた総実代数体に対する Hilbert modular 群上の Eisenstein 級数を考え，定数項にその体の zeta 関数が現れるよう正規化しておく．そこで，変数を diagonal に制限すると（$SL_2(\mathbb{Z})$ に関する) 一変数の modular 形式が得られ，再び定数項以外の p 進的性質が定数項に反映して，総実代数体の zeta 関数の p 的性質が得られるというものである．
p 進 modular 形式の概念はその後直ちに，Katz 等により別の定式化がされ，研究されている．総実代数体の zeta 関数の p 進的性質については，Delige-Ribet により直ちに精密化されている．また，最近 E. Goren を中心に p-adic modular 形式の理論の研究が復活している．これらについては，他の講演で紹介されると思われる．

参考文献

[1] F. Andreatta and E. Z. Goren: Hilbert modular forms: mod p and p-adic aspects, to appear in the Memoirs of the AMS.

[2] P. Deligne and K. A. Ribet: Values of abelian L-functions at negative integers over totally real fields, Invent. Math. **59**(1980), 227-286.

[3] E. Z. Goren: Hasse invariants for Hilbert modular varieties, Israel J. Math. **122**(2001), 157-174.

[4] E. Z. Goren: Hilbert modular forms modulo p^m− unramified case, J. Number Theory **90**(2001), 341-375.

[5] F. Q. Gouvêa: Arithmetic of p-adic modular forms, Lecture Notes in Math., vol. 1304, Springer, Berlin, 1988.

[6] K. Iwasawa: Lectures on p-adic L functions, Ann. Math. Studies 74, Princeton Univ. Press, 1972.

[7] N. M. Katz: p-adic properties of modular schemes and modular forms, Modular Functions of One Variable. III(Antwerp,1972), Lecture Notes in Math., vol. 350, Springer, Berlin, 1973, 69-190.

[8] N. M. Katz: Higher congruence between modular forms, Ann. of Math. **101**(1975), 332-367.

[9] N. M. Katz: p-adic interpolation of real analytic Eisenstein series, Ann. of Math. **104**(1976), 459-571.

[10] T.Kubota and H.W.Leopoldt: Eine p-adische Theorie der Zetawerte, J. Crelle **214-215**(1964), 328-339.

[11] J.-P.Serre: Congruences et formes modulaires (d'apres H.P.F.Swinnerton-Dyer), Sém.Bourbaki, 1971/72, Annuaire du College de France, 1972/73, Paris, p.55-60.

[12] J.-P.Serre: Formes modulaires et fonction zêta p-adiques, Modular Functions of One Variable. III(Antwerp,1972), Lecture Notes in Math., vol. 350, Springer, Berlin, 1973

[13] H.P.F.Swinnerton-Dyer:On l-adic representations and congruences for coefficients of modular forms, Modular Functions of One Variable. III(Antwerp,1972), Lecture Notes in Math., vol. 350, Springer, Berlin, 1973