実数の有理数近似と連分数展開

詫間電波工業高等専門学校　一般教科　橋本竜太　(Ryūta Hashimoto)

概 要

実数 α に対して，$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}$ を満たす有理数 p/q は α の主近似分数である。この性質は Lagrange の定理として知られており，不定方程式論においては重要な役回りを演じます。本稿ではこの定理の証明を一番の目標として，実数の有理数近似と連分数展開との関連を紹介します。

0　$\sqrt{2}$ の有理数近似と連分数展開

実数の有理数近似の一般論を展開する前に，具体例として $\sqrt{2}$ の有理数近似を採り上げてみます。

0.1　$\sqrt{2}$ってどんな数？

学校の数学の授業で $\sqrt{2}$ が最初に現れるのは中学校 3 年生のとき。もちろん，2 乗すると 2 になる正の実数のことです。しかし，その数をより身近に感じてもらうためには，そのような定性的（というより代数的）な説明だけでなく，最初は定量的に数の大きさを考えてみてもらうのが良さそうです。

1.4 だと $1.4^2 = 1.96$ だから小さ過ぎる。1.5 だと $1.5^2 = 2.25$ だから大き過ぎる。だから，$1.4 < \sqrt{2} < 1.5$。さらに詳しく調べてみると，$1.41 < \sqrt{2} < 1.42$，$1.414 < \sqrt{2} < 1.415$，$\ldots$。このようにして，$\sqrt{2} = 1.41421356\ldots$ ということがわかります。これを語呂合わせで「一夜一夜に人見頃」と覚えておくと便利です。

他にも，たとえば $\sqrt{3}$ は，$1.7320508\ldots$。「人並みにおごれや」。それから，$\sqrt{5}$ は $2.2360979\ldots$。「富士山麓オーム鳴く」。これをうっかり「富士山麓にオーム鳴く」といって $2.236\dot{2}0679$ のように 2 を入れてはいけません。

授業でこんな話をしていると,「覚えなくてはいけないのですか？」という質問を学生から受けたりします。そんなときは，せっかく日本語の国に生きているのだから，文化として知っておこうではないか，といった回答をしています。たとえば，円周率 π。日本語では「産医師異国に向こう 産後厄なく 産婦御社に 虫散々闇に鳴く」という語呂合わせが有名です。英語だと「Yes, I have a number.」というのがあるそうです。単語の文字数を数えれば，コンマを小数点と見立てて，3.1416。それに比べて，日本語の語呂合わせは $3.14159265358979323846264338327 9\ldots$。小数点以下 30 桁。素晴らしいではないですか。

ついでながら，Napier の数 $\mathrm{e} = 2.718281828459045\ldots$。「鮒 一鉢二鉢 一鉢二鉢 至極惜しい」というのがあるそうです。

0.2 $\sqrt{2}$ の有理数近似

ところで，1.41421356 は 1 と 2 の間を 1 億等分する目盛りにより見つかった近似値といえます。どの程度 $\sqrt{2}$ に近いのか。差を採ってみましょう。

$$\sqrt{2} - 1.41421356 \fallingdotseq 2.37 \times 10^{-9}\text{。}$$

しかし，1 と 2 の間を 15994428 等分することで得られる近似値 $\frac{22619537}{15994428}$ ならば，誤差は

$$\sqrt{2} - \frac{22619537}{15994428} \fallingdotseq -1.38 \times 10^{-15}\text{。}$$

1 億等分したときと比べると小さくなっているのです。目盛りの数は約 6 分の 1 で済んでいるのに。

そうはいっても，小数が 9 桁分と比べると，分数は分母も分子も 8 桁。覚えるのが大変ではないか。そういわれるならば，分母や分子の桁数を減らすことだってできます。1 と 2 の間を 13860 等分することにすれば，

$$\sqrt{2} - \frac{19601}{13860} \fallingdotseq -1.84 \times 10^{-9}\text{。}$$

1 億等分したときと同程度の近似値が得られます。

それでも，人によっては不満かもしれません。小数だと近似値の右に次々に数字を付け加えることでより良い近似値が得られるのに，分数ではそうはいかないではないか，というように。

しかしながら本稿では，1 と 2 の間をできるだけ粗く区切って，それでもよい近似値を得るということを考えましょう。1.41421356 という近似値は，1 と 2 の間を 1 億等分した，いや，分数で表せば約分できる $\left(\frac{141421356}{100000000} = \frac{35355339}{25000000}\right)$ から 2500 万等分して得られた，と言うとしても，$\left|\sqrt{2} - 1.41421356\right| > \left|\sqrt{2} - \frac{22619537}{15994428}\right|$，つまり，15994428 等分した場合に及ばないので，$\sqrt{2}$ の近似としては良い近似ではないと見なすわけです。

整数の間を等間隔に区切って，それ以上粗く区切るとよい近似が得られない場合，その目盛りで得られる近似値を「良い近似」であるとしましょう。より正確には，次の条件を満たす有理数 $\frac{p}{q}$ を $\sqrt{2}$ の良い近似値であると認めることにします：

$$\frac{p'}{q'} \neq \frac{p}{q} \text{ かつ } q' \leq q \text{ ならば，} \left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right| < \left|\sqrt{2} - \frac{p'}{q'}\right|\text{。}$$

この意味で $\sqrt{2}$ の良い近似である有理数を分母の小さい順に挙げていくと，次の通りです：

$$1,\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{7}{5},\ \frac{17}{12},\ \frac{24}{17},\ \frac{41}{29},\ \frac{99}{70},\ \frac{140}{99},\ \frac{239}{169},\ \frac{577}{408},\ \frac{816}{577},\ \frac{1393}{985},\ \ldots\text{。}$$

0.3 $\sqrt{2}$ の連分数展開

ところで，$\sqrt{2}$ を整数部分と小数部分とに分けてみます：

$$\sqrt{2} = 1 + 0.4142\ldots\text{。}$$

小数部分の逆数は

$$\frac{1}{0.4142\ldots} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + 1 = 2 + 0.4142\ldots,$$

つまり，2 と 3 の間ですから，$\sqrt{2}$ は $1 + \frac{1}{2}$ と $1 + \frac{1}{3}$ の間にあることがわかります。さらに，

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + 0.4142\ldots} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + 0.4142\ldots}}$$

ですから，$\sqrt{2}$ は $1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}$ と $1+\frac{1}{2+\frac{1}{3}}$ の間の数です。

このように見ていくと，

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= 1+0.4142\ldots = 1+\cfrac{1}{2+0.4142\ldots}\\ &= 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+0.4142\ldots}} = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+0.4142\ldots}}} = \cdots\end{aligned}$$

と変形した上で 1 に満たない部分を切り捨てた

$$1,\quad 1+\frac{1}{2},\quad 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}},\quad 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}},\quad \ldots$$

が $\sqrt{2}$ に近い有理数を表しているのではないかと考えることができます。近いといっても，良い近似になっているかどうかは別問題。ものは試しに，このようにして得られる有理数を並べてみると，

$$1,\ \frac{3}{2},\ \frac{7}{5},\ \frac{17}{12},\ \frac{41}{29},\ \frac{99}{70},\ \frac{239}{169},\ \frac{577}{408},\ \frac{1393}{985},\ \ldots。$$

先程の意味での「良い近似」ばかりです。しかし，すべての「良い近似」が出てくるわけではありません。それでは，ここに出てきた有理数は「良い近似」の中でもさらに良いものだったりするのでしょうか。

1　無理数の連分数展開

1.1　連分数展開のアルゴリズム

実数 ξ の整数部分を表すのにガウス記号と呼ばれる記号「$[\xi]$」を用いることがあります。正確には，整数 $[\xi]$ は次の不等式を満たすもの（として一意に定まるもの）とするのです。

$$[\xi] \le \xi < [\xi]+1$$

その一方，実数 ξ 以下の整数の中で最大のものと，実数 ξ 以上の整数の中で最小のものとを表す記号がそれぞれあった方が便利だというので，最近では，前者を $\lfloor \xi \rfloor$，後者を $\lceil \xi \rceil$ で表すことが多くなってきたようです：

$$\lfloor \xi \rfloor \le \xi < \lfloor \xi \rfloor + 1,\quad \lceil \xi \rceil - 1 < \xi \le \lceil \xi \rceil。$$

本稿ではガウス記号ではなくこちらの記号を採用します。

さて，実数 α に対して，α を整数部分と小数部分に分けます。整数部分 $\lfloor \alpha \rfloor$ を c_0 とします。小数部分 $\alpha - c_0$ の逆数 α_1 は 1 より大きい。そこで，α_1 を整数部分 c_1 と小数部分 $\frac{1}{\alpha_2}$ に分けます。α_2 は 1 より大きいので，整数部分 c_2 と小数部分 $\frac{1}{\alpha_3}$ に分けます。このような操作を繰り返します。数式で表すと，次のようなことになります。便宜上，$\alpha_0 = \alpha$ と規約しておきましょう。

$$\begin{gathered}\alpha_0 = \alpha,\qquad c_0 = \lfloor \alpha_0 \rfloor,\qquad \alpha_1 = \frac{1}{\alpha_0 - c_0},\qquad c_1 = \lfloor \alpha_1 \rfloor,\qquad \alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1 - c_1},\\ \ldots,\qquad c_k = \lfloor \alpha_k \rfloor,\qquad \alpha_{k+1} = \frac{1}{\alpha_k - c_k},\qquad \ldots。\end{gathered}$$

ここに出てきた c_k を第 k **部分商**と呼ぶことにします。なお，ある n について $c_n = \alpha_n$ となった場合は，差の逆数を採ることができないので，計算はそこでおしまいとします。

このアルゴリズムに現れた等式 $\alpha_{k+1} = \frac{1}{\alpha_k - c_k}$ を変形すると $\alpha_k = c_k + \frac{1}{\alpha_{k+1}}$ という形が得られます。$\alpha = \alpha_0$ でしたので，

$$\alpha = c_0 + \cfrac{1}{\alpha_1} = c_0 + \cfrac{1}{c_1 + \cfrac{1}{\alpha_2}} = c_0 + \cfrac{1}{c_1 + \cfrac{1}{c_2 + \cfrac{1}{\alpha_3}}} = \cdots$$

ずらずらっと分数が連なっている形。この分数を**連分数**と呼んだり，このような連分数の形を求めることを**連分数展開**といったりするわけです。

ただ，連分数を素直に繁分数として書いているとけっこう紙面を消費してしまい，他のことを多く書けなくなってしまうというので，次のような記法が採用されることがあります。

$$\alpha = [\ c_0,\ \alpha_1\ ] = [\ c_0,\ c_1,\ \alpha_2\ ] = [\ c_0,\ c_1,\ c_2,\ \alpha_3\ ] = \cdots$$

本稿ではこの記法を採用することにします。具体例をいくつか挙げておきます。

$$\sqrt{3} = [\ 1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ \ldots\ ], \qquad \pi = [\ 3,\ 7,\ 15,\ 1,\ 292,\ 1,\ 1,\ \ldots\ ],$$
$$\sqrt{5} = [\ 2,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ \ldots\ ], \qquad \mathrm{e} = [\ 2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 1,\ 4,\ 1,\ \ldots\ ]$$

1.2 主近似分数

実数 α を連分数展開すると，得られた連分数を途中までで切ることで，有理数 $[\ c_0,\ c_1,\ \ldots, c_k\ ]$ が得られます。これを α の第 k **主近似分数**と呼びます。「近似」という言葉を使いましたが，ここでの定義だけでは近似という言葉を採用するのがどの程度妥当なのかわかりません。しかも,「主」という字までついています。「主近似」と呼ぶにふさわしい有理数なのかどうかは後に判明するはずなので，暫く我慢して下さい。

たとえば，先ほど挙げた $\sqrt{2}$ とかの場合ですと，

$$\sqrt{2} = [\ 1,\ 2.414\ldots\ ] = [\ 1,\ 2,\ 2.414\ldots\ ] = [\ 1,\ 2,\ 2,\ 2.414\ldots\ ] = \cdots$$

という形で書くことができるわけですから，$\sqrt{2}$ の第 0 次近似分数は $[\ 1\ ] = 1$，第 1 次近似分数は $[\ 1,\ 2\ ] = \frac{3}{2}$,，第 2 次近似分数は $[\ 1,\ 2,\ 2\ ] = \frac{7}{5}$，$\cdots$ という具合です。

ところで，整数成分の 2 次正則行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ の実数 α への次のような作用を考えます：

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \alpha = \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d}\ 。$$

早い話，一次分数変換です。本稿を読んで下さっている方の中にはおなじみという方が多いことでしょう。実際に作用になっているというのは，次のことが成り立っているということです：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \alpha = \alpha; \quad B(A\alpha) = (BA)\alpha \quad (\ A, B \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})\ )。$$

確かめるのは簡単です。

さて，等式 $c+\dfrac{1}{\alpha}=\begin{pmatrix} c & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\alpha$ が成り立つことを利用すると，

$$\begin{aligned}\alpha = [\ c_0,\ c_1,\ \ldots,\ c_{n-1},\ \alpha_n\ ] &= c_0 + \frac{1}{[\ c_1,\ \ldots,\ c_{n-1},\ \alpha_n\ ]} \\ &= \begin{pmatrix} c_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} [\ c_1,\ \ldots,\ c_{n-1},\ \alpha_n\ ] \\ &= \begin{pmatrix} c_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} [\ c_2,\ \ldots,\ c_{n-1},\ \alpha_n\ ] \\ &= \cdots = \begin{pmatrix} c_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} c_{n-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\alpha_n\text{。}\end{aligned}$$

このように書けることに気がつけば，

$$\begin{pmatrix} c_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} c_{k-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

という行列に意味があると思うのはとても自然なことでしょう。そこで，数列 $\{p_k\}$，$\{q_k\}$ を次で定義します：

$$\begin{pmatrix} p_k & * \\ q_k & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} c_{k-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\text{。}$$

$*$ を付けているところはひとまずおいておきます，とはいわなくても，実はすぐにわかるのです。右辺の行列の積は一番右の行列を除いて考えれば，

$$\begin{pmatrix} p_k & * \\ q_k & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{k-1} & * \\ q_{k-1} & * \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & p_{k-1} \\ * & q_{k-1} \end{pmatrix}\text{。}$$

ですから，次のことがわかるわけです：

$$\begin{pmatrix} p_k & p_{k-1} \\ q_k & q_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} c_{k-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\text{。} \tag{1}$$

改めて計算をし直してみると，

$$\begin{pmatrix} p_k & p_{k-1} \\ q_k & q_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{k-1} & p_{k-2} \\ q_{k-1} & q_{k-2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_k p_{k-1} + p_{k-2} & p_{k-1} \\ c_k q_{k-1} + q_{k-2} & q_{k-1} \end{pmatrix}\text{。}$$

こうして次の漸化式が得られることになります：

$$\begin{aligned} p_k &= c_k p_{k-1} + p_{k-2}, \quad p_{-1} = 1, \quad p_0 = c_0; \\ q_k &= c_k q_{k-1} + q_{k-2}, \quad q_{-1} = 0, \quad q_0 = 1\text{。}\end{aligned} \tag{2}$$

このように数列 $\{p_k\}$, $\{q_k\}$ を定義すると，有理数 p_k/q_k が，実は第 k 主近似分数になっているのです。次のような計算で確認できます：

$$\begin{aligned}[\ c_0,\ c_1,\ \ldots,\ c_k\ ] &= \begin{pmatrix} c_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} c_{k-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} c_k \\ &= \begin{pmatrix} p_{k-1} & p_{k-2} \\ q_{k-1} & q_{k-2} \end{pmatrix} c_k = \frac{p_{k-1}c_k + p_{k-2}}{q_{k-1}c_k + q_{k-2}} = \frac{p_k}{q_k}\text{。}\end{aligned}$$

主近似分数は部分商がわかれば漸化式を使って簡単に計算をすることができるというわけです。

ところで，等式 (1) の両辺の行列式を採ると，

$$p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k+1} \text{。} \tag{3}$$

この等式から p_k と q_k とが互いに素であるということがわかります。

1.3　主近似分数との誤差の評価

等式 (3) を $q_k q_{k-1}$ で割ると，

$$\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = \frac{(-1)^{k+1}}{q_k q_{k-1}} \text{。} \tag{4}$$

第 k 主近似分数と第 $(k-1)$ 主近似分数との差はこのような形で書けます。

それからもうひとつ。

$$\begin{vmatrix} p_k & p_{k-2} \\ q_k & q_{k-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_k p_{k-1} + p_{k-2} & p_{k-2} \\ c_k q_{k-1} + q_{k-2} & q_{k-2} \end{vmatrix} = c_k \begin{vmatrix} p_{k-1} & p_{k-2} \\ q_{k-1} & q_{k-2} \end{vmatrix} = (-1)^k c_k \text{。}$$

すなわち，

$$p_k q_{k-2} - p_{k-2} q_k = (-1)^k c_k \text{。}$$

この両辺を $q_k q_{k-2}$ で割ると，

$$\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} = \frac{(-1)^k c_k}{q_k q_{k-2}} \text{。} \tag{5}$$

こちらは第 k 主近似分数と第 $(k-2)$ 主近似分数との差を表しています。

これらを注意してみると，主近似分数がどういう風な振る舞いをするかというのが結構良くわかるのです。たとえば，等式 (4) で $k = 1$ にすると $p_1/q_1 > p_0/q_0$ ということがわかります。第 2 主近似分数については等式 (4) に $k = 2$ をすれば，$p_2/q_2 < p_1/q_1$ ということがわかる。また，$p_2/q_2 > p_0/q_0$ ということが等式 (5) で $k = 2$ を代入すればわかります。

次に，両式に $k = 3$ を代入して正負を調べると，$p_2/q_2 < p_3/q_3 < p_1/q_1$ ということがわかる。同様の計算を進めると，主近似分数の振る舞いが次のようにわかります：

$$\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \cdots < \frac{p_{2k}}{q_{2k}} < \frac{p_{2k+2}}{q_{2k+2}} < \cdots < \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}} < \frac{p_{2k-1}}{q_{2k-1}} < \cdots < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1} \text{。}$$

とくに，主近似分数を並べてできる数列は収束するということもわかります。

収束値がもともとの実数 α であることは，直観的には明らかでしょうが，計算で確かめておきましょう。この計算は連分数が出てきたときによくなされる計算の一例にもなりますので。

その前に，数列 $\{q_k\}$ は狭義単調増加であることを確認しておきます。漸化式 $q_k = c_k q_{k-1} + q_{k-2}$ より明らかです。ただし，1 箇所だけ，q_0 と q_1 は等しくなることがあり得ます：

$$1 = q_0 \leq q_1 < q_2 < q_3 < \cdots \text{。}$$

それでは，α と主近似分数との差を調べてみます。

$$\alpha = [\ c_0,\ c_1,\ \ldots,\ c_k,\ \alpha_{k+1}\ ] = \begin{pmatrix} p_k & p_{k-1} \\ q_k & q_{k-1} \end{pmatrix} \alpha_{k+1} = \frac{\alpha_{k+1} p_k + p_{k-1}}{\alpha_{k+1} q_k + q_{k-1}}$$

ですから，

$$\alpha - \frac{p_k}{q_k} = \frac{\alpha_{k+1} p_k + p_{k-1}}{\alpha_{k+1} q_k + q_{k-1}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{p_{k-1} q_k - p_k q_{k-1}}{q_k(\alpha_{k+1} q_k + q_{k-1})} = \frac{(-1)^k}{q_k(\alpha_{k+1} q_k + q_{k-1})} \text{。}$$

$\{q_k\}$ が単調増加なので，α とその主近似分数との差が 0 に収束することがわかります。

ここで満足せずに，もう少し計算をしてみましょう。後の話の都合上，この差の絶対値の評価をしておきたいのです。まずは上からの評価。

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| = \frac{1}{q_k(\alpha_{k+1}q_k + q_{k-1})} < \frac{1}{q_k(c_{k+1}q_k + q_{k-1})} = \frac{1}{q_k q_{k+1}}\text{。}$$

次は下からの評価。

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| = \frac{1}{q_k(\alpha_{k+1}q_k + q_{k-1})} > \frac{1}{q_k((c_{k+1}+1)q_k + q_{k-1})} = \frac{1}{q_k(q_{k+1} + q_k)}\text{。}$$

以上をまとめると，

$$\frac{1}{q_k(q_{k+1} + q_k)} < \left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}}\text{。} \tag{6}$$

α と主近似分数との誤差について，上からの評価と下からの評価がえられました。さらに，この不等式の各辺に q_k をかけると，

$$\frac{1}{q_{k+1} + q_k} < |q_k\alpha - p_k| < \frac{1}{q_{k+1}}\text{。} \tag{7}$$

この不等式が後で重要な役割を果たします。

1.4 補足

本稿では以下の事項は必要としませんが，実数の連分数展開というと普通は触れられる話題ですので，紹介だけしておきます。

連分数展開のアルゴリズムの停止性　本稿では α として基本的に無理数を扱っていると思って下さりたいのですが，有理数の場合は，連分数展開のアルゴリズムは途中で止まってしまいます。実は，α の連分数展開のアルゴリズムが止まらないことと α が無理数であることとは同値です。

部分商の一意性　無理数 α の連分数展開のアルゴリズムから部分商の列を得て，漸化式 (2) より有理数列を得ると，それは α に収束することを紹介しました。一方，正整数列 $\{c_k\}_{k\geq 0}$（ただし c_0 は負や 0 でも可）を先に用意して，漸化式 (2) より有理数列 $\{p_k/q_k\}_k$ を作ると，収束します。その収束値は無理数であり，その無理数の連分数展開で得られる部分商の列は $\{c_k\}_k$ に一致します。以上は，たとえば [小] を御参照下さい。

このことからとくに，無理数の連分数展開は一意的であることがわかります。なお，有理数に関してもほとんど同様の性質があります。

Euclid の互除法と連分数　2 つの正整数 $a,\ b$ の最大公約数を求める方法として Euclid の互除法が知られています。少し注意すると，有理数 a/b の連分数展開の計算に通じるものがあることがわかります。

1 次不定方程式　a, b を整数とする不定方程式 $ax - by = 1$ の整数解は，一つ求まれば残りのものはすべて求まります。最初の一つを求めるのが問題なのですが，a/b の連分数展開を上手に利用する方法があるのです。

1.5　別の補足

講演中の休憩時にこんな雑談がありましたので，紹介しておきます。

質問　連分数展開のアルゴリズムにおいて，整数部分として $\lfloor \xi \rfloor$ ではなく $\lceil \xi \rceil$ を採用する話もあるようですが。つまり，次のような計算。

$$\alpha'_0 = \alpha, \qquad c'_0 = \lceil \alpha'_0 \rceil, \qquad \alpha'_1 = \frac{1}{c'_0 - \alpha'_0}, \qquad c'_1 = \lceil \alpha'_1 \rceil, \qquad \alpha'_2 = \frac{1}{c'_1 - \alpha'_1},$$
$$\ldots \qquad c'_k = \lceil \alpha'_k \rceil, \qquad \alpha'_{k+1} = \frac{1}{c'_k - \alpha'_k}, \qquad \ldots$$

回答　$\lfloor \xi \rfloor$ を採るものと $\lceil \xi \rceil$ を採るものとは全く無関係ではありません。少し調べてみれば，$\{c_k\}$ と $\{c'_k\}$ との関係を書き下すことができることもわかります。

それから，$\lfloor \xi \rfloor$ を採る連分数が $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ による作用と関連があるのに対して，$\lceil \xi \rceil$ を採る連分数は $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ による作用と関連があります。2 次体論に関連させると，前者が広義の類別を，後者は狭義の類別を考えていることに相当します。

2　実数の有理数近似

2.1　2 種類の最良近似

本稿の導入で $\sqrt{2}$ の近似について次のような考え方を提案しました。2 つの隣り合う整数の区間をできるだけ粗く区切って，粗く区切っているんだけれど近いもの，そういうものがよりよいものだ，というふうにしたらどうだろうか。

以下，実数を近似する有理数について，分母は正であると規約しておきます。有理数 p/q が α の最良近似であるとは，

$$\frac{p}{q} \neq \frac{p'}{q'} \text{ かつ } q' \leq q \text{ ならば，} \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \left| \alpha - \frac{p'}{q'} \right| \text{ が成り立つ，}$$

すなわち，これ以上粗く区切るとより近いものは得られないよ，と，このように考えるのは自然であると，本稿をここまで読んで下さった方はそのように思いながら読んで下さっていることでしょう。ところが，いろいろな教科書を見てみるとこのような書き方をしているものが少ないのです。多くの教科書では次のような定義を採用しているようです：

$$\frac{p}{q} \neq \frac{p'}{q'} \text{ かつ } q' \leq q \text{ ならば，} |q\alpha - p| < |q'\alpha - p'| \text{ が成り立つ。}$$

つまり，α の一次形式ができるだけ小さくなるように，と定義している教科書のほうが圧倒的に多いような印象を筆者は受けています。余談ですが，岩波の数学辞典第 3 版 [岩] の連分数の項 (443.B) では前者を最良近似としています。

この 2 つの定義，見掛けが違うのはもちろんですが，実際に違います。ヒンチンという連分数に関して有名な方が書いた非常に薄い教科書 [K] がありますが，本稿ではそれに従うことにして，前者を**第 1 種**の**最良近似**，後者を**第 2 種**の**最良近似**と呼ぶことにしたいと思います。

第 2 種であれば第 1 種であるということは，結構簡単にわかります。次の不等式で十分でしょう：

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| = \frac{1}{q}\left|q\alpha - p\right| < \frac{1}{q'}\left|q'\alpha - p'\right| = \left|\alpha - \frac{p'}{q'}\right| 。$$

それでは逆に第 1 種最良近似であれば第 2 種最良近似であるかということですが，それは言えないのです。連分数と関連付けて説明してみます。

2.2　第 2 種最良近似は主近似分数

第 2 種最良近似であれば，それは主近似分数になっている，ということが実はわかるのです。証明してみましょう。

α という無理数があるときに p/q が第 2 種最良近似であれば主近似分数であるということを示したいのですが，対偶を示すことにします。つまり，主近似分数でなければ第 2 種最良近似ではないということを示すのです。

p/q が主近似分数でなければ，次の 3 通りの可能性があります。

- $p/q < p_0/q_0$ であるか，
- $p/q > p_1/q_1$ であるか，
- p_{k-1}/q_{k-1} と p_{k+1}/q_{k+1} の間に p/q があるような k が決まるか。

1 番目と 2 番目の場合についてはどちらにしても次の不等式が成り立ちます：

$$|\alpha - c_0| < |q\alpha - p| 。$$

この不等式から p/q は第 2 種最良近似ではないということがわかります。

3 番目の場合を確かめてみましょう。関係する数の大小関係は次のようになっています：

$$\begin{aligned} &\frac{p_k}{q_k} < \alpha < \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} < \frac{p}{q} < \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} \quad (k \text{ が偶数})；\\ &\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} < \frac{p}{q} < \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} < \alpha < \frac{p_k}{q_k} \quad (k \text{ が奇数})。\end{aligned} \tag{8}$$

数直線上にこれらの数が並んでいる様子を見れば，k の偶奇にかかわらず次の不等式における左の不等号が成り立つことは一目瞭然です。

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \left|\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{p}{q}\right| = \frac{|qp_{k+1} - pq_{k+1}|}{qq_{k+1}} \geq \frac{1}{qq_{k+1}} 。$$

右の不等号は「0 ではない正整数は 1 以上である」ということによります。

最左辺と最右辺をそれぞれ q 倍したものを比べると，次の不等式の左の不等号。

$$|q\alpha - p| > \frac{1}{q_{k+1}} > |q_k\alpha - p_k| 。\tag{9}$$

右の不等号は評価式 (7) によります。

その一方で，次の不等式も成り立っています：

$$\frac{1}{qq_{k-1}} \leq \left|\frac{p}{q} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right| < \left|\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right| = \frac{1}{q_kq_{k-1}} 。$$

真ん中の不等号は (8) から明らか。左の不等号は通分して「0 ではない正整数は 1 以上である」によります。右の等号は通分して (3)。

分母を払うと $q_k < q$ であることがわかります。

もしも p/q が第 2 種最良近似であるならば，$q_k < q$ なので，$|q\alpha - p| < |q_k\alpha - p_k|$。これは (9) に矛盾します。第 2 種最良近似であれば矛盾が起こることになりますので，p/q は第 2 種最良近似ではない，ということになります。

こうして，主近似分数でなければ第 2 種最良近似ではない，ということが確認できました。つまり，第 2 種最良近似であれば主近似分数なのです。

2.3 主近似分数は第 2 種最良近似

実は，逆も成り立つのです。主近似分数ならば第 2 種最良近似なのです。つまり結論としては，主近似分数と第 2 次最良近似とは全く同じものなのです。ただし，例外がひとつだけあります。$\alpha - \lfloor\alpha\rfloor > 1/2$ の場合の第 0 主近似分数がそれです。

証明です。第 k 主近似分数が第 2 種最良近似であるかを調べてみましょう。$0 < q \leq q_k$ なる有理数 p/q は有限個ですから，その中で $|q\alpha - p|$ が最小のものを採ることができるはずです。複数あるときには q がより小さいものを採ることにします。$\gcd(p,q) = 1$ であることを注意しておきます。

$|q\alpha - p|$ の選び方ゆえに，p/q は第 2 種最良近似です。ですから，$(p,q) = (p_k, q_k)$ であることが示されればよいわけです。

先程証明したことによれば，第 2 種最良近似ならば主近似分数です。p/q が第 2 種最良近似であり，$\gcd(p,q) = 1$ なので，$p = p_j$，$q = q_j$ となる j が存在するはずです。そして，$q_j = q \leq q_k$ であり，$\{q_*\}$ がほぼ単調増加なので，1 つの例外を除いて $j \leq k$ が成り立ちます。

1 つの例外とは，$q_0 = q_1 = 1$ の場合。このときは $k = 0$，$j = 1$ もありえます。この場合が $\alpha - \lfloor\alpha\rfloor > 1/2$ の場合に相当するのです。そして，p_0/q_0 が第 2 種最良近似ではないことは容易にわかります。

さて，$j \leq k$ であることがわかり，その続きです。もしも $j < k$ ならばどういうことになるでしょうか。そのときは次のような不等式が成り立ちます：

$$\frac{1}{q_{k-1} + q_k} \leq \frac{1}{q_j + q_{j+1}} < |q_j\alpha - p_j| \leq |q_k\alpha - p_k| < \frac{1}{q_{k+1}} 。$$

(p,q) の選び方のために 3 番目の不等号が成り立ちます。2 番目と 4 番目の不等号は評価式 (7) から。そして 1 番目の不等号は $\{q_*\}$ の単調増加性。

この不等式の最左辺と最右辺とを比べて，分母を払うと，$q_{k+1} < q_{k-1} + q_k$。ですが，$\{q_*\}$ の漸化式によれば，これは有り得ません。

$j < k$ であれば矛盾が起こるので，$j = k$ ということになります。

ということで，主近似分数ならば第 2 種最良近似であるということがいえました。

2.4 中間近似分数

ちなみに第 1 種最良近似についてですが，第 1 種最良近似には主近似分数の他に中間近似分数と呼ばれるものが現れます。それ以外の有理数は現れません。そのことを少しだけ紹介しておきます。

主近似分数は $\frac{p_k}{q_k} = \frac{c_k p_{k-1} + p_{k-2}}{c_k q_{k-1} + q_{k-2}}$ なる形をしています。c_k の代わりに $1 \leq c'_k < c_k$ なる c'_k により $\frac{c'_k p_{k-1} + p_{k-2}}{c'_k q_{k-1} + q_{k-2}}$ の形で書かれる有理数が**中間近似分数**と呼ばれるものです。

k を偶数とします。奇数の場合も同様に考えることができます。第 k 主近似分数，第 $k+1$ 主近似分数，そして α の大小関係は次のようになっています：

$$\frac{p_k}{q_k} < \alpha < \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} 。$$

第 k 主近似分数と第 $k+1$ 主近似分数の分母どうしおよび分子どうしを足し合わせて得られる有理数 $\frac{p_{k+1}+p_k}{q_{k+1}+q_k}$ は，2 つの有理数の間にある有理数のうち分母が一番小さいものなのです。そして，大小関係は次のようになります：

$$\frac{p_k}{q_k} < \frac{p_{k+1}+p_k}{q_{k+1}+q_k} < \alpha < \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}\ 。$$

この性質は主近似分数のものというよりは，Faray 数列の性質です。

α をはさむ 2 つの有理数について同様のことをしてみると，

$$\frac{p_k}{q_k} < \frac{p_{k+1}+p_k}{q_{k+1}+q_k} < \frac{2p_{k+1}+p_k}{2q_{k+1}+q_k} < \alpha < \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}\ 。$$

このようなことを続けていくと，

$$\begin{aligned}\frac{p_k}{q_k} &< \frac{p_{k+1}+p_k}{q_{k+1}+q_k} < \frac{2p_{k+1}+p_k}{2q_{k+1}+q_k} < \cdots \\ &< \frac{(c_{k+2}-1)p_{k+1}+p_k}{(c_{k+2}-1)q_{k+1}+q_k} < \frac{c_{k+2}p_{k+1}+p_k}{c_{k+2}q_{k+1}+q_k} = \frac{p_{k+2}}{q_{k+2}} < \alpha < \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}\ 。\end{aligned}$$

中間近似分数はこのようにして現れる有理数なのです。

第 1 種最良近似である有理数は，中間近似分数のうちある種の条件を満たすものに限られます。詳しくは [高] や [河] を御参照下さい。

2.5 Lagrange の定理

第 2 種最良近似が主近似分数と実質的に同じものであることが確認できました。最良近似というのは他の有理数と比べて近いということですが，自分自身の言葉で言えばどれだけ近いのかを見てみましょう。

たとえば，α と第 k 主近似分数との差は，評価式 (6) によれば次のように抑えられます：

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}} < \frac{1}{{q_k}^2}\ 。$$

p/q が主近似分数ならば $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$ が成り立つわけです。

逆のことは言えるのでしょうか。$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$ を満たす有理数 p/q は必ず主近似分数であるのか。実は残念ながらそうではありません。

主近似分数をこのような形で特徴付けるわけにはいかないのですが，より厳しい評価式 $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}$ を考えてみると，この不等式を満たす有理数 p/q は必ず主近似分数なのです。この事実は Lagrange の定理として知られています：

$$\boxed{\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}\ \text{ならば，}\ \frac{p}{q}\ \text{は}\ \alpha\ \text{の主近似分数。}}$$

証明してみましょう。この評価式が成り立っているときに，p/q が第 2 種最良近似になっていることを示せればよいのです。そのためには，

$$|q'\alpha - p'| \leq |q\alpha - p|$$

であるときに，$q' > q$ であることがいえればよいわけです。

不等式の両辺を q' で割ると

$$\left|\alpha - \frac{p'}{q'}\right| \leq \frac{q}{q'}\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{q}{q'} \times \frac{1}{2q^2} = \frac{1}{2q'q} 。$$

ここで $\left|\frac{p'}{q'} - \frac{p}{q}\right|$ を計算してみると，

$$\frac{1}{q'q} \leq \left|\frac{p'}{q'} - \frac{p}{q}\right| \leq \left|\frac{p'}{q'} - \alpha\right| + \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q'q} + \frac{1}{2q^2} = \frac{q+q'}{2q'q^2} 。$$

2 つ目の不等号は三角不等式。その次は今しがた確かめた不等式。一方，1 つ目の不等号は，通分して，分子は 0 でない整数であるということから。

最左辺と最右辺を比べて分母を払えば，$2q < q + q'$，すなわち，$q < q'$。確かにいえました。これで証明が完了しました。

2.6 余談：Lagrange の定理の拡がり

不等式 $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}$ を成り立たせる有理数 p/q が無限に存在することは，連分数とは直接関係ないところで Legendre により証明されています。Lagrange の定理によれば，その有理数は主近似分数ばかり。それでは，主近似分数ならばすべてこの不等式が成り立つかというと，そういうわけにはいきません。しかし，Vahlen が示したところによれば，

- $\frac{p_k}{q_k}$，$\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$ の少なくとも一方は $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}$ を満たす，

つまり，隣り合う主近似分数のうちどちらか一方に対してはこの不等式が成り立つのです。このことからも，この不等式が成り立つ有理数は無限にあることが改めてわかります。

不等式をさらに厳しくして，

- $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}\,q^2}$ を満たす有理数 p/q は無限に存在する

ということを Hurwitz が証明しています。そのような有理数に関して，Borel は次のことを示しました：

- $\frac{p_k}{q_k}$，$\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$，$\frac{p_{k+2}}{q_{k+2}}$ の少なくともひとつは $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}\,q^2}$ を満たす。

さらに，より厳しい不等式を考えるとどのようなことになるのでしょうか。C を定数とする不等式

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{C}{q^2}$$

について，次のようなことが知られています：

- $C > \frac{1}{\sqrt{5}}$ ならば p/q は無限に存在する；
- $C \leq \frac{1}{\sqrt{5}}$ ならば，α が $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ と対等であるときは p/q は有限個しか存在しない；
- $C > \frac{1}{2\sqrt{2}}$ ならば，α が $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ と対等でなければ p/q は無限に存在する；
- $C \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$ ならば，α が $1+\sqrt{2}$ と対等であるときも p/q は有限個しか存在しない；
- $C > \frac{5}{\sqrt{221}}$ ならば，α が $1+\sqrt{2}$ とも対等でなければ p/q は無限に存在する。

ここで，2 つの実数が対等であるというのは，$\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ の作用により移りあうことをいいます。これは実は，連分数展開が途中から一致するということと同値なのです。ちなみに，$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ の連分数展開は $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \left[\ 1,\ 1,\ 1,\ \ldots\ \right]$ のように 1 がずらっと並びます。また，$1+\sqrt{2}$ の連分数展開は $1+\sqrt{2} = \left[\ 2,\ 2,\ 2,\ \ldots\ \right]$ のように 2 がずらっと並びます。

C の評価に現れる数の列 $\frac{1}{\sqrt{5}}$，$\frac{1}{2\sqrt{2}}$，$\frac{5}{\sqrt{221}}$，$\ldots$，$\frac{m}{\sqrt{9m^2-4}}$ は Lagrange spectra として知られています。そして整数 m は Markoff 方程式として知られている 3 元不定方程式

$$m^2 + m_1^2 + m_2^2 = 3mm_1m_2$$

の整数解であることがわかっています。

Markoff といえば確率論で Markov という人がいますが，同一人物です。Waldschmidt の記事 [W] の脚注に書いてあるところでは，確率論のときは “Markov” と綴っているのだというのです。本当なのでしょうか。

話はさらにそれますが，Markoff 方程式の整数解はその構成方法がすでに知られています。解 $(1,1,1)$ からスタートして，2 次方程式の解と係数の関係を利用して新しい解を次々に構成する。その方法で得られるもので解が尽くされるということが証明されています。こうして構成される一連の整数解を Markoff chain と呼んでいます。Markoff chain というと確率論には Markov 連鎖という概念があります。混乱しそうです。もちろん別物です。

何たる時の偶然か，この間（2006 年 2 月）の東京大学の入試でこれにちなむような問題が出題されていました。文科の方では，

- $x^1 + y^1 + z^1 = xyz$ の $0 < x \leq y \leq z$ なる整数解を求めよ。
- $x^3 + y^3 + z^3 = xyz$ の $0 < x \leq y \leq z$ なる実数解は存在しないことを示せ。

一方，理科の方では

- $x^2 + y^2 + z^2 = xyz$ の $0 < x \leq y \leq z$ なる整数解は無限に存在することを示せ。

そんな Markoff 方程式ですが，解明されていないこともいろいろあって，最近も関連論文が次々に発表されているようです。

2.7 Lagrange の定理の Pell 方程式への応用

Lagrange の定理の応用として触れておかないわけにはいかないのが，Pell 方程式への応用です。D は平方数ではない正整数，N は整数，$|N| < \sqrt{D}$ とします。不定方程式 $X^2 - DY^2 = N$ を満たす正整数 X, Y を求めたい。$N = \pm 1$ とするのが普通にいう Pell 方程式ですが，ここでは N の範囲を $|N| < \sqrt{D}$ まで拡げることにします。

ちなみに，この範囲で収まらない N については，収まるような方程式に還元してしまうという方法があります。たとえば [H, §11.5] に載っています。還元しないやり方も，たとえば [橋, 第 7 章] で紹介している方法もありますし，その他，いろいろあるようです。

$N > 0$ の場合は，$0 < N = (X+\sqrt{D}Y)(X-\sqrt{D}Y)$ に注意すると，$0 < X - \sqrt{D}Y$ であり，

$$0 < X - \sqrt{D}Y = \frac{N}{X+\sqrt{D}Y} < \frac{N}{2\sqrt{D}Y} < \frac{1}{2Y}\ 。$$

これより $\left|\sqrt{D} - \frac{X}{Y}\right| < \frac{1}{2Y^2}$ 。よって，X/Y は $\sqrt{D}$ の主近似分数です。

$N<0$ の場合は方程式を $Y^2-\frac{1}{D}X^2=-\frac{N}{D}$ のように変形してから $N>0$ の場合と同様の計算を行うと，不等式 $\left|\sqrt{\frac{1}{D}}-\frac{Y}{X}\right|<\frac{1}{2X^2}$ が得られます。つまり，Y/X は $1/\sqrt{D}$ の主近似分数。よって，X/Y は $\sqrt{D}$ の主近似分数ということになります。

まとめると，Lagrange の定理により，解の候補として主近似分数だけを調べればよいことがわかるのです。

ただし，主近似分数がすべて解であるというわけではありません。主近似分数のうちどれが解なのかという問題は残ったままです。

3 実 2 次無理数の連分数展開

Pell 方程式の話が出たので，連分数を利用して解を求める話を概説しておきましょう。詳しくは [P] や [橋] などをどうぞ。

3.1 循環連分数

実 2 次無理数の連分数展開を調べてみると，部分商の列が途中から（時には最初から）循環しているように見えます。たとえば,

$$\sqrt{2}=[\ 1,\ 2,\ 2,\ \ldots\ ]=[\ 1,\ \overline{2}\ ]。$$
$$\sqrt{313}=[\ 17,\ \overline{1,\ 2,\ 4,\ 11,\ 1,\ 1,\ 3,\ 2,\ 2,\ 3,\ 1,\ 1,\ 11,\ 4,\ 2,\ 1,\ 34}\ ]。$$

部分商の列が途中から（最初からの場合も含む）循環するような連分数を**循環連分数**と呼び，本稿では，循環節は上に線を引いて示す表記を採用します：

$$\alpha=[\ c_0,\ c_1,\ \ldots,\ c_m,\ \overline{c_{m+1},\ \ldots,\ c_{m+l}}\ ]。$$

循環連分数は実 2 次無理数です。証明は容易です。次の等式から始めましょう：

$$\alpha=\begin{pmatrix} p_m & p_{m-1} \\ q_m & q_{m-1} \end{pmatrix}\alpha_{m+1}=\begin{pmatrix} p_{m+l} & p_{m+l-1} \\ q_{m+l} & q_{m+l-1} \end{pmatrix}\alpha_{m+l+1}。$$

$\alpha_{m+1}=\alpha_{m+l+1}$ なので，α_{m+1} は 2 次方程式の解であり，それゆえに α は 2 次の無理数であることがわかります。

実は，逆も成り立ちます。実 2 次無理数の連分数展開は必ず循環するのです。証明はややたいへんです。Lagrange は次のアルゴリズムで定まる数列 $\{a_k\}$，$\{b_k\}$ の有界性を示すことで証明しています：

$$\alpha=\alpha_0=\frac{b_0+\sqrt{D}}{a_0},\quad ただし，\quad a_0\mid(D-b_0^2);$$
$$c_k=\left\lfloor\frac{b_0+\sqrt{D}}{a_0}\right\rfloor,\quad b_{k+1}=c_ka_k-b_k,\quad a_{k+1}=\frac{D-{b_{k+1}}^2}{a_k}。$$

3.2 循環節の回文性

また，D を平方数ではない正整数とするとき，$\sqrt{D}$ の連分数展開は循環節が回文のようになっていることがわかります：

$$\sqrt{D}=[\ c_0,\ \overline{c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_2,\ c_1,\ 2c_0}\ ]。$$

これはガロアの定理として知られる次の事実を利用して証明することができます。

- $\alpha = [\,\overline{c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n}\,]$ ならば，α の代数的共役を α' とすると，$-\frac{1}{\alpha'} = [\,\overline{c_n,\ \ldots,\ c_2,\ c_1}\,]$。

3.3 Pell 方程式の解

$\sqrt{D}$ の連分数展開を調べると，Pell 方程式 $X^2 - DY^2 = \pm 1$ に関して次のようなことがわかります。なお，$\sqrt{D}$ の連分数展開の循環節の長さを l とします。

- 不定方程式 $X^2 - DY^2 = 1$ は無限個の整数解を持つ。
- 不定方程式 $X^2 - DY^2 = -1$ が整数解を持つことと，l が奇数であることとは同値である。
- 次の方程式のうち整数解が存在するのはたかだかひとつしかない；

$$X^2 - DY^2 = -1, \qquad X^2 - DY^2 = 2, \qquad X^2 - DY^2 = -2\text{。}$$

  また，いずれが整数解を持つかに対して，それぞれ，次が成り立つ；

$$l \equiv 1 \pmod 2, \qquad l \equiv 0 \pmod 4, \qquad l \equiv 2 \pmod 4\text{。}$$

- $|N| < \sqrt{D}$ なる整数 N について，$X^2 - DY^2 = N$ が整数解を持つことと，$N = c^2(-1)^k a_k$ となる k および整数 c が存在することとは同値である。

4 その他の話題

本稿では無理数の有理数近似と連分数展開との関連を紹介しました。連分数展開は実数の良い近似を得るのに有効なのですが，連分数展開に関連する話題は他にもいろいろあります。ここにいくつか挙げてみます。興味があるものがあれば，各自で調べていただくと面白いと思います。

- 基本単数と連分数展開
- 高次元連分数展開—Jacobi-Perron など
- 超幾何級数の連分数展開表示，単純とは限らない正則連分数
- べき級数の連分数展開表示—Padé 近似，商差法
- 連分数展開の計算のアルゴリズム
  —Lehmar のアルゴリズム，Lang のアルゴリズム
- 正則とは限らない連分数による表示—$\zeta(3)$，Rogers-Ramanujan など
- などなど

参考文献

[橋] 橋本竜太。**連分数展開と 2 次無理数**，名古屋大学大学院人間情報学研究科 博士論文 (2001)。

[H] Hua, Loo Keng (華 羅庚). *Introduction to Number Theory*, Translated from *Shu lun tao yin*(**数論導引**) by Peter Shiu, Springer-Verlag (1982).

[岩] 日本数学会 編集。**岩波数学辞典 第 3 版**，岩波書店 (1985)。

[河] 河田 敬義。**数論—古典数論から類体論へ—**，岩波書店 (1992)。

[K] A. Ya. Khinchin. *Continued Fractions.* Dover(1997).

[小] 小野 孝。**数論序説**，裳華房 (1987)。

[P] O. Perron. *Die Lehre von den Kettenbrüchen, Band I: Elementare Kettenbrüche, dritte, verbesserte und erweiterte auflage edition*, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft m. b. H., Stuttgart (1954).

[高] 高木 貞治。**初等整数論講義，第 2 版**，共立出版 (1971)。

[W] W. M. Waldschmidt. “Open Diophantine Problems,” Moscow Math. Journal vol. 4, no. 1 (2004), pp. 245-305. http://arxiv.org/abs/math.NT/0312440

橋本竜太
詫間電波工業高専 一般教科
〒 769-1192 香川県三豊市詫間町香田 551

email: hasimoto@dg.takuma-ct.ac.jp

Ryūta Hashimoto
Takuma National College of Technology
Takuma-cho, Mitoyo-shi, Kagawa 769-1192 JAPAN
http://www.dg.takuma-ct.ac.jp/~hasimoto/