代数的数のべき乗の小数部分について

京都大学理学研究科　金子元　(Hajime Kaneko)

1　はじめに

実数 x に対して、

$$x = u(x) + \varepsilon(x)$$

を満たす整数 $u(x)$ および実数 $\varepsilon(x) \in [-1/2, 1/2)$ は一意的に定まる。$u(x)$ を x の整数部分とよび、$\varepsilon(x)$ を x の小数部分と定める。ここで、$|\varepsilon(x)|$ は x に最も近い整数から x までの距離である。
1 より大きい実数 α と 0 でない実数 ξ が与えられたとする。このとき、数列 $(\varepsilon(\xi\alpha^n))_{n=0}^{\infty}$ が区間 $[-1/2, 1/2)$ 上で一様分布するかどうかの判定方法は一般には未解決である。さらに、この数列の limit point 全体の集合が区間 $[-1/2, 1/2)$ において稠密かどうかも一般には知られていない。この小論では、ある条件を満たす代数的数 $\alpha > 1$ に対して $|\varepsilon(\xi\alpha^n)|$ の最大の limit point を下から評価することを目標とする。そのために、代数的数 α を用いた数系を導入する。
この節の残りでは、よく知られている結果および容易に示すことができる事実を紹介する。まず、α が一般の実数の場合に成立する結果を述べる。0 でない実数 ξ を任意に選んで固定したときに、ほとんどすべての実数 $\alpha > 1$ に対して $(\xi\alpha^n)_{n=0}^{\infty}$ の小数部分が一様分布することが Koksma [7] によって証明された。逆に 1 より大きい任意の正数 α を固定すると、ほとんどすべての実数 ξ について同様の結果が成立することも同時に示された。ところが、次の命題が示すように Koksma の定理における例外集合は一般には空ではない。

命題 1.1. *1)* 実数 $\alpha > 1$ が与えられたとする。すると、実数 $\xi \neq 0$ で以下の不等式を満たすものが少なくとも加算個存在する。

$$\limsup_{n\to\infty} \bigl|\varepsilon(\xi\alpha^n)\bigr| \leq \frac{1}{2\alpha - 2}.$$

2) 0 でない実数 ξ が与えられたとする。すると、任意の正数 δ に対して正数 $\alpha > 1$ で以下の不等式を満たすものが少なくとも加算個存在する。

$$\limsup_{n\to\infty} \bigl|\varepsilon(\xi\alpha^n)\bigr| \leq \frac{1+\delta}{2\alpha - 2}.$$

以下 α は 1 より大きい代数的数であるとする。ここで、代数的整数である Pisot-Vijayaraghavan 数 (以下 PV 数と略記する) および Salem 数を定義する。代数的整数 α が PV 数であるとは、α が 1 より大きい実数でしかも α 自身を除く共役元の絶対値がすべて 1 より小さいことを言う。特に 2 以上の自然数は PV 数である。また、1 より大きい代数的整数 α が Salem 数であるとは、自分自身を除く α の共役元の絶対値がすべて 1 以下であり、かつ絶対値が 1 の共役元を少なくとも 1 つ持つことを言う。
PV 数 α に対して、α^n のトレースが整数になることから $\lim_{n\to\infty}\varepsilon(\alpha^n)=0$ となることが分かる。PV 数のべき乗について、Hardy [6] は以下の結果を述べた。

定理 1.2. 代数的数 $\alpha>1$ が与えられたとする。すると、0 でない実数 ξ が存在して、

$$\lim_{n\to\infty}\varepsilon(\xi\alpha^n)=0$$

となる必要十分条件は、α が *PV* 数となることである。このとき $\xi\in\mathbf{Q}(\alpha)$ である。

Pisot [8] はこの結果を以下のように拡張した。

定理 1.3. 代数的数 $\alpha>1$ および 0 でない実数 ξ が与えられたとする。すると、数列 $(\varepsilon(\xi\alpha^n))_{n=0}^{\infty}$ が有限個の *limit point* しか持たないための必要十分条件は、α が *PV* 数でありかつ $\xi\in\mathbf{Q}(\alpha)$ となることである。

他方、$\lim_{n\to\infty}\varepsilon(\xi\alpha^n)=0$ となる超越数 $\alpha>1$ の存在性は不明である。
Salem 数のべき乗に関しては以下の結果が知られている。

定理 1.4. 代数的数 $\alpha>1$ が与えられたとする。このとき任意の正数 δ に対して 0 でない実数 $\xi=\xi(\delta)$ を選ぶことによって

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\varepsilon(\xi\alpha^n)\right|<\delta$$

とできるための必要十分条件は、α が *PV* 数または *Salem* 数となることである。

2 主結果

代数的数 $\alpha>1$ が与えられたとする。ここで α は PV 数でも Salem 数でもないとする。定理 1.4 により

$$\liminf_{\xi\in\mathbf{R}^\times}\limsup_{n\to\infty}\left|\varepsilon(\xi\alpha^n)\right|>0$$

である。この式における左辺の値を下から評価しよう。α が有理数の場合は Dubickas [4] によって以下の結果が証明された。

定理 2.1. 有理数 $\alpha=p/q>1$ が与えられたとする $(p,q\in\mathbf{N})$。すると、任意の 0 でない ξ に対して

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\varepsilon(\xi\alpha^n)\right|\geq\frac{1}{p}E_1\left(\frac{q}{p}\right).$$

ただし、関数 $E_1(X)$ は以下によって与えられる。

$$E_1(X) = \frac{1}{2X}\left(1-(1-X)\prod_{m=0}^{\infty}\left(1-X^{2^m}\right)\right).$$

この結果を一般次数 d の代数的数 α に拡張する。ここで多項式 $\rho_i(X_1,\cdots,X_d)(i=0,1,\ldots)$ を以下の恒等式により定義する。

$$\left(\prod_{j=1}^{d}(1-X_iY)\right)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty}\rho_i(X_1,\cdots,X_d)Y^i.$$

α の共役元を $\alpha_1,\ldots,\alpha_d$ とおき、α の最小多項式を $a_dX^d+a_{d-1}X^{d-1}+\cdots+a_0\in\mathbf{Z}[X]$ とする。

定理 2.2. 代数的数 $\alpha>1$ が以下の条件を満たすとする。

1. $|\alpha_i|>1(i=1,2,\ldots,d)$;
2. $\sum_{i=1}^{d}|a_i|\le|a_0|$;
3. $0<\dfrac{\rho_{n+1}(\alpha_1^{-1},\cdots,\alpha_d^{-1})}{\rho_n(\alpha_1^{-1},\cdots,\alpha_d^{-1})}\le\dfrac{1}{2}(n=0,1,\ldots)$.

すると、0 でない任意の実数 ξ に対して

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\varepsilon(\xi\alpha^n)\right|\ge\frac{1}{|a_0|}E_d(\alpha_1^{-1},\cdots,\alpha_d^{-1}).$$

ただし、関数 $E_d(X_1,\cdots,X_d)$ は以下のように定義される。

$$E_d(X_1,\cdots,X_d)=\sum_{j=1}^{d}\left(\prod_{\substack{1\le i\le d\\ i\ne j}}\frac{1}{X_j-X_i}\right)X_j^{d-1}E_1(X_j).$$

3 代数的数を用いた数系

代数的数 α について、前節の定理 2.2 で用いた記号をそのまま用いる。この節では α の共役元の絶対値はすべて 1 より大きいと仮定する。定理 2.2 を証明するために、α を用いた数系で $\xi\alpha^n$ の小数部分を表す。
まず、α が自然数 $N(\ge 2)$ である場合を考える。N 進展開とは、集合 $\{N^i|i\in\mathbf{Z}\}$ を基底にもち、$\{0,1,\ldots,N-1\}$ を digit とする展開である。ξ を N 倍するという演算は ξ の N 進展開における digit の shift と対応している。すなわち、正数 ξ の N 進展開のひとつを

$$\xi=\sum_{i=-\infty}^{m}s_iN^i$$

とおく。ここで、s_i は ξ の N 進展開における第 i 位の digit と呼ばれる。ξN の展開は

$$\xi N = \sum_{i=-\infty}^{m+1} s_{i-1} N^i$$

によって与えられる。よって、ξN^n の小数部分を研究することは, 数列 $(s_{i-n})_{i=-\infty}^{-1}$ を調べることに他ならない。一般次数 d の代数的数 α に関して、この展開の類似を構成する。まず、基底 $\{\nu_i | i \in \mathbf{Z}\}$ を以下のように定める。

$$\nu_i = -\frac{1}{a_0} \sum_{j=1}^{d} \alpha_j^{i+1} \prod_{\substack{1 \le l \le d \\ l \neq j}} \frac{1}{\alpha_j^{-1} - \alpha_l^{-1}}.$$

この基底は以下の補題を満たす唯一の基底として特徴づけできる。

補題 3.1. *1)* 任意の整数 i に対して

$$a_d \nu_{i+d} + a_{d-1} \nu_{i+d-1} + \cdots + a_0 \nu_i = 0.$$

2) $\nu_0 = \dfrac{1}{a_d}$, $\nu_{-1} = \nu_{-2} = \cdots = \nu_{-d+1} = 0.$

つぎに、$\xi > 0$ に対してこの数系の展開における第 i 位の digit を以下のように定める。

$$s_i = a_d u(\xi \alpha^{-i}) + a_{d-1} u(\xi \alpha^{-i-1}) + \cdots + a_0 u(\xi \alpha^{-i-d}).$$

第 i 位の digit について、以下の補題が成立する。

補題 3.2. *1)* 十分大きなすべての自然数 i に対して $s_i = 0.$
2) $d \ge 2$ ならば

$$|s_i| < \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{d} |a_l|.$$

3) α が自然数でないならば、任意の整数 M に対して数列 $(s_i)_{i=-\infty}^{M}$ は周期的ではない。

よって、以上の補題および次の命題により集合 $\{\nu_i | i \in \mathbf{Z}\}$ を基底に持ち、集合 $\{j \in \mathbf{Z} || j | < \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{d} |a_l|\}$ を digit とする展開が定義できる。

命題 3.1. 任意の整数 n に対して

$$\xi \alpha^n = \sum_{i=-\infty}^{\infty} s_{i-n} \nu_i.$$

さらに

$$\begin{aligned} u(\xi \alpha^n) &= \sum_{i=0}^{\infty} s_{i-n} \nu_i, \\ \varepsilon(\xi \alpha^n) &= \sum_{i=-\infty}^{-1} s_{i-n} \nu_i. \end{aligned}$$

この命題を用いると、第 i 位の digit s_i を評価することにより定理 2.2 を導くことができる。

参考文献

[1] Bertin M.-J. et al,Pisot and Salem numbers, Birkhäuser Verlag, Basel, 1992.

[2] Boyd David W., Transcendental numbers with badly distributed powers, Proc. Amer. Soc. 23 (1969) 424-427.

[3] Dubickas Artūras, Arithmetical properties of powers of algebraic numbers, Bull. London Math. Soc. 38 (2006) no.1 70-80.

[4] Dubickas Artūras, On the distance from a rational power to the nearest integer, J. Number Theory 117 (2006) no.1 222-239.

[5] Dubickas Artūras, There are infinitely many limit points of the fractional parts of powers, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. 115 (2005), no.4, 391-397.

[6] D. H. Hardy, A problem of diophantine approximation, Collected papers of G. H. Hardy I, Clarendon Press, Oxford 124-129.

[7] J. F. Koksma, Ein mengen-theoretischer Satz über Gleichverteilung modulo eins, Compositio Math. 2 (1935) 250-258.

[8] Pisot C, Répartition (mod 1) des puissances des nombres rèels, Comment. Math. Helv. 19(1946) 153-160.

[9] T. Vijayaraghavan, On the fractional parts of the powers of a number, J. London Math. Soc. 15 (1940) 159-160.

金子元
京都大学理学研究科
〒 606-8224 京都府京都市左京区北白川追分町 4
グランディール北白川 307 号室

e-mail: kanekoha@math.kyoto-u.ac.jp