池田リフトに付随するRankin-Selberg型 Dirichlet級数の明示公式*

北海道大学大学院 理学研究科　河村 尚明 (KAWAMURA, Hisa-aki)

$1 < n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $k \in \mathbb{Z}$ として, 離散群

$$\mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z}) := \{M \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{Z}) \mid {}^tMJ_nM = J_n,\ J_n = \left(\begin{smallmatrix} O_n & I_n \\ -I_n & O_n \end{smallmatrix}\right)\}$$

に関する重さ k の Siegel cusp 形式 F, G に対して, 各々の指数 N の Fourier-Jacobi 係数を ϕ_N, ψ_N とする $(N \in \mathbb{Z}_{>0})$. この時, Dirichlet 級数

$$D_1(s;\, F,\, G) := \zeta(2s - 2k + 2n) \sum_{N=1}^{\infty} \langle \phi_N, \psi_N \rangle N^{-s} \qquad (s \in \mathbb{C})$$

が定義される. ここで, $\zeta(s)$ は Riemann ζ-函数, $\langle *, * \rangle$ は $\mathrm{Sp}_{n-1}(\mathbb{Z})$ に関する重さ k, 指数 N の正則 Jacobi cusp 形式としての Petersson 内積を表すものとする. この $D_1(s;\, F,\, G)$ は, $\mathrm{Re}(s) > k+1$ において絶対収束することが容易に示されるのだが, 更に, 或る非正則 Klingen-Siegel 型 Eisenstein 級数に関する Rankin-Selberg 型積分としての表示を持つことから, 次の様な非常に良い解析的性質を持つことが知られている:

Fact I (cf. Theorems 3.4, 3.5 in [Yam]). $\Gamma(s)$ を Γ-函数とすると, 函数

$$\mathscr{D}_1(s;\, F,\, G) := \pi^{k-n}(2\pi)^{-2s}\Gamma(s)\Gamma(s-k+n)\, D_1(s;\, F,\, G) \tag{1}$$

は, $s = k$, $k - n$ において 1 位の極を持つことを除いて, 全ての $s \in \mathbb{C}$ で正則である. ここで,

$$\mathrm{Res}_{s=k}(\mathscr{D}_1(s;\, F,\, G)) = \langle F, G \rangle$$

である. 但し, $\langle *, * \rangle$ は $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z})$ に関する重さ k の Siegel cusp 形式としての Petersson 内積を表すものとする. 更に, $\mathscr{D}_1(s;\, F,\, G)$ は, 函数等式

$$\mathscr{D}_1(s;\, F,\, G) = \mathscr{D}_1(2k - n - s;\, F,\, G)$$

を満たす.

一方, $k > n + 1$ を満たす n, $k \in 2\mathbb{Z}_{>0}$ に対して, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に関する重さ $2k - n$ の cusp 形式の空間から, $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z})$ に関する重さ k の Siegel cusp 形式の空間への**池田リフト**と呼ばれる “*functorial*” な持ち上げを考えることができる:

Fact II (cf. Theorems 3.2, 3.3 in [Ike1]). $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に関する重さ $2k - n$ の正規化された Hecke 固有形式 f に対して, $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z})$ に関する重さ k の Hecke 固有形式 I_f であって, その standard L-函数が

$$\zeta(s) \prod_{i=1}^{n} L(s + k - i,\, f)$$

---

* この結果は, 桂田 英典氏 (室蘭工業大学) との共同研究によるものである.

と一致するものが存在する. 但し, $L(s,\, f)$ は f に付随する Hecke L-函数とする. ここで, 特に, $n=2$ の場合, この I_f は f の斎藤-黒川リフトと一致する.

この時, 池田リフトに付随する Rankin-Selberg 型 Dirichlet 級数に対して, 次が得られる:
Theorem. $n,\, k \in 2\mathbb{Z}_{>0}$ を, $k > n+1$ を満たすものとする.
(i) $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に関する重さ $2k-n$ の正規化された Hecke 固有形式 f に対して, 等式

$$D_1(s;\, I_f,\, I_f) = \langle \phi_1,\, \phi_1 \rangle\, \zeta(s-k+1)\zeta(s-k+n)L(s,\, f) \tag{2}$$

が成立する. 但し, ϕ_1 は I_f の指数 1 の Fourier-Jacobi 係数とする.
(ii) $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に関する重さ $2k-n$ の, 相異なる 2 つの正規化された Hecke 固有形式 $f,\, g$ に対して, $D_1(s;\, I_f,\, I_g)$ は恒等的に 0 である.

更に, 等式 (2) の両辺の極 $s=k$ における留数を比較することで次を得る:
Corollary. 上と同じ仮定の下, 等式

$$(-1)^{n/2+1}\, \pi^k \cdot \frac{2^{2k-n+1}\, n}{(k-1)!\, B_n} \cdot \frac{\langle I_f,\, I_f \rangle}{\langle \phi_1,\, \phi_1 \rangle} = L(k,\, f) \tag{3}$$

が成り立つ. 但し, B_n は n 番目の Bernoulli 数とする.

上述の結果は, 斎藤-黒川リフトに対して, W. Kohnen と N.-P. Skoruppa によって得られていた結果 (cf. [K-S]) の一般化となっている. また, 等式 (3) を用いることで, 池田 保氏 (京都大学) によって与えられた, 池田リフトの周期に関する予想 (cf. [Ike2]) を, 特別な場合において, 証明することができる.

参考文献

[Ike1] T. Ikeda, *On the lifting of elliptic modular forms to Siegel cusp forms of degree 2n*, Ann. Math. **154** (2001), no. 3, 641–681.

[Ike2] ________, *Pullback of the lifting of elliptic cusp forms and Miyawaki's conjecture*, Duke Math. J. **131** (2006), no. 3, 469–497.

[K-S] W. Kohnen and N.-P. Skoruppa, *A certain Dirichlet series attached to Siegel modular forms of degree two*, Invent. Math. **95** (1989), 541–558.

[Yam] T. Yamazaki, *Rankin-Selberg method for Siegel cusp forms*, Nagoya Math. J. **120** (1990), 35–49.

河村 尚明
北海道大学大学院 理学研究科 数学専攻
博士後期課程 2 年
〒 060-0810 札幌市北区北 10 条西 8 丁目
E-mail: kawamura@math.sci.hokudai.ac.jp

KAWAMURA Hisa-aki
Department of Mathematics,
Hokkaido University
Kita 10, Nishi 8, Kita-Ku, Sapporo,
Hokkaido, 060-0810, Japan