On Resultant Equations

日本大学大学院理工学研究科数学専攻 M2 中村 俊之 (Toshiyuki Nakamura)

1 Resultant 不等式

本稿では，Resultant 方程式とよばれるディオファントス方程式に対する解の個数の評価について報告する．

まず表記を定める．多項式 f, g に対して，その終結式を $R(f, g)$ によって表す．次に，多項式に対して「高さ」の働きをする Mahler measure $M(f)$ を

$$M(f) = \begin{cases} \exp\left(\int_0^1 \log\left|f(e^{2\pi i\theta})\right| d\theta\right) & \text{if } f(X) \not\equiv 0 \\ 0 & \text{if } f(X) \equiv 0 \end{cases}$$

で定義する． $f(X) = f_0(X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_r)$ のときには $M(f) = |f_0| \prod_{i=1}^r \max(1, |\alpha_i|)$ が成り立つことが知られている [3].

我々の考える問題は以下の不等式の解についてである．r 次の整係数多項式 $f = f_0X^r + f_1X^{r-1} + \dots + f_r \in \mathbb{Z}[X]$ と整数 $t > 0$ を固定する．$\kappa > 0$ に対し，t 次の整係数多項式 $g = g_0X^t + g_1X^{t-1} + \dots + g_t \in \mathbb{Z}[X]$ を未知多項式とする不等式

$$0 < |R(f, g)| < M(g)^{r-\kappa} \tag{1}$$

を考える．この不等式を **Resultant 不等式**と呼ぶ. この不等式を解くことは，整係数多項式 $g \in \mathbb{Z}[X]$ を決定する，即ち g の係数から成る $t + 1$ 個の整数の組 $(g_0, g_1, \dots, g_t) \in \mathbb{Z}^{t+1}$ を決定するということに他ならないので，ディオファントス問題の一つである．解を完全決定することが最終目標であろうが，まずはどのような条件下で解が有限個に限るかという問題を考えでみよう．

自明な事実として，任意の多項式 $f, g \in \mathbb{Z}$ に対して，

$$0 < |R(f, g)| < M(f)^t M(g)^r \tag{2}$$

が成り立つ事が観察できる．$M(f)^t$ は定数であるから不等式 (1) において $\kappa = 0$ の場合は常に

$$0 < |R(f, g)| \ll M(g)^r$$

となり，Resultant 不等式 (1) は無限個の解を有することになる．$\kappa > r$ ならば $r - \kappa < 0$ であるから，(1) の右辺 < 1，左辺 ≥ 1 となり不等式が成立しない，即ち Resultant 不等式 (1) は解を持たない. 以上の考察から κ の意味のある範囲は $0 < \kappa < r$ である．

多項式 $g = g_0X^t + g_1X^{t-1} + \dots + g_t \in \mathbb{Z}[X]$ に対し，通常の高さ $H(g) := \max\{|g_0|, \dots, |g_t|\}$ と $M(g)$ との間には $H(g)/2^t \leq M(g) \leq H(g)$ という関係が成り立つことから，t を固定している場合は (1) を $0 < |R(f, g)| \ll H(g)^r$ と考えても同じである．

不等式 (1) の解の個数の有限性に関して， W. M. Schmidt [5] は次の定理を証明した．

Theorem A (W. M. Schmidt [5]) $0 < t < r$ とする．整係数多項式 $f \in \mathbb{Z}[X]$ は重根を持たず，f を割りきる t 次以下の整係数多項式は存在しないと仮定する．このとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，不等式

$$0 < |R(f, g)| < H(g)^{r-2t-\varepsilon}$$

を満たす t 次以下の多項式 $g \in \mathbb{Z}[X]$ は有限個しか存在しない．

W. M. Schmidt は [5] の中で以下の注意をしている．

[注意 1]　この定理の条件下で，不等式 (1) において $\kappa \leq t+1$ と仮定すると，(1) を満たす解 $g \in \mathbb{Z}[X]$ が以下の場合には無限個存在することが示される． f の根のひとつ α が実数である場合をまず考える．Dirichlet の線形形式定理から，正数 H に対し $|g(\alpha)| < c_1 H^{-t}$ かつ $H(g) \leq H$ を満たす t 次以下の零でない多項式 $g \in \mathbb{Z}[X]$ が存在する．ただし c_1 は α のみによる定数である． α は f の根であるから，$t+1$ 次以上の代数的数である．従って定理 A の仮定より $g(\alpha) \neq 0$ が成り立つので，正数 H を大きくしていくと

$$|g(\alpha)| < c_1 H(g)^{-t} \tag{3}$$

を満たす t 次以下の整係数多項式 $g \in \mathbb{Z}[X]$ は無限個作れる．α_1, α_2 が f の複素共役根の場合は，$t \geq 2$ ならば同様の方法で

$$|g(\alpha_1)| = |g(\alpha_2)| < c_2 H(g)^{-(t-1)/2} \tag{4}$$

を満たす t 次以下の整係数多項式 $g \in \mathbb{Z}[X]$ が無限個構成できる．$|g(\alpha_i)| \leq c_3 H(g)$ $(i = 1, \ldots, r)$ であるから，$R(f, g) = f_0^t g(\alpha_1) \ldots g(\alpha_r)$ と (3), (4) によって

$$|R(f, g)| < c_4 H(g)^{r-t-1} \tag{5}$$

をみたす無限個の整係数多項式 $g \in \mathbb{Z}[X]$ が存在する．すなわち，解を有限個に限る条件としては，指数 $r - 2t - \varepsilon$ は $r - t - 1$ より大きい値で置き換えることは出来ない．

[注意 2] $\kappa = 2t$ のときであっても，以下のような無限個の解 g を持つ多項式 f の例が存在する．整数 $s \geq 2$ に対して $r = st$ と仮定する．$F_0(y)$ を s 次の既約多項式で実数根 θ を持つとする．(5) によって，

$$0 < |R(F_0, G_0)| < c_4 H(G_0)^{s-2} \tag{6}$$

を満たす 1 次多項式 $G_0(Y) = b_0 Y + b_1$ が無限個存在する．$X^t - \theta$ が体 $\mathbb{Q}(\theta)$ 上既約であると仮定する．このとき $f(X) = F_0(X^t)$ は $r = st$ 次で，有理数体上既約となる．(6) を満たす多項式 $G_0(Y)$ に対し $g(X) = G_0(X^t)$ とおく．α が f の r 個の根 $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ 上を走るとき，α^t は F_0 の s 個の根 $\theta^{(1)}, \ldots, \theta^{(s)}$ 上を t 回走る（$\theta^{(1)}, \ldots, \theta^{(s)}$ は θ の共役根）．

$$R(f, g) = f_0^t g(\alpha_1) \ldots g(\alpha_r) = \left(f_0 G_0(\theta^{(1)}) \ldots G_0(\theta^{(s)})\right)^t = (R(F_0, G_0))^t$$

を得て，無限個の $g \in \mathbb{Z}[X]$ に対して $0 < |R(f.g)| = |R(F_0, G_0)|^t \leq c_5 H(G_0)^{st-2t} = c_5 H(g)^{r-2t}$ が従う．

[注意 3]　K を k 次の代数拡大体 $K/\mathbb{Q}$ とする. $K = \mathbb{Q}(\omega)$ と仮定し, $K^* = \mathbb{Q}(\omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(k)})$ とすると, K^* は有理数体の正規拡大である. さらに, G を K^* のガロア群とする. 体 K が h 回 transitive で

あるとは, G が集合 $\{\omega^{(1)},\ldots,\omega^{(k)}\}$ 上で h 回 transitive である, すなわち, $1\le h\le k$ とし, 与えらえた異なる整数の組 $i_1,\ldots,i_h$ に対して, $\varphi_i(\omega^{(j)})=\omega^{(i_j)}$ $(1\le j\le h)$ となる $\varphi\in G$ が存在するときをいう.

$\kappa>t+1$ かつ f が既約であり,f の分解体が f の根の上で t 回 transitive であるとき 不等式 (1) は整数解の個数は有限である. この事実は次の定理から従う.

Theorem B (W. M. Schmidt [7]) $n<k$ とする. K を $n-1$ 回 *transitive* とする. $L(\boldsymbol{X})=\alpha_1X_1+\cdots+\alpha_nX_n\in K[X_1,\ldots,X_n]$ とし, さらに, L の n 個の任意の共役形式 $L^{(i_1)},\ldots,L^{(i_n)}$ が線形独立であると仮定する. このとき, 任意の $\varepsilon>0$ に対して,

$$|L^{(1)}(\boldsymbol{x})\ldots L^{(k)}(\boldsymbol{x})|\le|\boldsymbol{x}|^{k-n-\varepsilon} \tag{7}$$

を満たす整数点 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^n$ は有限個しか存在しない.

実際, $n=t+1$ であり, f の既約性からその分解体の次数 $k=r$ である. また, $L(\boldsymbol{X})=g(\alpha_1)$ とおけばその共役は $L^{(i)}(\boldsymbol{X})=g(\alpha_i)$ となるので, この中の任意の $t+1$ 個の形式は線形独立である. したがって, (7) の指数は $r-(t+1)-\varepsilon$ となり,$\kappa>t+1$ でも不等式 (1) の解の個数の有限性が従う.

以上の考察によって, $t+1<\kappa\le 2t$ の範囲での不等式 (1) の解の個数の有限性は f の条件によって変化するということがわかる.

多項式 $f=f_0(X-\alpha_1)\ldots(X-\alpha_r)$ とするとき, Resultant が満たす等式

$$R(f,g)=f_0^t\prod_{i=1}^{r}g(\alpha_i)$$

に着目し,Resultant を特別な場合として含む分解形式による不等式の有限性についての定理を証明することによって, その特別な場合として Theorem A を示している.

Theorem C (W. M. Schmidt [5]) $F(X)=L_1(X)\ldots L_d(X)\in\mathbb{Q}[X_1,\ldots,X_n]$ を d 次の分解形式とする. $1<n\le k<d$ とする. もし, 次数が $k-1$ 以下の任意の多項式 $G(X)\in\mathbb{Q}[X_1,\ldots,X_n]$ に対し $G(X)\not|F(X)$ であり, かつ k 個の任意の組 $(i_1,\ldots,i_k)\in\{1,\ldots,d\}$ ($j\ne l$ のとき $i_j\ne i_l$) に対し $\mathrm{rank}(L_{i_1},\ldots,L_{i_k})=n$ が成り立つならば, 任意の $\varepsilon>0$ に対して, 不等式

$$|F(\boldsymbol{x})|<|\boldsymbol{x}|^{d-2(k-1)-\varepsilon}$$

の整数解 $\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{Z}^n$ は有限個である.
ただし, $|\boldsymbol{x}|=\max(|x_1|,\ldots,|x_n|)$ とする.

Theorem A は Theorem C の $n=k$ の場合である. これを見るために,

$$R^*(f,g)=g(\alpha_1)\ldots g(\alpha_r)=L_1(\boldsymbol{g})\ldots L_r(\boldsymbol{g})$$

とし, $R(f,g)=a_0^rR^*(f,g)$ とおく. ここに, $n=t+1$ 個の変数 $g_0,\ldots,g_t$ の線形形式 $L_i(\boldsymbol{g})=g_0(\alpha_i)^t+\cdots+g_0$ $(1\le i\le r)$ である. つまり, $R^*(f,g)$ は, $\boldsymbol{g}$ を変数とする r 次の分解形式 $F(\boldsymbol{g})$ である. 有理数体上で $f(X)=f_1(X)\ldots f_h(X)$ と因数分解すると, それぞれの $f_j(X)$ は有理数体上既約である. G_j を $f_j(\alpha_i)=0$ となる添字 i を持つ線形形式 L_i の積とすれば, $F(\boldsymbol{g})=G_1(\boldsymbol{g})\ldots G_h(\boldsymbol{g})$ となる. 形式 G_j は明らかに有理数係数を持つ. さて, これらが有理数体上既約であることを示そう. $G_1(\boldsymbol{g})=H_1(\boldsymbol{g})H_2(\boldsymbol{g})$ で, $0<\deg H_1<\deg G_1=\deg f_1$ であるとする. もし, $H_1(\boldsymbol{g})=L_{i_1}(\boldsymbol{g})\ldots L_{i_j}(\boldsymbol{g})$ となるならば, $H_1(\boldsymbol{g})$ の中の単項式 $g_{t-1}^ug_t^{j-u}$ $(1\le u\le j)$ は, $\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_j}$ の基本対称式である. したがっ

て, $\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_j}$ は $u<\deg f_1$ 次以下の代数的数になる. これは, f_1 が既約であることに反する.

いま, Theorem A の仮定によって, f は t 次以下の整係数多項式で割り切れない. ガウスの補題によって, 有理数体上でも t 次以下の有理数係数多項式で割れない. したがって, $F(\boldsymbol{g})$ のそれぞれの既約形式 $G_j(\boldsymbol{g})$ の次数は, $t+1=n$ 以上でなくてはならない. つまり, $F(\boldsymbol{g})$ は n より小さい次数の有理数係数の形式では割れない. Van der Monde の行列式を使えば, 任意の $n=t+1$ 個の線形形式 L_i は階数 n を持つ. そこで, Theorem C を $k=n$ で適用すれば, $|F(\boldsymbol{g})|<|\boldsymbol{g}|^{r-2(n-1)-\varepsilon}$ を満たす整数解 $\boldsymbol{g}$ は有限個しか存在しない, すなわち, 不等式 $0<|R(f,g)|<H(g)^{r-2t-\varepsilon}$ を満たす t 次以下の整係数多項式 g は有限個しか存在しない.

Theorem C の証明では, Schmidt の Subspace Theorem (c.f. [7]) を用いて証明される次の補題を用いる. この補題を紹介する前に, いくつか定義を述べる.

$\mathcal{L}=\{L_1,\cdots,L_d\}$ を $\overline{\mathbb{Q}}$ 係数線形形式の集合とする. $\mathcal{L}$ が symmetric であるとは, $\mathcal{L}$ に属する任意の線形形式の複素共役形式が再び $\mathcal{L}$ に属するときをいう. また, 集合 $\mathcal{L}$ の階数 $\mathrm{rank}\,\mathcal{L}$ を, この集合に属する線形形式で $\overline{\mathbb{Q}}$ 上線形独立となる最大個数と定義する.

Lemma D (W. M. Schmidt [6]) $\mathcal{L}=\{L_1,\cdots,L_d\}$ を *symmetric* とする. 与えられた $\eta>0$ に対して, 次の 2 つの条件は同値である.

(a) $\mathcal{L},\eta$ にのみよる正定数 γ_1 が存在して, 不等式

$$|L_1(\boldsymbol{x})\cdots L_d(\boldsymbol{x})|\le\gamma_1|\boldsymbol{x}|^{d-\eta} \tag{8}$$

を満たす整数点 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^n$ は無限個存在する.

(b) $\mathbb{R}^n$ の t 次元有理数係数部分空間 $S^t\neq\{O\}$ と $\mathcal{L}$ の *symmetric* な部分集合 $\mathcal{L}'$ が存在して,$\mathcal{L}'$ を S^t へ制限したときの階数 l が

$$l\le tm/\eta \ \ かつ \ \ l<t \tag{9}$$

をみたす. ただし, $m=\#\mathcal{L}'$ である.

Theorem C 証明は次の方法で行う.
まず,$\eta>2(k-1)$ で条件 (a) が成り立たないことを示せればよい. したがって, (b) の否定が成り立つば良いので, $l<t\Rightarrow t\eta\le 2(k-1)l$ を示す.

さて, Theorem A に関して, f を割る整係数多項式の次数が t 次より大きいという条件を課さずに有限性が従うことが [4] で示されている. すなわち, 次の定理が成り立つ.

Theorem E (J.-H.Evertse & N. Hirata-Kohno [4]) $0<t<r$ とする. 整係数多項式 $f\in\mathbb{Z}[X]$ は重根を持たないと仮定する. このとき, $\kappa>2t$ ならば, *Resultant* 不等式 (1) を満たす t 次以下の多項式 $g\in\mathbb{Z}[X]$ の個数は有限個しか存在しない.

分解形式に関する Theorem C の中の条件"次数が $k-1$ 以下の任意の多項式 $G(X)\in\mathbb{Q}[X_1,\ldots,X_n]$ に対し $G(X)\not| F(X)$ "を省くことが出来るか, という問題が考えられるが現在は未解決である.

Theorem E によって, $\kappa>2t$ ならば Resultant 不等式 (1) は有限個の解しか持たないことが示された. それでは, その解の個数の評価は与えられないのか, という問題が考えられる. この問題に対する結果は特別な場合に限り, J.-H.Everse [1, Theorem 1] によって証明されている. 特別な場合というのは, Resultant 不等式 (1) を満たす整係数多項式 g が原始的であり, かつ, 既約であるという条件を持つことである. ここで, 多項式 g が原始的であるとは, 係数の最大公約数が 1 であるときを言う. 以

下で説明するが, Resultant 不等式 (1) を満たす整係数多項式 g が原始的でないか, または, 可約であるときの解の個数の評価を与えると, 既約かつ原始的な多項式 g における $|R(f,g)|$ の値の下からの評価や effective Liouville 予想が従う.

初めに, $\kappa > 2t$ のとき, 不等式 (1) を満たす必ずしも原始的でない t 次の整係数多項式 $g \in \mathbb{Z}[X]$ の解の個数が多くとも N 個であるとする. 不等式 (1) を満たす原始的な t 次の整係数多項式 g^* をとる.

$$|d| \leq \left(M(g^*)^{r-\kappa}|R(f,g^*)|^{-1}\right)^{1/\kappa}$$

をみたす零でない整数 d に対して,$g = dg^*$ は不等式 (1) を満たす. したがって,

$$|R(f,g^*)| \geq N^{-1}M(g^*)^{r-\kappa}$$

が成り立つ. つまり, 不等式 (1) を満たす原始的でない多項式の個数に対する explicit な上からの評価は, $|R(f,g^*)|$ の下からの評価を与える.

次に, effective Liouville について考察する. まず, Liouville の定理とは, α を d 次の実代数的数とするとき, α とは異なる任意の有理数 p/q に対して,

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c(\alpha)}{q^d}$$

を満たす α のみに依存する定数 $c(\alpha)$ が存在するという定理である. いま, 簡単のため, $t = 2$ かつ $\kappa > 4$ とし, M を不等式 (1) を満たす原始的で可約な 2 次整係数多項式 g の個数に対する上からの評価とする. ここで, $|a,b| := \max(|a|,|b|)$ とする. 整係数多項式 $g = q_1X - p_1 \in \mathbb{Z}[X],\ \gcd(p_1,q_1) = 1$ を固定する. このとき, 任意の多項式 $g_2 = q_2X - p_2$ で

$$p_2, q_2 \in \mathbb{Z}, \quad \gcd(p_2,q_2) = 1 \tag{10}$$

$$|p_2,q_2| \leq \left(2^{-r}M(f)^{-1}|R(f,g)|^{-1} \cdot M(g_1)^{r-\kappa}\right)^{1/\kappa} \tag{11}$$

を満たす多項式に対して, (2) によって,

$$\begin{aligned}
|R(f,g_1g_2)| &= |R(f,g_1)||R(f,g_2)| \\
&\leq 2^{-r}M(f)^{-1}|R(f,g)|^{-1}M(g_1)^{r-\kappa}M(g_2)^{-\kappa} \times 2^rM(f)M(g_2)^r \\
&= M(g_1g_2)^{r-\kappa}
\end{aligned}$$

が成り立つ. 今, (10), (11) を満たす整数の組 (p_2,q_2) の個数は, (11) の右辺の 2 乗の定数倍によって下から評価される. また, この個数は M によって上から抑えられるから, r にのみ依存するある数 c_1 に対して,

$$|R(f,g_1)| \geq c_1M^{-\kappa}M(f)^{-1}M(g_1)^{r-\kappa} \tag{12}$$

が成り立つ. また, $f = a_0(X-\alpha_1)\dots(X-\alpha_r)$ とし, $\alpha \in \{\alpha_i \mid 1 \leq i \leq r\}$ とすると,

$$\begin{aligned}
|R(f,g_1)| &= |a_0(p_1-\alpha_1)\dots(p_1-\alpha_rq_1)| \\
&\leq 2^rM(f)|\alpha - (p_1/q_1)||p_1,q_1|^r
\end{aligned}$$

を得る. (12) と $M(g_1) = |p_1,q_1|$ を合わせると, r のみに依存する定数 c_2 が存在して,

$$\left|\alpha - \frac{p_1}{q_1}\right| \geq c_2M^{-\kappa/2}M(f)^{-2}|p_1,q_1|^{-\kappa}$$

を得る. これは Liouville の定理のとても強い effective な改良であるため，現時点では到達困難と理解されているものである.

2 Resultant 方程式

整数 $t > 0$ と r 次整係数多項式 $f \in \mathbb{Z}[X]$ を固定する.
行列式によって定義される $t+1$ 変数の整係数多項式

$$R(t,f)(Y_0,\dots,Y_t) = \begin{vmatrix} f_0 & f_1 & \dots & \dots & f_r & & & \\ & \ddots & & & & \ddots & & \\ & & f_0 & f_1 & \dots & \dots & f_r & \\ Y_0 & \dots & Y_{t-1} & Y_t & & & & \\ & \ddots & & & \ddots & & & \\ & & \ddots & & & \ddots & & \\ & & & Y_0 & \dots & Y_{t-1} & Y_t & \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ t \text{ rows} \\ \\ \\ r \text{ rows} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

を考える. 与えられた $t+1$ 変数の整係数多項式 $A(Y_0,\dots,Y_t)$ に対して, 方程式

$$R(t,f)(Y_0,\dots,Y_t) = A(Y_0,\dots,Y_t)$$

を **Resultant 方程式**と呼ぶ. $\boldsymbol{g} = (g_0,\dots,g_t) \in \mathbb{Z}^{t+1}$ に対して, t 次整係数多項式 $g_0X^t + \dots + g_t$ を対応させる. この多項式を $P_{\boldsymbol{g}}$ と書くことにする.

Theorem 2.1 $f \in \mathbb{Z}[X]$ を重根を持たない r 次の整係数多項式とする. $\deg A < r - 2t$ ならば *Resultant* 方程式

$$R(t,f)(g_0,\dots,g_t) = A(g_0,\dots,g_t) \tag{13}$$

を満たす整数点 $(g_0,\dots,g_t) \in \mathbb{Z}^{t+1}$ は有限個しか存在しない.

証明
$0 < \delta < 1$ とし, $\deg A < r - 2t - \delta$ とおく. $A(X_0,\dots X_t) = \sum_{i_0=0}^{m_0} \cdots \sum_{i_t}^{m_t} c(i_0,\dots,i_t) X_0^{i_0} \dots X_t^{i_t}$ とすると, $|g_i| \le 2^t M(P_{\boldsymbol{g}})$ であることから,

$$\begin{aligned} |A(g_0,\dots,g_t)| &\le \sum_{i_0=0}^{m_0} \cdots \sum_{i_t=0}^{m_t} |c(i_0,\dots,i_t)| |g_0|^{i_0} \dots |g_t|^{i_t} \\ &\le \sum_{i_0=0}^{m_0} \cdots \sum_{i_t=0}^{m_t} |c(i_0,\dots,i_t)| \left(2^t M(P_{\boldsymbol{g}})\right)^{i_0+\dots+i_t} \\ &< 2^{t(r-2t-\delta)} \left(M(P_{\boldsymbol{g}})\right)^{r-2t-\delta} L(A) \end{aligned} \tag{14}$$

となる. ただし, $L(A) := \sum_{i_0=0}^{m_0} \cdots \sum_{i_t=0}^{m_t} |c(i_0,\dots,i_t)|$ である. したがって,(2.1) から

$$|R(f,P_{\boldsymbol{g}})| < 2^{t(r-2t-\delta)} L(A) M(P_{\boldsymbol{g}})^{r-2t-\delta}$$

を得る. $M(P_{\boldsymbol{g}}) > \left(2^{t(r-2t-\delta)} L(A)\right)^{1/\delta}$ を満たす多項式に対して,

$$|R(f,P_{\boldsymbol{g}})| < M(P_{\boldsymbol{g}})^{r-2t}$$

が成り立つ. したがって, Theorem E を適用すれば, $M(P_{\boldsymbol{g}}) > \left(2^{t(r-2t-\delta)} L(A)\right)^{1/\delta}$ を満たし, Resultant 方程式を満たす整係数多項式の個数は有限個である. また, $M(P_{\boldsymbol{g}}) \le \left(2^{t(r-2t)} L(A)\right)^{1/\delta}$ を満たす多項式は有限個しか存在しないので, さらに, Resultant 方程式を満たす多項式も有限個しか存在しない. したがって, この定理が従う.

Resultant 方程式を満たす整数点の個数の評価を得ることができ, その結果が次の定理である.

Theorem 2.2 $0 < \delta < 1$ とおく. $d = \deg A \leq r - 2t - \delta$ であるとき,

1. $R(t, f)(\boldsymbol{g}) = A(\boldsymbol{g})$
2. $M(P_{\boldsymbol{g}}) \geq \max\left\{\left(2^{t(r-2t-\delta)}L(A)\right)^{2/\delta}, \left(2^{2r^2}M(f)^{4r-4}\right)^{t/\delta}\right\}$
3. $P_{\boldsymbol{g}}$ が *primitive* かつ *irreducible*

を満たす整数点 $\boldsymbol{g} = (g_0, \ldots, g_t) \in \mathbb{Z}^{t+1}$ の個数は多くとも

$$2^{8t+65}t^{2t+21}\delta^{-t-5}r^t \log 4r \log\log 4r$$

である.

証明
$A(X_0, \ldots X_t) = \sum_{i_0=0}^{m_0} \cdots \sum_{i_t}^{m_t} c(i_0, \ldots, i_t) X_0^{i_0} \ldots X_t^{i_t}$ とおくと,

$$\begin{aligned}|A(g_0, \ldots, g_t)| &\leq \sum_{i_0=0}^{m_0} \cdots \sum_{i_t=0}^{m_t} |c(i_0, \ldots, i_t)||g_0|^{i_0} \ldots |g_t|^{i_t} \\ &\leq \sum_{i_0=0}^{m_0} \cdots \sum_{i_t=0}^{m_t} |c(i_0, \ldots, i_t)| \left(2^t M(P_{\boldsymbol{g}})\right)^{i_0+\cdots+i_t} \\ &< 2^{t(r-2t-\delta)} \left(M(P_{\boldsymbol{g}})\right)^{r-2t-\delta} L(A)\end{aligned}$$

したがって, $R(t, f)(g_0, \ldots, g_t) = A(g_0, \ldots, g_t)$ より,

$$|R(t, f)(\boldsymbol{g})| \leq 2^{t(r-2t-\delta)}L(A)M(P_{\boldsymbol{g}})^{r-2t-\delta}$$

である. ここで, 条件 $M(P_{\boldsymbol{g}}) \geq \left(2^{t(r-2t-\delta)}L(A)\right)^{2/\delta}$ を使うと,

$$|R(t, f)(\boldsymbol{g})| \leq M(P_{\boldsymbol{g}})^{r-2t-\delta/2}$$

が成り立つ. [1] の定理 1 を適用すれば, 整数解 $\boldsymbol{g}$ の個数は

$$2^{8t+65}t^{2t+21}\delta^{-t-5}r^t \log 4r \log\log 4r$$

以下である.

参考文献

[1] J. -H. Evertse, *On reultant inequalities*, Acta Arith. 105, No.1, 2002, 65–101.

[2] K. Győry & Min Ru, *Integer solutions of a sequence of decomposable from inequalities*, Acta Arith. 86, No.3, 1998, 227–237.

[3] K. Mahler, *Lecture on Transcendental Numbers*, Lecture Notes in Math. 546, Springer-Verlag, 1976.

[4] N. Hirata-Kohno & J.-H. Evertse, *Wirsing systems and resultant inequalities*, Number Theory for the Millennium, ed. by M. A. Bennett et al., vol.1, 449–461, A.Peters, 2002.

[5] W.M. Schmidt, *Inequalities for resultant and for decomposable forms.* In Diophantine Approximaiton and its Applications, ed. by C.F. Osgood, 235–253, Academic Press, 1973.

[6] W.M. Schmidt, *Linearformen mit algebraischen Koeffizienten. II.* Math. Ann. 191, 1–20.

[7] W.M. Schmidt, *Diophantine Approximation*, Lecture Notes in Math. 785, Springer-Verlag, 1980.

中村 俊之
日本大学大学院理工学研究科数学専攻
〒 101-8308 東京都千代田区神田駿河台 1-8-14

Toshiyuki Nakamura
Mathematics, Graduate School ofScience and Technology,
Nihon University
Tokyo, Chiyoda, 101-8308, JAPAN