代数多様体上の有理点分布

整数が互いに素である確率から Batyrev-Manin 予想まで

東北大学大学院理学研究科　佐藤 篤 (Atsushi Sato)

1　整数が互いに素である確率

Hardy-Wright の教科書 [HW79] は世界中で広く読まれている数論の古典であるが, その中に良く知られた次の事実 (初めに示したのは Dirichlet) が述べられている:

THEOREM 332. *The probability that two integers should be prime to one another is* $6/\pi^2$.

この定理は, 正確には整数の 2 個組 (x,y) 全体の中で $\gcd(x,y)=1$ であるようなものの占める割合が漸近的に $6/\pi^2$ に一致する, すなわち

$$\lim_{B\to\infty}\frac{\#\{\,(x,y)\in\mathbb{Z}^2\ ;\ \gcd(x,y)=1,\ \max\{\,|x|,|y|\,\}\le B\,\}}{\#\{\,(x,y)\in\mathbb{Z}^2\ ;\ \max\{\,|x|,|y|\,\}\le B\,\}}=\frac{6}{\pi^2}$$

を意味し, 上で確率 (probability) と呼ばれているものは正しくは密度 (density) と呼ぶべきものである. [HW79] では, Euler 函数の総和函数の漸近的な挙動を調べた後, その系として上の定理を述べているが, ここでは "2 個組" を "m 個組" に一般化した上で証明の概略を述べる.

定理 1.1 $m\ge 2$ とするとき

$$\lim_{B\to\infty}\frac{\#\{\,X\in\mathbb{Z}^m\ ;\ \gcd(X)=1,\ H_\infty(X)\le B\,\}}{\#\{\,X\in\mathbb{Z}^m\ ;\ H_\infty(X)\le B\,\}}=\frac{1}{\zeta(m)}. \tag{1.1}$$

ここで

$$\gcd(X):=\gcd_i\, x_i,\qquad H_\infty(X):=\max_i |x_i|\qquad \bigl(X=(x_i)\in\mathbb{Z}^m\bigr).$$

また, $\zeta(s)$ は Riemann ゼータ函数を表す.

上の定理を示すために, 整数 $a>0$ と実数 $B>0$ によって定まる

$$L(a,B):=\{\,X\in\mathbb{Z}^m\ ;\ \gcd(X)=a,\ H_\infty(X)\le B\,\}$$

なる集合を考える. このとき

$$L(a,B)\ni X\longmapsto \frac{1}{a}\,X\in L\Bigl(1,\frac{B}{a}\Bigr)$$

なる全単射が得られ, また

$$\coprod_{a=1}^{\infty} L(a,B) = \{\, X \in \mathbb{Z}^m \ ;\ H_\infty(X) \le B \,\} - \{\, 0 \,\} \tag{1.2}$$

が成り立つから, 元の個数を比較して

$$\sum_{a=1}^{\infty} \#L\Big(1, \frac{B}{a}\Big) = \big(2[B]+1\big)^m - 1 = 2^m B^m + O\big(B^{m-1}\big).$$

従って,

$$g(B) = \sum_{a=1}^{\infty} f\Big(\frac{B}{a}\Big) \implies f(B) = \sum_{a=1}^{\infty} \mu(a)\, g\Big(\frac{B}{a}\Big)$$

($f(B)$ と $g(B)$ は $\mathbb{R}_{\ge 0}$ 上の函数) なる形の Möbius 反転公式より,

$$\#L(1,B) = \sum_{a=1}^{\infty} \mu(a) \bigg(2^m \Big(\frac{B}{a}\Big)^m + O\Big(\Big(\frac{B}{a}\Big)^{m-1}\Big)\bigg) = \frac{2^m}{\zeta(m)}\, B^m + O\big(B^{m-1}\big).$$

ただし, $m=2$ の場合には

$$\#L(1,B) = \sum_{a=1}^{\infty} \mu(a) \bigg(\Big(2\Big[\frac{B}{a}\Big]+1\Big)^2 - 1\bigg) = \sum_{a=1}^{[B]} \mu(a) \bigg(\frac{4B^2}{a^2} + O\Big(\frac{B}{a}\Big)\bigg) = \cdots$$

と計算して

$$\#L(1,B) = \frac{4}{\zeta(2)}\, B^2 + O(B \log B).$$

いずれの場合にも

$$\#\{\, X \in \mathbb{Z}^m \ ;\ \gcd(X) = 1,\ H_\infty(X) \le B \,\} = \#L(1,B) \sim \frac{2^m}{\zeta(m)}\, B^m$$

となり, これより求める漸近公式 (1.1) を得る.

さて, $(m-1)$ 次元射影空間上の $\mathbb{Q}$-有理点 $P \in \mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{Q})$ は, $\gcd(X) = 1$ なる $X \in \mathbb{Z}^m$ を用いて $P = [X]$ と斉次座標に表示され, $H(P) := H_\infty(X)$ は P の高さと呼ばれる (例 A.3). X の選び方は ± 1 倍の違いを除いて一意的であるから

$$\#\{\, P \in \mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{Q}) \ ;\ H(P) \le B \,\} = \frac{\#L(1,B)}{2}$$

となり, 上の証明で得られた結果は次のように言い換えることができる:

定理 1.2 $m \ge 2$ とするとき

$$\#\{\, P \in \mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{Q}) \ ;\ H(P) \le B \,\} = \frac{2^{m-1}}{\zeta(m)}\, B^m + \begin{cases} O(B \log B) & (m=2) \\ O\big(B^{m-1}\big) & (m \ge 3) \end{cases}.$$

注意 1.3 (1.2) より, $\operatorname{Re} s > m$ なる $s \in \mathbb{C}$ に対し, 次が成り立つことが示せる:

$$\sum_{P \in \mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{Q})} H(P)^{-s} = \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{i=0}^{[\frac{m-1}{2}]} \binom{m}{2i+1} 2^{m-2i-1}\, \zeta(s-m+2i+1).$$

右辺の函数は, $s=m$ を 1 位の極とする他は $\operatorname{Re} s \ge m$ で正則で, $s=m$ での留数は $m\, 2^{m-1}/\zeta(m)$ である. 従って, この函数に Tauber 型定理を適用することによって (1.1) を示すこともできる.

2　代数多様体上の有理点分布

k を有限次代数体, V を k 上定義された非特異な射影代数多様体とし, $V(k)$ で V 上の k-有理点全体のなす集合を表す. 雑な言い方をすると, V とは k-係数の代数的な (連立) 不定方程式であり, その k 内での解の全体が $V(k)$ である.

“不定方程式” V の研究においては, $V(k)$ は空か否かが問題になることもあれば, 有限か無限かが問題になることもある. これらの問題も含め, 集合 $V(k)$ の “大きさ” を測るために, 以下に述べるように高さ函数を用いて k-有理点の分布を調べるという方法がある:

D を V 上の豊富な因子とし, $h_D : V(\bar{\mathbb{Q}}) \to \mathbb{R}$ を D に対応する絶対的対数的高さとする (高さの定義と基本的な性質については, 付録 A を参照のこと). このとき, 各定数 B に対し, 高さが B 以下であるような k-有理点の全体 $\{ P \in V(k) \ ; \ h_D(P) \leq B \}$ は有限集合になる. その元の個数 $\#\{ P \in V(k) \ ; \ h_D(P) \leq B \}$ を B の函数と見なしたものを**数え上げ函数**と呼ぶ. この函数は広義単調増大であり, $V(k)$ が空 (resp. 有限) であることは数え上げ函数が恒等的に 0 (resp. 有界) であることと同値である. また, $V(k)$ が無限個の点よりなる場合にも, 数え上げ函数の発散の速さは $V(k)$ の “大きさ” を表していると思える. 以下では, 数え上げ函数 $\#\{ P \in V(k) \ ; \ h_D(P) \leq B \}$ の $B \to \infty$ での漸近的な挙動のことを V 上の **k-有理点の分布**と呼ぶことにする.

ある種の多様体 V に対しては, V や k に関する重要な量が有理点分布と密接な関わりをもっている. ここでは古典的な例を 2 つ紹介する. まずは射影多様体の容れ物である射影空間に関する Schanuel の結果である:

定理 2.1 (Schanuel [Sch79]) $m \geq 2$ とし, h を $\mathbb{P}^{m-1}$ の絶対的対数的高さとするとき

$$\#\{ P \in \mathbb{P}^{m-1}(k) \ ; \ h(P) \leq B \} = c\, e^{m[k:\mathbb{Q}]B} + \begin{cases} O(B\, e^{B}) & (m = 2,\ k = \mathbb{Q}) \\ O\big(e^{(m[k:\mathbb{Q}]-1)B}\big) & (\text{otherwise}) \end{cases} .$$

ここで

$$c := \frac{hR}{w} \cdot \frac{1}{\zeta_k(m)} \left(\frac{2^{r_1} (2\pi)^{r_2}}{\sqrt{|d|}} \right)^m m^{r_1 + r_2 - 1}.$$

右辺において $\zeta_k(s)$ は k の Dedekind ゼータ函数を表し, 残りの記号の意味は次の通り:

h	k の類数,	R	k の単数規準,
w	k に含まれる 1 の巾根の個数,	d	k の判別式,
r_1	k の実素点の個数,	r_2	k の虚素点の個数.

k に関する高さ H_k を用いると, 上の定理の漸近公式は

$$\#\{ P \in \mathbb{P}^{m-1}(k) \ ; \ H_k(P) \leq B \} = c\, B^m + \begin{cases} O(B \log B) & (m = 2,\ k = \mathbb{Q}) \\ O\big(B^{m-1/[k:\mathbb{Q}]}\big) & (\text{otherwise}) \end{cases} \tag{2.1}$$

と書ける (c は定理と同じもの). 前節で述べた定理 1.2 は, この公式において $k=\mathbb{Q}$ としたものに他ならない. しかし, 有理数体を一般の代数体に置き換えると, 証明は途端に難しくなる. ここでは, 前節の計算と比較しながら (2.1) の証明の粗筋を述べる.

先に述べたように, 任意の $P\in\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{Q})$ は $\gcd(X)=1$ なる $X\in\mathbb{Z}^m$ を用いて $P=[X]$ と表示されるが, このような斉次座標が選べるのは $\mathbb{Z}$ が一意分解環 (つまり $\mathbb{Q}$ の類数が 1) だからである. そこで, $P=[X]\in\mathbb{P}^{m-1}(k)$ $(X=(x_i)\in k^m-\{0\})$ に対して X の成分が生成する分数イデアル $\mathfrak{a}_X$ を考えると, そのイデアル類 $C_P:=[\mathfrak{a}_X]$ は X の選び方には依らない. また

$$H_{k,\infty}(X):=\prod_{v\in M_k^\infty}\max_i\|x_i\|_v$$

と置くと次が成り立つ:

$$H_k(P)=\frac{H_{k,\infty}(X)}{N\mathfrak{a}_X}.$$

いま, k の分数イデアル $\mathfrak{a}\neq 0$ と実数 $B>0$ によって定まる

$$L(\mathfrak{a},B):=\{\,X\in k^m\ ;\ \mathfrak{a}_X=\mathfrak{a},\ H_{k,\infty}(X)\le B\,\}$$

なる集合を考える. このとき $L(\mathfrak{a},B)$ には k の単数群 $\mathcal{O}^\times$ が自然に作用し, 商集合 $L(\mathfrak{a},B)/\mathcal{O}^\times$ は

$$\{\,P\in\mathbb{P}^{m-1}(k)\ ;\ C_P=[\mathfrak{a}],\ H(P)\le B/N\mathfrak{a}\,\}$$

と同一視できる. また

$$\coprod_{\mathfrak{b}}L(\mathfrak{a}\mathfrak{b},B)=\{\,X\in\mathfrak{a}^m\ ;\ H_{k,\infty}(X)\le B\,\}-\{\,0\,\}.$$

ただし, 左辺において $\mathfrak{b}$ は k の 0 でない整イデアルを渡り, 右辺における $\mathfrak{a}^m$ は $\mathfrak{a}$ の m 個の直積 $\{\,(x_i)\in k^m\ ;\ x_i\in\mathfrak{a}\,\}$ を意味する. よって

$$\lambda(\mathfrak{a},B):=\#\{\,X\in\mathfrak{a}^m\ ;\ H_{k,\infty}(X)\le B\,\}/\mathcal{O}^\times \tag{2.2}$$

の振る舞いがわかれば

$$g(\mathfrak{a})=\sum_{\mathfrak{b}}f(\mathfrak{a}\mathfrak{b})\implies f(\mathfrak{a})=\sum_{\mathfrak{b}}\mu(\mathfrak{b})\,g(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \tag{2.3}$$

($f(\mathfrak{a})$ と $g(\mathfrak{a})$ は k のイデアル群上の函数で, $\mathfrak{b}$ は k の 0 でない整イデアルを渡る) なる形の Möbius 反転公式を用いて $\#L(\mathfrak{a},B)/\mathcal{O}^\times$ に関する漸近公式が得られるということになる.

さて, $k=\mathbb{Q}$ のときには, $\mathfrak{a}$ としては $\mathbb{Z}$ だけを考えれば十分で, しかも

$$\#\{\,X\in\mathbb{Z}^m\ ;\ H_{\mathbb{Q},\infty}(X)\le B\,\}/\mathbb{Z}^\times=\#\{\,X\in\mathbb{Z}^m\ ;\ H_\infty(X)\le B\,\}/\{\,\pm1\,\}=\frac{(2[B]+1)^m}{2}$$

は殆ど自明であった. ところが, 一般の代数体に対して $\lambda(\mathfrak{a},B)$ の挙動を調べるのは容易ではなく, 長い計算を経て

$$\lambda(\mathfrak{a},B)=c_0\Big(\frac{B}{N\mathfrak{a}}\Big)^m+O\big(B^{m-1/n}\big) \tag{2.4}$$

となることが示される．ここで

$$c_0 := \frac{R}{w}\left(\frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}}{\sqrt{|d|}}\right)^m m^{r_1+r_2-1}, \qquad n := [k:\mathbb{Q}].$$

なお, $\lambda(\mathfrak{a}, B)$ の定義 (2.2) において形式的に $m=1$ とすると (このときにも右辺は意味をもつ)

$$\lambda(\mathfrak{a}, B) = \#\{\, x \in \mathfrak{a}\ ;\ |N_{k/\mathbb{Q}}\, x| \le B \,\}/\mathcal{O}^\times = \#\{\, (x) \subseteq \mathfrak{a}\ ;\ N(x) \le B \,\}$$

となり, これから 1 を引いたものは $\mathfrak{a}$ の逆類に属する整イデアルでノルムが $B/N\mathfrak{a}$ 以下であるようなものの個数に一致する．つまり, 漸近公式 (2.4) において $m=1$ としたものは Dedekind-Weber の定理

$$\#\{\, \mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}\ ;\ [\mathfrak{a}] = C,\ N\mathfrak{a} \le B \,\} = \frac{R}{w}\cdot\frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}}{\sqrt{|d|}}\, B + O\big(B^{1-1/[k:\mathbb{Q}]}\big)$$

(例えば [Lan94], Chap. VI, Theorem 3) に他ならない．この定理は相当に厄介な計算の後に証明されたが, 一般の m に対する証明はそれをより複雑にしたものになる (鍵となるのは基本領域の体積の計算である).

漸近公式 (2.4) における O-定数はイデアル $\mathfrak{a}$ に依っているが, 類数の有限性を用いると, O-定数が $\mathfrak{a}$ には依らない漸近公式

$$\lambda(\mathfrak{a}, B) = c_0\Big(\frac{B}{N\mathfrak{a}}\Big)^m + O\bigg(\Big(\frac{B}{N\mathfrak{a}}\Big)^{m-1/n}\bigg)$$

を得ることができる．従って

$$\sum_{\mathfrak{b}} \#L(\mathfrak{a}\mathfrak{b}, B)/\mathcal{O}^\times = \lambda(\mathfrak{a}, B) - 1$$

に反転公式 (2.3) を適用して,

$$\#L(\mathfrak{a}, B)/\mathcal{O}^\times = \sum_{\mathfrak{b}} \mu(\mathfrak{b})\Bigg(c_0\Big(\frac{B}{N(\mathfrak{a}\mathfrak{b})}\Big)^m + O\bigg(\Big(\frac{B}{N(\mathfrak{a}\mathfrak{b})}\Big)^{m-1/n}\bigg)\Bigg) = \frac{c_0}{\zeta_k(m)}\Big(\frac{B}{N\mathfrak{a}}\Big)^m + O\big(B^{m-1/n}\big).$$

ただし, $m=2$ かつ $n=1$ の場合には誤差項の形が異なる (その場合は既に前節で扱ったので省略してよい)．よって, 各イデアル類 C に対して

$$\#\{\, P \in \mathbb{P}^{m-1}(k)\ ;\ C_P = C,\ H_k(P) \le B \,\} = \frac{c_0}{\zeta_k(m)}\, B^m + O\big(B^{m-1/n}\big)$$

が成り立ち, これより求める漸近公式 (2.1) を得る．

次に紹介するのはアーベル多様体に関する Néron の結果である:

定理 2.2 (Néron [Nér65]) A を k 上定義されたアーベル多様体, D を A 上の豊富な因子とするとき

$$\#\{\, P \in A(k)\ ;\ h_D(P) \le B \,\} = c\, B^{r/2} + O\big(B^{(r-1)/2}\big).$$

ここで

$$r := \operatorname{rank} A(k), \qquad c := \# A(k)_{\mathrm{tors}} \frac{\omega}{\sqrt{R}}.$$

ただし, ω は $\mathbb{R}^r$ における単位球の体積を表し, $R = \det(\langle P_i, P_j \rangle_D)_{1 \le i,j \le r}$ は D に対応する高さペアリングに関する $A(k)/A(k)_{\mathrm{tors}}$ の Gram 行列式を表す ($P_1, \ldots, P_r$ は $A(k)/A(k)_{\mathrm{tors}}$ の基底). なお $r = 0$ の場合には $c := \# A(k)_{\mathrm{tors}}$ とする.

この定理は, $A(k)$ が有限生成アーベル群であること (Mordell-Weil の定理) と, A 上の因子 D に対して $A(\bar{\mathbb{Q}})$ 上の 2 次形式 q_D と 1 次形式 l_D で $h_D = q_D + l_D + O(1)$ をみたすものが存在すること (標準的高さの理論) から容易に導かれる. 実際, $A(k)$ が有限生成であることより $A(k)/A(k)_{\mathrm{tors}} \cong \mathbb{Z}^r$ は $A(k) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^r$ 内の格子となり, また D が豊富ならば q_D が与える $A(k) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ 上の 2 次形式は正定値となることがわかるから, 問題は Euclid 空間における格子点の数え上げに帰着される. なお, Mordell-Weil の定理の証明においても高さ函数が重要な役割を演ずることを注意しておく.

定理 2.1 と定理 2.2 の簡単な応用として, 良く知られた次の事実を直ちに示すことができる:

系 2.3 $E : y^2 = f(x)$ を k 上定義された楕円曲線 ($f(x)$ は重根をもたない 3 次式) とし, $d \in k^\times/k^{\times 2}$ に対して $E_d : dy^2 = f(x)$ を E の $k(\sqrt{d})/k$ に関するツイストとする. このとき, $\operatorname{rank} E_d(k) > 0$ となるような $d \in k^\times/k^{\times 2}$ は無数に多く存在する.

E_d が E のツイストと呼ばれるのは

$$\theta_d : E_d \ni (x, y) \longmapsto (x, \sqrt{d}\, y) \in E$$

が $K_d := k(\sqrt{d}\,)$ 上定義された同型となるからで, θ_d による $E_d(k)$ の像は $E(K_d)$ の中で

$$\theta_d\bigl(E_d(k)\bigr) = \{\, P \in E(K_d) \ ; \ P^{\sigma_d} = -P \,\}$$

と特徴付けられる. ただし σ_d は $\mathrm{Gal}(K_d/k)$ の生成元を表す. これより

$$\{\, P \in E(\bar{\mathbb{Q}}) \ ; \ x(P) \in \mathbb{P}^1(k) \,\} = \bigcup_{d \in k^\times/k^{\times 2}} \theta_d\bigl(E_d(k)\bigr)$$

が成り立つことがわかるが, 右辺は殆ど非交和である:

$$\theta_d\bigl(E_d(k)\bigr) \cap \theta_{d'}\bigl(E_{d'}(k)\bigr) \subseteq E[2] := \{\, P \in E(\bar{\mathbb{Q}}) \ ; \ [2]P = O \,\} \qquad (d \neq d').$$

従って x-座標の高さが B 以下であるような点の個数を比較して

$$\begin{aligned} &\#\{\, P \in E(\bar{\mathbb{Q}}) \ ; \ x(P) \in \mathbb{P}^1(k), \ h\bigl(x(P)\bigr) \le B \,\} \\ &= \sum_{d \in k^\times/k^{\times 2}} \#\{\, P \in \theta_d\bigl(E_d(k)\bigr) - E[2] \ ; \ h\bigl(x(P)\bigr) \le B \,\} + O(1). \end{aligned}$$

ここで, 定理 2.1 より

$$\#\{\, P\in E(\bar{\mathbb{Q}})\ ;\ x(P)\in\mathbb{P}^1(k),\ h\bigl(x(P)\bigr)\le B\,\} = 2\,\#\{\, P\in\mathbb{P}^1(k)\ ;\ h(P)\le B\,\} + O(1) \asymp e^{2[k:\mathbb{Q}]B}.$$

他方, 定理 2.2 より, $r_d := \operatorname{rank} E_d(k)$ として

$$\#\{\, P\in\theta_d\bigl(E_d(k)\bigr) - E[2]\ ;\ h\bigl(x(P)\bigr)\le B\,\} \asymp B^{r_d/2}.$$

また, $\bigcup_d E(K_d)_{\mathrm{tors}}$ が有限であることより, 有限個の d を除いて $r_d = 0$ は $\theta_d\bigl(E_d(k)\bigr)\subseteq E[2]$ を意味することがわかる. よって $r_d > 0$ であるような d は無数に多く存在しなくてはならない.

射影空間やアーベル多様体の他にも, 有理点分布に関して類似の漸近公式が示されている多様体には次のようなものがある:

(a) 半単純な線型代数群の放物型部分群による商 (Franke-Manin-Tschinkel [FMT89]).

(b) Grassmann 多様体, 旗多様体 (Thunder [Thu92], [Thu93]).

(c) トーリック多様体 (Batyrev-Tschinkel [BT98]).

(d) 超楕円曲面 (Morita-Sato [MS92]).

(代表的なもののみ. $k=\mathbb{Q}$ の場合に限れば, より多くの結果がある.) これらの多様体は群と深く関係し, 従って強い対称性をもっていることを注意しておく. なお, (a) は (b) を含んでいるように見えるが, (b) の方が手法が初等的で結果も具体的である.

3 Batyrev-Manin 予想

射影空間やアーベル多様体, ならびに前節の最後で挙げたような多様体に関する数え上げ函数の漸近公式は, いずれも “主要項 + 誤差項” という形をしており, その増大度や主要項の係数 (定理 2.1 や定理 2.2 における c) は多様体や代数体の幾何学的または数論的な不変量と密接な関わりをもっている.

これらの結果だけを見ると, 任意の多様体 V に対し, 有理点分布を調べることによって V や k に関する情報が得られるのではないか (極言すれば, 数え上げ函数のグラフから V や k を言い当てることができるのではないか) といった想いに駆られるかも知れない.

しかし, 少し冷静に考えれば, このような期待は幻想に過ぎないことがわかる. 実際, 例えば V をアーベル曲面 A の点 $P_0\in A(k)$ におけるブローアップとすると, 定理 2.1 と定理 2.2 より, 例外曲線 C ($\cong\mathbb{P}^1$) は $V-C$ ($\cong A-\{\,P_0\,\}$) と比べて遥かに多くの有理点をもつことがわかるから, 数え上げ函数の挙動から $V-C$ の様子を窺い知ることは期待できない. あるいは, V を射影直線 $\mathbb{P}^1$ と種数が 2 以上の曲線 C の直積とすると, Faltings [Fal83] によって証明された Mordell 予想により $C(k)$ は有限であるから, 数え上げ函数が有限個の曲線 $\mathbb{P}^1\times\{\,P\,\}$ ($P\in C(k)$) の外の情報を提供することはない.

上で挙げた例のように, 多様体 V 上の有理点が次元の低い部分多様体 W の上に極端に集中していることは珍しいことではない. そのような場合には, V そのものではなく $V-W$ 上の有理点分布を調べようと考えるのは自然であろう. “Zariski 開集合 $U \subseteq V$ を適切に選べば, U 上の有理点分布は V の幾何学的な不変量によって支配されるであろう” と主張するのが, 以下で紹介する Batyrev-Manin 予想である. 予想を正確な形に述べるため, いくつか記号を準備する.

V を有限次代数体 k 上定義された非特異な射影代数多様体とし, V 上の豊富な因子 D に対し, **幾何学的不変量** $\alpha(D)$ を次により定める:

$$\alpha(D) := \inf\{\, \gamma \in \mathbb{R}\ ;\ \gamma D + K_V \in N^1_{\mathrm{eff}}(V)\, \}.$$

ここで, K_V は V 上の標準因子を表し, $N^1_{\mathrm{eff}}(V)$ は正の因子により生成される $\mathrm{NS}(V) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ 内の閉錘を表す ($\mathrm{NS}(V)$ は V の Néron-Severi 群). また, k 上定義された Zariski 開集合 $U \subseteq V, \neq \emptyset$ と V 上の豊富な因子 D に対し, **数論的不変量** $\beta_U(D)$ を次により定める:

$$\beta_U(D) := \inf\{\, s \in \mathbb{R}\ ; Z_U(D; s) < \infty\, \}.$$

ここで

$$Z_U(D; s) := \sum_{P \in U(k)} e^{-s\,[k:\mathbb{Q}]\, h_D(P)}. \tag{3.1}$$

h_D は D から有界函数の差を除いて一意的に定まるから, $\beta_U(D)$ は h_D の選び方には依らない.

注意 3.1 (i) 定義から明らかなように, 整数 $n > 0$ に対し, 次が成り立つ:

$$\alpha(nD) = \frac{\alpha(D)}{n}, \qquad \beta_U(nD) = \frac{\beta_U(D)}{n}.$$

また, $\alpha(D)$ の符号や $\beta_U(D)$ の符号は D の選び方に依らないことが示せる.

(ii) $\beta_U(D)$ が負となるためには $U(k)$ が有限であることが必要かつ十分である. そのときには $\beta_U(D) = -\infty$ となるから, $\beta_U(D)$ は非負の実数か $-\infty$ に値をとる. また, $\beta_U(D) \neq -\infty$ (すなわち $\#U(k) = \infty$) の場合には, $\beta_U(D)$ は数え上げ函数を用いて次のように表せる:

$$\begin{aligned}\beta_U(D) &= \frac{1}{[k:\mathbb{Q}]} \inf\bigl\{\, \delta \in \mathbb{R}\ ;\ \#\{\, P \in U(k)\ ;\ h_D(P) \le B\, \} \ll e^{\delta B}\, \bigr\} \\ &= \frac{1}{[k:\mathbb{Q}]} \limsup_{B \to \infty} \frac{\log\bigl(\#\{\, P \in U(k)\ ;\ h_D(P) \le B\, \}\bigr)}{B}.\end{aligned}$$

(iii) $\beta_U(D)$ の定義に用いられた (3.1) の Dirichlet 級数 $Z_U(D; s)$ を**高さゼータ函数**と呼ぶ. いくつかの多様体に対しては, h_D を適切に選ぶことにより, $Z_U(D; s)$ は “ゼータ” と呼ぶに相応しい性質をもち, Tauber 型定理を用いて有理点分布に関する結果が得られることがある. 前節の最後に紹介した (a) と (c) は, そのような多様体の例となっている (注意 1.3 も参照のこと).

以上の記号を用いて, 予想は次のように述べることができる:

予想 3.2 (Batyrev-Manin [BM90]) D を V 上の豊富な因子とするとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, k 上定義された Zariski 開集合 $U \subseteq V, \neq \emptyset$ で次をみたすものが存在する:

$$\beta_U(D) \leq \alpha(D) + \varepsilon.$$

なお, この予想は [BM90] の Conjecture A に当たる. [BM90] では, 上の予想に続けて特別な仮定の下で精密化された予想がいくつか述べられている.

例 3.3 (i) V が射影空間 $\mathbb{P}^{m-1}$ のとき, $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^{m-1}) = \mathrm{NS}(\mathbb{P}^{m-1})$ が超平面 H が生成する巡回群であることと $K_{\mathbb{P}^{m-1}} = -mH$ であることより $\alpha(H) = m$ がわかる. 定理 2.1 より $\beta_{\mathbb{P}^{m-1}}(H) = m$ であるから, $U = \mathbb{P}^{m-1}$ として予想が成り立っている.

(ii) V がアーベル多様体 A のとき, $K_A = 0$ であることより $\alpha(D) = 0$ がわかる. 定理 2.2 より $\beta_A(D) \leq 0$ であるから, $U = A$ として予想が成り立っている.

例 3.4 V が種数 g の曲線 C のとき, $\deg : \mathrm{Div}(C) \to \mathbb{Z}$ が $\mathrm{NS}(C) \cong \mathbb{Z}$ を与えることと $\deg K_C = 2g - 2$ であることより, 豊富な (すなわち正の) 因子 D に対して

$$\alpha(D) = \frac{2 - 2g}{\deg D}$$

となることがわかる. 従って:

(i) $g = 0$ ならば $\alpha(D) > 0$.

(ii) $g = 1$ ならば $\alpha(D) = 0$.

(iii) $g \geq 2$ ならば $\alpha(D) < 0$.

(i) と (ii) の場合に予想が成り立つことは上の例で見た通りで, (iii) の場合の予想は Mordell 予想に他ならない. つまり, 任意の曲線に対して Batyrev-Manin 予想は成り立っている.

上の例で見たように, $V = C$ が曲線の場合には種数が 0 か 1 か 2 以上かによって $\alpha(D)$ の符号は 3 つの場合に分かれる. この 3 通りの場合分けは, C の小平次元 $\kappa(C)$ による分類だと見なすことができる. 実際, これらの分類は $\kappa(C)$ がそれぞれ $-\infty$, 0, 1 の場合に対応する. 次元の高い多様体 V に対しても, 小平次元 $\kappa(V)$ は $\alpha(D)$ の符号と深い関わりをもつことが知られている. 例えば曲面に対しては次が成り立つ:

定理 3.5 (Morita [Mor97]) $V = S$ が曲面のとき, S 上の豊富な因子 D に対して:

(i) $\kappa(S) = -\infty$ ならば $\alpha(D) > 0$.

(ii) $\kappa(S) = 0, 1$ ならば $\alpha(D) = 0$.

(iii) $\kappa(S) = 2$ ならば $\alpha(D) < 0$.

代数多様体 V で $\kappa(V) = \dim V$ をみたすものは一般型であると呼ばれるが, そのような多様体に対しては $\alpha(D) < 0$ となることが知られている. 従って, 一般型の多様体 V に対する Batyrev-Manin 予想は, Mordell 予想を次のように高次元化したものになる:

予想 3.6 V が一般型であるとき, k 上定義された Zariski 開集合 $U \subseteq V, \neq \emptyset$ が存在して $U(k) = \emptyset$.

4 $K3$ 曲面上の有理点分布

S を有限次代数体 k 上定義された非特異な射影代数曲面で, 第 1 種例外曲線を含まないようなものとする. そのような曲面 S は, 小平次元 $\kappa(S)$ に従って ($\bar{\mathbb{Q}}$ 上では) 次のように分類されることが知られている:

(i) $\kappa(S) = -\infty$ ならば有理曲面または線織曲面.

(ii) $\kappa(S) = 0$ ならばアーベル曲面, 超楕円曲面, $K3$ 曲面または Enriques 曲面.

(iii) $\kappa(S) = 1$ ならば楕円曲面 (の構造を自然にもつ).

(iv) $\kappa(S) = 2$ ならば一般型の曲面 (であると呼ばれる).

これらの曲面の有理点 (分布) の研究は, (i) については比較的易しく, (iv) については前節の最後に触れたように困難が予想される. 残る (ii) と (iii) については, 定理 3.5 より幾何学的不変量 $\alpha(D)$ は 0 となるから, Batyrev-Manin 予想 (予想 3.2) の主張は次のようになる:

予想 4.1 S の小平次元 $\kappa(S)$ が 0 または 1 であるとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, k 上定義された Zariski 開集合 $U \subseteq S, \neq \emptyset$ が存在して

$$\#\{\, P \in U(k)\ ;\ h_D(P) \leq B \,\} \ll e^{\varepsilon B}.$$

上の予想における Zariski 開集合 U とは S から有限個の曲線 (と有限個の点) を取り除いたものであるが, 取り除く曲線の種数は 0 であるとしてよい. 実際, $\beta_S(D) > 0$ ならば, S から種数が 1 以上の曲線を除いても β の値を小さくすることはできない.

$\kappa(S) = 0$ である場合, アーベル曲面と超楕円曲面に対しては $U = S$ として上の予想が成り立っている. また, Enriques 曲面に対する予想は $K3$ 曲面に対する予想に帰着できることが知られている. 以下, 本節では $K3$ 曲面上の有理点 (分布) に関する研究の現状を紹介する.

4.1 $K3$ 曲面と Kummer 曲面

$\kappa(S) = 0$ であるような S のうち, 標準因子 K_S が 0 で, かつ不正則数 $q(S)$ が 0 であるようなものを ***K*3 曲面**と呼ぶ. $\mathbb{P}^3$ 内の非特異な 4 次曲面は $K3$ 曲面の例を与える. また, 次のようにアーベル曲面から $K3$ 曲面を構成することもできる:

例 4.2 A を k 上定義されたアーベル曲面とする. $A[2] := \{\, P \in A(\bar{\mathbb{Q}})\ ;\ [2]P = O \,\}$ は (-1) 倍写像の不動点の全体に一致するが, $\rho : \hat{A} \to A$ をこれら 16 点でのブローアップとする. このとき,

$[-1] \in \mathrm{Aut}_k(A)$ は, 例外曲線への作用を自明に定めることにより, 対合 $\iota \in \mathrm{Aut}_k(\hat{A})$ に延長され, $S := \hat{A}/\langle\iota\rangle$ は k 上定義された $K3$ 曲面となることが示される. S を A に付随する **Kummer 曲面**と呼ぶ. なお, $\pi : \hat{A} \to S$ を射影とすると, 図式

$$\begin{tikzcd} \hat{A} \arrow[d, "\rho"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\ A \arrow[r, dashed, "\varpi"] & S \end{tikzcd}$$

を可換にするような k 上定義された有理写像 $\varpi : A \dashrightarrow S$ が得られ, ϖ は $A - A[2]$ 上正則である.

4.2　大きな自己同型群をもつ $\boldsymbol{K3}$ 曲面

k 上定義された $K3$ 曲面 S が "大きな" 自己同型の群 $G \subseteq \mathrm{Aut}_k(S)$ をもつとする. このとき, G は有理点の集合 $S(k)$ に自然に作用するから, 各 G-軌道に含まれる k-有理点と商 $G\backslash S(k)$ が共にわかれば $S(k)$ を知ることができる.

Silverman [Sil95] は, $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ 内の $(1,1)$-形式と $(2,2)$-形式で定義される $K3$ 曲面 S に対して上の方策を実行した. この場合には, 第 i 成分 $(i = 1, 2)$ への射影 $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ が引き起こす 2 重被覆 $S \to \mathbb{P}^2$ より得られる S の対合を σ_i とすると, $G := \langle\sigma_1, \sigma_2\rangle$ は 2 次巡回群 2 個の自由積 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ と同型な無限群になる. Silverman は σ_1 と σ_2 の作用に関して良い振る舞いをする "標準的" な高さ $\hat{h}^+$ と $\hat{h}^-$ を構成し, それらを用いて各 G-軌道に含まれる k-有理点の分布を研究した (その後の進展については Call-Silverman [CS93], [CS96] および Call [Cal94] を見よ).

Silverman による "標準的" な高さの構成は, Wang [Wan95] と Baragar [Bar96] によって $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 内の $(2,2,2)$-形式で定義される $K3$ 曲面 (G は 2 次巡回群 3 個の自由積と同型な群) へと一般化された. また, Billard [Bil97] も同じ曲面に対して Silverman と類似の結果を導いている (G は無限次の巡回群). なお, Baragar には [Bar96] に続く一連の仕事があり, それらの中では $K3$ 曲面上の曲線の分布が研究されている.

しかし, いずれの場合も商 $G\backslash S(k)$ の方が制御できていないため, これらの結果から S 全体の有理点分布を知ることはできない.

4.3　種数 0 の曲線を無数に含む $\boldsymbol{K3}$ 曲面

$\kappa(S) \neq -\infty$ (従って $\alpha(D) \leq 0$) であるような曲面 S に対して Batyrev-Manin 予想の正否を見るためには, まず S 上の種数 0 の曲線の様子を調べる必要がある. この方向からの研究として, k 上定義された $K3$ 曲面 S と S に含まれる有理曲線 (k 上定義された種数 0 の曲線で k-有理点をもつもの) の無限族 $\mathscr{C}$ に対して, (S 全体の代わりに) ある $C \in \mathscr{C}$ の上にあるような有理点に限って, その分布を調べるというものがある. この場合に Batyrev-Manin 予想が成り立っているのならば, 任意

の $\varepsilon > 0$ に対し, $\mathscr{C}$ の有限な部分族 $\mathscr{C}_\varepsilon$ で

$$\#\Big\{ P \in \bigcup_{C \in \mathscr{C} - \mathscr{C}_\varepsilon} C(k) \;;\; h_D(P) \le B \Big\} \ll e^{\varepsilon B}$$

なるものが存在しなくてはならない. 定理 2.1 より, 各 $C \in \mathscr{C}$ に対して

$$\#\{\, P \in C(k) \;;\; h_D(P) \le B \,\} \asymp e^{2[k:\mathbb{Q}]/C\cdot D}$$

($C \cdot D$ は C と D の交点数を表す) が成り立つことがわかるから, ε が小さくなるに従って $\mathscr{C}_\varepsilon$ は徐々に大きくする必要がある.

Billard [Bil97] は, 先に述べたような $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 内の $K3$ 曲面 S と無限次巡回群 $G \subseteq \mathrm{Aut}_k(S)$ に対し, S が有理曲線 C を含むときに, C の G-軌道 $\{\, \phi(C) \;;\; \phi \in G \,\}$ を $\mathscr{C}$ として上のような考察をした. また, Sato [Sat98] は, アーベル曲面 A に付随する Kummer 曲面 S と A に含まれる楕円曲線から構成される S 上の有理曲線の族を $\mathscr{C}$ として $\bigcup_{C\in\mathscr{C}} C$ 上の有理点分布を考察した. 同じ方向の研究として McKinnon [McK00], [McK04] もある.

これらの結果は S に対する Batyrev-Manin 予想と整合性があり, 予想が正しそうだという状況証拠を与えている. しかし, どの $C \in \mathscr{C}$ の上にも乗っていないような有理点の個数の評価ができない限り, 予想そのものを肯定的に解決することはできない.

4.4 “直積型” Kummer 曲面に対する Batyrev-Manin 予想

Batyrev-Manin 予想は任意の次元の多様体に関する壮大な予想であり, 全面的に解決されるまでの道程は筆者には想像もつかない. また, ここまで見たように, $K3$ 曲面に話を限定しても易しいとは言い難い. 以下で述べるのは, 楕円曲線 2 個の直積に付随する Kummer 曲面に対する Batyrev-Manin 予想が示唆しているのではないかと思われることに関する私的な見解である.

$E_i : y_i^2 = f_i(x_i)\ \ (i = 1, 2)$ を k 上定義された楕円曲線 ($f_i(x_i)$ は重根をもたない 3 次式), S を $A := E_1 \times E_2$ に付随する Kummer 曲面とし, 例 4.2 と同じ記号を用いる. このとき, S は 3 次元アフィン空間 $\mathbb{A}^3$ 内の曲面

$$S^0 \;:\; y^2 = f_1(x_1)\, f_2(x_2) \ne 0$$

と k 上双有理同値で, 有理写像 $\varpi : A \dashrightarrow S$ は A から 8 本の曲線

$$E_1 \times \{\, T_2 \,\} \qquad (T_2 \in E_2[2]), \qquad \{\, T_1 \,\} \times E_2 \qquad (T_1 \in E_1[2])$$

を除いたものから S^0 への 2 重被覆を与える. また, $d \in k^\times/k^{\times 2}$ に対して E_i のツイスト $E_{i,d}$ と $K_d := k(\sqrt{d}\,)$ 上の同型 $\theta_{i,d} : E_{i,d} \to E_i$ を系 2.3 の証明と同様に定め,

$$\mathcal{E}_{i,d} := \theta_{i,d}\big(E_{i,d}(k)\big) = \{\, P_i \in E_i(K_d) \;;\; P_i^{\sigma_d} = -P_i \,\}, \qquad \mathcal{E}_{i,d}^0 := \mathcal{E}_{i,d} - E_i[2]$$

と置くと次が成り立つ:

$$\varpi^{-1}\big(S^0(k)\big) = \coprod_{d \in k^\times/k^{\times 2}} \mathcal{E}_{1,d}^0 \times \mathcal{E}_{2,d}^0.$$

以下では, これを標語的に

$$S(k) \doteqdot \coprod_{d \in k^\times/k^{\times 2}} E_{1,d}(k) \times E_{2,d}(k)$$

と表すことにする (ϖ は一般に 2 対 1 の写像であるから, これはかなり乱暴な表記である).

さて, Batyrev-Manin 予想によれば S 上の有理点は "少ない" 筈であった. ところが

$$\mathbb{P}^1(k) \doteqdot \coprod_{d \in k^\times/k^{\times 2}} E_{i,d}(k) \qquad \Big(\text{正確には } x_i^{-1}\big(\mathbb{P}^1(k)\big) = \bigcup_{d \in k^\times/k^{\times 2}} \theta_{i,d}\big(E_{i,d}(k)\big)\Big)$$

(系 2.3 の証明を見よ) は "多くの" 有理点よりなる. つまり, "大きな" 集合 X_1, X_2 を $X_i = \coprod_d X_{i,d}$ と分割して作った集合 $\coprod_d X_{1,d} \times X_{2,d}$ が "小さく" なっていることが期待されるのである.

E_1 と E_2 が同種である場合, $E_{1,d}(k)$ と $E_{2,d}(k)$ はほぼ同じ "大きさ" をもち ($\operatorname{rank} E_{1,d}(k) = \operatorname{rank} E_{2,d}(k)$ となる), 従って $S(k)$ も "大きく" なる. ところが, この場合には A に含まれる楕円曲線から S 上の有理曲線の無限族が構成でき, 有理点の多くはこれらの曲線の上にあることが見込まれるため, 上の現象は Batyrev-Manin 予想とは矛盾しない.

他方, E_1 と E_2 が同種でない場合には, S は種数 0 の曲線をあまり含まない. 例えば, 射影 $p_i : A \to E_i$ は S に $C_i := E_i/\langle\,[-1]\,\rangle$ ($\cong \mathbb{P}^1$) 上の楕円曲面の構造 $q_i : S \to C_i$ を引き起こすが, E_1 と E_2 が同種でないときには q_i の切断は有限個しか存在しないことが示せる. S から取り除くべき有理曲線が見当たらない以上, "殆ど全て" の d に対して $E_{1,d}(k)$ か $E_{2,d}(k)$ の一方は "小さく" なっていることを期待したくなるのであるが, 数論的不変量 β に影響を及ぼさない程度の集合を "小さい" と見なすことにしている訳であるから話は単純ではない. このような漠然とした期待を定量的に定式化することが望まれる.

付録 A　高さの定義と性質

本文中で用いた高さの定義と基本的な性質について簡単に述べておく. 詳しくは [HS00] や [Lan83], [Ser97] を参照のこと.

本節を通して k を有限次代数体とする.

A.1　射影空間上の高さ

M_k を k の素点全体のなす集合とし, M_k^∞ (resp. M_k^0) で k の無限素点 (resp. 有限素点) 全体のなす集合を表す. また, $x \in k$ と $v \in M_k$ に対して $\|x\|_v$ を次により定める:

(i) $v \in M_k^\infty$ の場合. $\iota : k \to \mathbb{C}$ を v に対応する埋め込みとして

$$\|x\|_v := \begin{cases} |\iota(x)| & (\iota(k) \subseteq \mathbb{R}) \\ |\iota(x)|^2 & (\iota(k) \not\subseteq \mathbb{R}) \end{cases}.$$

(ii) $v \in M_k^0$ の場合. $\mathfrak{p}$ を v に対応する素イデアルとして

$$\|x\|_v := N\mathfrak{p}^{-\operatorname{ord}_{\mathfrak{p}}(x)}.$$

このとき次が成り立つ:

補題 A.1 (i)

$$\prod_{v \in M_k^\infty} \|x\|_v = \prod_{v \in M_k^0} \|x\|_v^{-1} = |N_{k/\mathbb{Q}}\, x| \qquad (x \in k^\times).$$

(ii) 有限次拡大 K/k に対し, M_K と $\|x\|_V$ $(x \in K,\ V \in M_K)$ を同様に定めるとき

$$\prod_{\substack{V \in M_K \\ V|v}} \|x\|_V = \|x\|_v^{[K:k]} \qquad (x \in k,\ v \in M_k).$$

$P = [X] \in \mathbb{P}^n(k)$ $(X = (x_i) \in k^{n+1} - \{\,0\,\})$ に対し,

$$H_k(P) := \prod_{v \in M_k} \max_i \|x_i\|_v$$

を P の k に関する (**指数的**) **高さ**と呼ぶ. 上の補題の (i) により, この定義は X の選び方には依らない. また, ある i に対して $x_i = 1$ となるような X が選べるから, $H_k(P) \geq 1$ である. さらに, 補題の (ii) により,

$$H(P) := H_k(P)^{1/[k:\mathbb{Q}]}$$

は P の定義体 k の選び方には依らずに定まる. $H(P)$ を P の**絶対的** (**指数的**) **高さ**と呼び,

$$h(P) := \log H(P)$$

を P の**絶対的対数的高さ**と呼ぶ.

注意 A.2 $X = (x_i) \in k^{n+1} - \{\,0\,\}$ の成分が生成する分数イデアルを $\mathfrak{a}_X$ と置くと

$$N\mathfrak{a}_X = \Big(\prod_{v \in M_k^0} \max_i \|x_i\|_v\Big)^{-1}$$

が成り立つから, $P = [X] \in \mathbb{P}^n(k)$ の k に関する高さは

$$H_k(P) = \frac{\displaystyle\prod_{v \in M_k^\infty} \max_i \|x_i\|_v}{N\mathfrak{a}_X}$$

とも表せる.

例 A.3 $k = \mathbb{Q}$ のとき, $P \in \mathbb{P}^n(\mathbb{Q})$ は $\gcd_i x_i = 1$ なる $(x_i) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ を用いて $P = [x_i]$ と表せる. このとき

$$H(P) = H_{\mathbb{Q}}(P) = \max_i |x_i|.$$

上の例より明らかなように, 任意の定数 B に対して $h(P) \leq B$ であるような $P \in \mathbb{P}^n(\mathbb{Q})$ は有限個しか存在しない. より一般に次が成り立つ:

命題 A.4 任意の定数 N と B に対して

$$\#\{\, P \in \mathbb{P}^n(\bar{\mathbb{Q}}) \ ;\ [\mathbb{Q}(P) : \mathbb{Q}] \le N,\ h(P) \le B \,\} < \infty.$$

次の 2 つの補題は定義より直ちに従う:

補題 A.5 $s : \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^{mn+m+n}$ を Segre 埋め込みとするとき

$$h(s(P_1, P_2)) = h(P_1) + h(P_2) \qquad \big(P_1 \in \mathbb{P}^m(\bar{\mathbb{Q}}),\ P_2 \in \mathbb{P}^n(\bar{\mathbb{Q}})\big).$$

補題 A.6 $f : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ を $\bar{\mathbb{Q}}$ 上定義された射影変換とするとき

$$h \circ f = h + O(1).$$

A.2 代数多様体上の高さ

V を k 上定義された非特異な射影代数多様体とする. V 上の因子 D が基点をもたないとき, $f : V \to \mathbb{P}^n$ を完備線型系 $|D|$ に対応する射として,

$$h_D := h \circ f : V(\bar{\mathbb{Q}}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

を D に対応する絶対的対数的高さと呼ぶ. f' を $|D|$ に対応する別な射とすると, 補題 A.6 より

$$h \circ f' = h \circ f + O(1)$$

となるから, h_D は D の線型同値類から有界函数の差を除いて一意的に定まる. 一般の因子 D は基点をもたない因子 D_1, D_2 によって $D = D_1 - D_2$ と表せるから,

$$h_D := h_{D_1} - h_{D_2}$$

と置くと, 補題 A.5 より h_D は D_1, D_2 の選び方には依らずに (有界函数の差を除いて) 一意的に定まることがわかる. 以上のように定義した h_D について, 次の定理および命題が成り立つ:

定理 A.7 $\mathrm{Pic}(V)$ を V の Picard 群, $\mathbb{R}[V]$ (resp. $\mathbb{R}[V]_{\mathrm{bdd}}$) を $V(\bar{\mathbb{Q}})$ 上の実数値函数 (resp. 有界な実数値函数) 全体のなす加法群とするとき, 準同型写像

$$\mathrm{Pic}(V) \ni D \longmapsto h_D \in \mathbb{R}[V]/\mathbb{R}[V]_{\mathrm{bdd}}$$

で次をみたすものが一意的に存在する: 因子 D が基点をもたないとき, $f : V \to \mathbb{P}^n$ を $|D|$ に対応する射とすると $h_D = h \circ f$.

命題 A.8 (i) **(函手性)** W を k 上定義された非特異な射影代数多様体, $f : V \to W$ を射とするとき, W 上の因子 D に対して

$$h_{f^*D} = h_D \circ f + O(1).$$

(ii) **(有限性)** D を V 上の豊富な因子とするとき, 任意の定数 N と B に対して

$$\#\{ P \in V(\bar{\mathbb{Q}}) \,;\, [k(P):k] \le N,\ h_D(P) \le B \} < \infty.$$

(iii) **(準同値性)** D を V 上の豊富な因子とするとき, D と代数的同値な因子 D' と定数 $\varepsilon > 0$ に対して

$$(1-\varepsilon)h_D - O(1) \le h_{D'} \le (1+\varepsilon)h_D + O(1).$$

A.3　アーベル多様体上の高さ

A を k 上定義されたアーベル多様体とする. このとき

$$p_i(P_1,P_2,P_3) := P_i, \qquad p_{ij}(P_1,P_2,P_3) := P_i + P_j, \qquad p_{ijk}(P_1,P_2,P_3) := P_i + P_j + P_k$$

により射 $p_\bullet : A \times A \times A \to A$ を定めると, A 上の因子 D に対し, $A \times A \times A$ 上の因子

$$p_{123}^*D - p_{12}^*D - p_{13}^*D - p_{23}^*D + p_1^*D + p_2^*D + p_3^*D$$

は 0 と線型同値になることが知られている. 従って, 定理 A.7 と命題 A.8 の (i) より, 函数

$$h_D(P_1+P_2+P_3) - h_D(P_1+P_2) - h_D(P_1+P_3) - h_D(P_2+P_3) + h_D(P_1) + h_D(P_2) + h_D(P_3)$$

は $A(\bar{\mathbb{Q}}) \times A(\bar{\mathbb{Q}}) \times A(\bar{\mathbb{Q}})$ 上有界であることがわかる. このことを用いると, 次の定理を得ることができる:

定理 A.9 (Néron-Tate) A 上の因子 D に対し, $A(\bar{\mathbb{Q}})$ 上の 2 次形式 q_D と 1 次形式 l_D で

$$h_D = q_D + l_D + O(1)$$

をみたすものが一意的に存在する.

上の定理における q_D と l_D は共に $A(\bar{\mathbb{Q}})/A(\bar{\mathbb{Q}})_{\mathrm{tors}}$ 上の函数を定める:

$$q_D(P+T) = q_D(P), \qquad l_D(P+T) = l_D(P) \qquad (P \in A(\bar{\mathbb{Q}}),\ T \in A(\bar{\mathbb{Q}})_{\mathrm{tors}}).$$

また, D が対称 ($[-1]^*D$ が D と線型同値) の場合には $l_D = 0$ となる. 2 次函数

$$\hat{h}_D(P) := q_D(P) + l_D(P)$$

を D に対応する**標準的高さ**と呼び, 対称な双線型形式

$$\langle P, Q \rangle_D := \frac{1}{2}\left(\hat{h}_D(P+Q) - \hat{h}_D(P) - \hat{h}_D(Q)\right) = \frac{1}{2}\left(q_D(P+Q) - q_D(P) - q_D(Q)\right)$$

を D に対応する**高さペアリング**と呼ぶ.

次の命題は, これまでに述べた定理等より容易に従う:

命題 A.10 D を A 上の豊富な因子とするとき:

(i) 任意の定数 N と B に対して

$$\#\{\, P \in A(\bar{\mathbb{Q}}) \ ; \ [k(P):k] \leq N,\ q_D(P) \leq B \,\} < \infty.$$

(ii) 任意の $P \in A(\bar{\mathbb{Q}})$ は $q_D(P) \geq 0$ をみたし, 等号が成立するのは $P \in A(\bar{\mathbb{Q}})_{\mathrm{tors}}$ のときに限る.

(iii) q_D は D の代数的同値類のみに依って定まる.

参考文献

[Bar96] A. Baragar, Rational points on $K3$ surfaces in $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, Math. Ann. **305** (1996), 541–558.

[BM90] V. V. Batyrev and Yu. I. Manin, Sur le nombre des points rationnels de hauteur borné des variétés algébriques, Math. Ann. **286** (1990), 27–43.

[BT98] V. V. Batyrev and Yu. Tschinkel, Manin's conjecture for toric varieties, J. Algebraic Geom. **7** (1998), 15–53.

[Bea96] A. Beauville, *Complex Algebraic Surfaces*, 2nd ed., London Math. Soc. Student Texts **34**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996.

[Bil97] H. Billard, Propriétés arithmétiques d'une famille de surfaces $K3$, Compositio Math. **108** (1997), 247–275.

[Cal94] G. S. Call, Counting geometric points on families of abelian varieties, Math. Nachr. **166** (1994), 167–192.

[CS93] G. S. Call and J. H. Silverman, Canonical heights on varieties with morphisms, Compositio Math. **89** (1993), 163–205.

[CS96] G. S. Call and J. H. Silverman, Computing the canonical height on $K3$ surfaces, Math. Comp. **65** (1996), 259–290.

[Fal83] G. Faltings, Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern, Invent. Math. **73** (1983), 349–366.

[FMT89] J. Franke, Yu. I. Manin and Yu. Tschinkel, Rational points of bounded height on Fano varieties, Invent. Math. **95** (1989), 421–435.

[HW79] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 5th ed., The Clarendon Press, Oxford Univ. Press, New York, 1979.

[HS00] M. Hindry and J. H. Silverman, *Diophantine Geometry: An Introduction*, Graduate Texts in Math. **201**, Springer-Verlag, New York, 2000.

[Lan83] S. Lang, *Fundamentals of Diophantine Geometry*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[Lan94] S. Lang, *Algebraic Number Theory*, 2nd ed., Graduate Texts in Math. **110**, Springer-Verlag, New York, 1994.

[Man95] Yu. I. Manin, Problems on rational points and rational curves on algebraic varieties, in *Surveys in Differential Geometry, Vol. II* (C. C. Hsiung and S.-T. Yau eds.), International Press, Cambridge, 1995, pp. 214–245.

[McK00] D. McKinnon, Counting rational points on $K3$ surfaces, J. Number Theory **84** (2000), 49–62.

[McK04] D. McKinnon, A reduction of the Batyrev-Manin conjecture for Kummer surfaces, Canad. Math. Bull. **47** (2004), 398–406.

[Mor89] 森田 康夫, 代数曲面上の有理点について, 第 35 回代数学シンポジウム報告集, 1989, pp. 209–230.

[Mor97] Y. Morita, Remarks on a conjecture of Batyrev and Manin, Tôhoku Math. J. **49** (1997), 437–448.

[MS92] Y. Morita and A. Sato, Distribution of rational points on hyperelliptic surfaces, Tôhoku Math. J. **44** (1992), 345–358.

[Nér65] A. Néron, Quasi-fonctions et hauteurs sur les variétés abéliennes, Ann. of Math. **82** (1965), 249–331.

[Sat98] A. Sato, On the distribution of rational points on certain Kummer surfaces, Acta Arith. **86** (1998), 1–16.

[Sch79] S. H. Schanuel, Heights in number fields, Bull. Soc. Math. France **107** (1979), 433–449.

[Ser97] J.-P. Serre, *Lectures on the Mordell-Weil Theorem*, 3rd ed., Aspects of Math. **E 15**, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1997.

[Shi05] 志甫 淳, Batyrev-Manin 予想について (講演), 森田康夫先生還暦記念研究集会, 2005 年 11 月 22 日.

[Sil89] J. H. Silverman, Integral points on curves and surfaces, in *Number Theory, Ulm* 1987 (H. P. Schlickewei and E. Wirsing eds.), Lecture Notes in Math. **1380**, Springer-Verlag, New York, 1989, pp. 202–241.

[Sil91] J. H. Silverman, Rational points on $K3$ surfaces: A new canonical height, Invent. Math. **105** (1991), 347–373.

[Sil95] J. H. Silverman, Counting integer and rational points on varieties, Astérisque **228** (1995), 223–236.

[Thu92] J. L. Thunder, An asymptotic estimate for heights of algebraic subspaces, Trans. Amer. Math. Soc. **331** (1992), 395–424.

[Thu93] J. L. Thunder, Asymptotic estimates for rational points of bounded height on flag varieties, Compositio Math. **88** (1993), 155–186.

[Wan95] L. Wang, Rational points and canonical heights on $K3$-surfaces in $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, in *Recent Developments in the Inverse Galois Problem* (M. D. Fried *et al.* eds.), Contemp. Math. **186**, Amer. Math. Soc., Providence, 1995, pp. 273–289.

佐藤 篤
東北大学大学院理学研究科数学専攻
980-8578 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-3
E-mail `atsushi@math.tohoku.ac.jp`

Atsushi Sato
Mathematical Institute, Tohoku University
Aoba, Sendai, 980-8578, JAPAN