q 対数関数の値の線形独立性について

慶應義塾大学 立谷洋平 (Yohei Tachiya)

1 はじめに

有理数 r ($|r|<1$) を公比とする無限等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ の和は $r/(1-r)$ (有理数) であり，これはベキ級数 $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ の $z=r$ における値とみることができる．特に $1/2$ を公比とする無限等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n$ の和は 1 である．では分母を 1 つ減らした無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(2^n-1)$ の和はどのような数であろうか？ 1948 年, Erdös [6] は Lambert 級数

$$L(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{1-z^n}=\sum_{n=1}^{\infty} d(n)z^n, \qquad |z|<1,$$

の有理点 $z=1/q$ ($q\geq 2$ は整数) における値の無理性を示した．ここで $d(n)$ は n の正約数の個数をあらわす．したがって $L(1/2)=\sum_{n=1}^{\infty} 1/(2^n-1)$ は無理数である．しかし Erdös の証明方法は Lambert 級数の特性を利用したもので $\xi=\sum_{n=1}^{\infty} 1/(2^n-3)$ の無理性まで証明することはできなかった．後に彼は Graham と共に ξ が無理数かどうかという問題を提出している．その約 40 年後, ξ の無理性が Bézivin [1] の定理により導かれた．定理を述べる前にいくつかの準備をする．

複素数 q ($|q|>1$) に対し,

$$L_q(z):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{q^n-1}, \quad |z|<|q|,$$

$$E_q(z):=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{(q-1)\cdots(q^n-1)}$$

と定義する．$\lim_{q\to 1}(q^n-1)/(q-1)=n$ より

$$\lim_{q\to 1}(q-1)L_q(z)=-\log(1-z), \qquad \lim_{q\to 1}(q-1)E_q((q-1)z)=e^z$$

が成り立つ．それゆえ $L_q(z)$,$E_q(z)$ はそれぞれ q 対数関数, q 指数関数と呼ばれる．このとき次の等式が成り立つことが知られている ([9] 参照).

$$L_q(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z}{q^n-z}, \quad |z|<|q|, \tag{1}$$

$$E_q(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{q^n}\right),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z}{q^n-z}=z\frac{E_q'(-z)}{E_q(-z)}. \tag{2}$$

以下 (1) の右辺の級数によって $L_q(z)$ の定義域を広げておく．1988 年, Bézivin は微分を含めた q 指数関数の有理点における値の線形独立性に関する定理を示した．

定理 A. (Bézivin [1]) q ($|q| \geq 2$) を有理整数, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ を $\alpha_i \neq 0, -q^\nu$ ($\nu \geq 1$), $\alpha_i \neq \alpha_j q^\mu$, $\mu \in \mathbb{Z}$ ($i \neq j$) をみたす有理数とする．このとき $ml+1$ 個の数

$$1, E_q(\alpha_1), \ldots, E_q(\alpha_m), \ldots, {E_q}^{(l-1)}(\alpha_1), \ldots, {E_q}^{(l-1)}(\alpha_m)$$

は有理数体上線形独立である.

したがって定理 A と (2) から以下が導かれる.

定理 B. q ($|q| \geq 2$) を有理整数, $r \neq 0, q^\nu$ ($\nu \geq 1$) を有理数とするとき

$$L_q(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r}{q^n - r}$$

は無理数である.

特に $\xi = \sum_{n=1}^{\infty} 1/(2^n - 3)$ は無理数である．また Borwein [2], [3] は系 1 における q, r の仮定の下, Bézivin とは異なる方法により

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q^n - r}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{q^n - r}$$

の無理性を証明し, それらの無理測度を与えた．q 対数関数やそれに付随する関数の値の数論的性質を調べる際, Borwein のアイデアは非常に有効である．本稿では q 対数関数の値の線形独立性に関する以下の結果を詳しく解説していきたいと思う.

定理 1 (Y.T [8]). $\mathbf{K}$ を有理数体, もしくは虚二次体とする．q ($|q| > 1$) を $\mathbf{K}$ の整数とし, $\{a_n\}_{n \geq 1}$ を恒等的に 0 でない $\mathbf{K}$ 内の周期 2 の数列とする．このとき

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 - q^n} \notin \mathbf{K}.$$

系 1. q ($|q| \geq 2$) を有理整数とする．このとき三つの数

$$1, \qquad L_q(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q^n - 1}, \qquad L_q(-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{q^n - 1} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q^n + 1}$$

は有理数体上線形独立である.

2 補題

q, $\{a_m\}_{m \geq 1}$, θ を定理 1 のものとする．このとき次の経路積分を考える.

$$F_n(q) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{(-1/t) \prod_{k=1}^{2n} \left(1 - q^k/t\right)}{\prod_{k=1}^{n} \left(1 - q^{2k} t\right)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{1 - q^m/t} dt, \qquad n \geq 1. \tag{3}$$

以下積分路は常に正の向きにとるものとする. q 階乗 $[n]_q!$, および q 二項係数 $\left[\begin{smallmatrix} n \\ i \end{smallmatrix}\right]_q$ をそれぞれ

$$[n]_q! := \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})\cdots(1-q)}{(1-q)^n}, \quad [0]_q := 1,$$

$$\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}_q := \frac{[n]_q!}{[i]_q![n-i]_q!}, \qquad i = 0, 1, \ldots, n$$

で定義する.

補題 1. $0 \le i \le n$ に対し, $\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}_q$ は q の整係数多項式である..

証明. $\left[\begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix}\right]_q = \left[\begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix}\right]_q = 1$ は明らか. $i \neq 0, n$ のとき,

$$\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}_z = \frac{\prod_{k=1}^n (1-z^k)}{\prod_{k=1}^i (1-z^k) \prod_{k=1}^{n-i} (1-z^k)}.$$

$\prod_{k=1}^n (1-z^k)$ の零点を $\zeta = e^{2\pi i a/b}$ (a, b は互いに素な正整数) とおくと $\prod_{k=1}^n (1-z^k)$ における $z = \zeta$ の重複度は $[n/b]$ である. よって有理関数 $\left[\begin{smallmatrix} n \\ i \end{smallmatrix}\right]_z$ の分母, 分子全体の重複度は

$$\left[\frac{n}{b}\right] - \left(\left[\frac{i}{b}\right] + \left[\frac{n-i}{b}\right] \right) \ge 0$$

となるので $z = \zeta$ は $\left[\begin{smallmatrix} n \\ i \end{smallmatrix}\right]_z$ の極ではない. したがって $\left[\begin{smallmatrix} n \\ i \end{smallmatrix}\right]_z$ は多項式であり, さらにガウスの補題から整係数であることが導かれる.

以下, $c_1, c_2, \ldots$ を n に依存しない正定数とする.

補題 2.

$$\begin{aligned} F_n(q) &= \sum_{i=1}^n \frac{\prod_{k=1}^{2n} (1-q^{k+2i})}{\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} (1-q^{2k-2i})} \left(\theta - \sum_{m=1}^{2i} \frac{a_m}{1-q^m} \right) \\ &- \frac{1}{(2n-1)!} \left(\prod_{k=1}^{2n} \left(t-q^k\right) \prod_{k=1}^{n} \left(1-q^{2k}t\right)^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{t-q^m} \right)^{(2n-1)} \Bigg|_{t=0} \end{aligned} \tag{4}$$

証明. (3) の被積分関数は単位円内 $\{|t|=1\}$ に単純極 $t = q^{-2i}$ $(1 \le i \le n)$ を持ち, それらの極における留数は

$$\frac{\prod_{k=1}^{2n} (1-q^{k+2i})}{\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} (1-q^{2k-2i})} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{1-q^{m+2i}}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

である. ここで $\{a_m\}_{m\ge1}$ は周期 2 の数列なので

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{1-q^{m+2i}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{1-q^m} - \sum_{m=1}^{2i} \frac{a_m}{1-q^m}$$

となり, (4) の右辺の第一項を得る. 第二項は単位円内の $t=0$ における $2n$ 位の極から出る.

いま $D_n(q) := \prod_{k=n+1}^{2n}(1-q^{2k})$ とおく. このとき

$$|D_n(q)| \le c_1|q|^{3n^2+n} \tag{5}$$

である. $D_n(q)$ は $F_n(q)$ の分母を払う.

補題 3 (Divilisivity).

$$D_n(q)F_n(q) = A_n(q)\theta + B_n(q), \tag{6}$$

ここで $A_n(q), B_n(q) \in \mathbb{Z}[a_1, a_2, q]$.

証明.

$$\frac{1}{\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}(1-q^{2k-2i})} = \frac{q^{i(i-1)}}{\prod_{k=1}^{i-1}(q^{2k}-1)\prod_{k=1}^{n-i}(1-q^{2k})},$$

および (4) から

$$\begin{aligned}
&F_n(q)\\
&= \frac{1}{\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-q^{2k}\right)}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}q^{i(i-1)}\begin{bmatrix} n-1\\ i-1\end{bmatrix}_{q^2}\prod_{k=1}^{2n}(1-q^{k+2i})\left(\theta-\sum_{m=1}^{2i}\frac{a_m}{1-q^m}\right)\\
&-\sum_{\substack{\lambda,\mu,\nu\ge 0\\ \lambda+\mu+\nu=2n-1}}\frac{1}{\lambda!\mu!\nu!}\left(\prod_{k=1}^{2n}(t-q^k)\right)^{(\lambda)}\Bigg|_{t=0}\left(\prod_{k=1}^{n}(1-q^{2k}t)^{-1}\right)^{(\mu)}\Bigg|_{t=0}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{t-q^m}\right)^{(\nu)}\Bigg|_{t=0}
\end{aligned}$$

を得る. ここで任意の λ, μ について

$$\frac{1}{\lambda!\mu!}\left(\prod_{k=1}^{2n}(t-q^k)\right)^{(\lambda)}\left(\prod_{k=1}^{n}(1-q^{2k}t)^{-1}\right)^{(\mu)}$$

の $t=0$ における値は q の整係数多項式である. また

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{t-q^m}\right)^{(\nu)}\Bigg|_{t=0} = -\nu!\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{(q^{\nu+1})^m} = \nu!(a_1q^{\nu+1}+a_2)\frac{1}{1-q^{2(\nu+1)}}$$

であることより

$$\begin{aligned}
&F_n(q)\\
&= \frac{1}{\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-q^{2k}\right)}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}q^{i(i-1)}\begin{bmatrix} n-1\\ i-1\end{bmatrix}_{q^2}\prod_{k=1}^{2n}(1-q^{k+2i})\left(\theta-\sum_{m=1}^{2i}\frac{a_m}{1-q^m}\right)\\
&+ \sum_{\substack{\lambda+\mu+\nu=2n-1\\ \lambda,\mu,\nu\ge 0}}Q_{\lambda\mu\nu}(q)\frac{1}{1-q^{2(\nu+1)}}
\end{aligned} \tag{7}$$

とかける． ここで $Q_{\lambda\mu\nu}(q) \in \mathbb{Z}[a_1, a_2, q]$ $(\lambda, \mu, \nu \geq 0)$ である． また $m \leq 2i$ に対し $P_{im}(q) = (1-q^m)^{-1}\prod_{k=i+1}^{2i}(1-q^k) \in \mathbb{Z}[q]$ とおくと

$$\frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{2n}(1-q^{k+2i})}{1-q^m} = P_{im}(q)\begin{bmatrix}2n+2i\\2n\end{bmatrix}_q\begin{bmatrix}2n\\2i\end{bmatrix}_q\prod_{k=1}^{i}(1-q^k)\prod_{k=1}^{2n-2i}(1-q^k)$$

より

$$\prod_{k=1}^{2n}(1-q^{k+2i})\sum_{m=1}^{2i}\frac{a_m}{1-q^m} \in \mathbb{Z}[a_1, a_2, q], \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

が従う．以上より $\prod_{k=1}^{n-1}(1-q^{2k})$ と $1-q^{2l}$ $(l = 1, \cdots, 2n)$ が $\mathbb{Z}[q]$ において $D_n(q)$ を割りきることを言えば良いがこれは明らかである．

補題 4. 十分大きい n について，

$$0 < |F_n(q)| \leq c_3\,|q|^{-3n^2-2n}\,. \tag{8}$$

証明. まず $|F_n(q)|$ の上からの評価を行う．(3) の被積分関数は $|t| = 1$ 上で一様収束するので

$$F_n(q) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1} f_{n,m}(t)\,dt$$

とかける．ここで

$$f_{n,m}(t) = \frac{-a_m}{t-q^m}\frac{\prod_{k=1}^{2n}(1-q^k/t)}{\prod_{k=1}^{n}(1-q^{2k}t)}.$$

いま n を十分大きくとり固定する．このとき各 m に対し

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1} f_{n,m}(t)\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R} f_{n,m}(t)\,dt - \frac{1}{2\pi i}\int_{|t-q^m|=1} f_{n,m}(t)\,dt.$$

$|t-q^m| \leq 1$ にある $f_{n,m}(t)$ の極は, 単純極 $t = q^m$ のみであるから留数定理より

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|t-q^m|=1} f_{n,m}(t)\,dt = -a_m\frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{2n}(1-q^{k-m})}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1-q^{2k+m})} = I_m \tag{9}$$

を得る．ここで I_m は R に無関係であり $m \leq 2n$ のとき $I_m = 0$ となる．また十分大きい円 $|t| = R$ 上で $|f_{n,m}(t)| \leq 1/R^2$ が成り立つので $|t| = R$ 上での積分は 0 である．したがって

$$F_n(q) = \sum_{m=2n+1}^{\infty} I_m. \tag{10}$$

(9) より $|I_m| \leq c_2|q|^{-n^2-n(m+1)}$ が従い, $|F_n(q)| \leq c_3|q|^{-3n^2-2n}$ を得る．
次に十分大きい n に対し, $F_n(q) \neq 0$ であることをいう． $a_1 \neq 0$ と仮定する． このとき (9) と (10) より

$$F_n(q) = a_1\frac{\prod_{k=1}^{2n}(1-q^{k-2n-1})}{\prod_{k=1}^{n}(1-q^{2k+2n+1})}\left(1+\sum_{l=1}^{\infty} b_{nl}\right)$$

が従う．ここで

$$b_{nl} = \frac{a_{l+1}}{a_1} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1-q^{2k+2n+1}}{1-q^{2k+2n+l+1}} \right) \prod_{k=1}^{2n} \left(\frac{1-q^{k-2n-l-1}}{1-q^{k-2n-1}} \right)$$

である．また $|b_{nl}| \le c_4 |q^{-n}|^l$ より，十分大きい n に対して $\sum_{l=1}^{\infty} |b_{nl}| < 1$ であることがわかる．したがって $F_n(q) \neq 0$ を得る．$a_2 \neq 0$ のときも同様に証明できる．

3　定理 1 の証明

定理 1 の証明. a_1, a_2 を $\mathbf{K}$ の整数としても一般性を失わない．いま $\theta \in \mathbf{K}$ と仮定し，$d = \mathrm{den}\theta$ とおく．このとき (5),(6), および (8) より十分大きい n に対して

$$d|D_n(q)F_n(q)| = |d(A_n(q)\theta + B_n(q))| \le c_5 |q|^{-n}.$$

一方 $d(A_n(q)\theta + B_n(q))$ は 0 でない $\mathbf{K}$ の整数なので

$$1 \le |d(A_n(q)\theta + B_n(q))|.$$

両式は n が十分大きい時，同時に成り立たない．したがって矛盾，$\theta \notin \mathbf{K}$ を得る．

4　おわりに

最近，q 対数関数の値に関する以下の定理が証明された．

定理 C.(Bundschuh-Väänänen [4]) q ($|q| \ge 2$) を有理整数とする．このとき三つの数

$$1, \qquad L_q(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q^n - 1}, \qquad {L_q}'(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{q^n - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{(q^n-1)^2}$$

は有理数体上線形独立である．さらに任意の $\varepsilon > 0$ に対し正定数 $c(\varepsilon)$ が存在し

$$|h_0 + h_1 L_q(1) + h_2 {L_q}'(1)| \ge h^{-(2\pi^2+8)/(\pi^2-8)-\varepsilon}$$

が $h = \max(|h_1|, |h_2|) > c(\varepsilon)$ なる整数 h_0, h_1, h_2 に対して成り立つ．

$\lim_{q \to 1}(q-1)^2 {L_q}'(1) = \zeta(2)$ (ここで ζ は Riemann zeta 関数) より ${L_q}'(1)$ は $\zeta(2)$ の q 類似である．Nesterenko [7] は任意の代数的数 q ($|q| > 1$) に対して ${L_q}'(1)$, および $E_q(-1) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - q^{-n})$ が超越数であることを証明した．一方，$L_q(1)$ や $E_q(1)$ が超越数となる代数的数 q の例は現在ひとつも知られていない．Bundschuh-Väänänen は論文 [4] の中で，q 対数関数においても冒頭で述べた Bézivin の定理と同様の性質が成り立つことを予想している．

予想. q ($|q| \ge 2$) を有理整数とし，$\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ を $\alpha_i \neq 0, q^{\nu}$ $(\nu \ge 1)$, $\alpha_i \neq \alpha_j q^{\mu}$, $\mu \in \mathbb{Z}$ $(i \neq j)$ をみたす有理数とする．このとき $ml+1$ 個の数

$$1, L_q(\alpha_1), \ldots, L_q(\alpha_m), \ldots, {L_q}^{(l-1)}(\alpha_1), \ldots, {L_q}^{(l-1)}(\alpha_m)$$

は有理数体上線形独立である．

$L_q(z)$ は関数等式 $L_q(qz) = L_q(z) + z/(1-z)$ をもつ．したがって $\alpha_i = \alpha_j q^{\mu}$, $\mu \in \mathbb{Z}$ ならば $L_q(\alpha_i)$ と $L_q(\alpha_j)$ は $\mathbb{Q}$ 上線形従属になるので予想で述べられている q の条件は必要である．現在, 具体例として見つかっているのは (i) $l = 1, m = 2, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1$ (系 1), および (ii) $l = 2, m = 1, \alpha_1 = 1$ (定理 C) の場合の二例のみである．特に Bézivin の結果 (定理 B) を含む $1, L_q(r), L_q(-r)$ の $\mathbb{Q}$ 上の線形独立性については現在も未解決である．

参考文献

[1] J.-P. Bézivin, Indépendance linéar des solutions transcendentes de cartaines eq́uations fonctionnelles, Manuscripta Math., **61** (1988), 103–129.

[2] P.B. Borwein, On the irrationality of $\sum(1/(q^n + r))$, J. Number Theory, **37** (1991), 252–259.

[3] P.B. Borwein, On the irrationality of certain series, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., **112** (1992), 141–146.

[4] P. Bundschuh and K. Väänänen, Linear independence of q-analogues of certain classical constants, Result. Math., **47** (2005), 33–44.

[5] P. Bundschuh and K. Väänänen, Linear independence of certain Lambert and allied series, Acta Arithmetica, **120.2** (2005), 197–209.

[6] P. Erdös, On arithmetical properties of Lambert series, J. Indian Math. Soc. (N. S.), **12** (1948), 63–66.

[7] Y. Nesterenko, Modular functions and transcendence questions, Math. Sb., **187** (1996), 65–96.

[8] Y. Tachiya, Irrationality of certain Lambert series, Tokyo J. Math., **27** (2003), 75-85.

[9] 塩川宇賢, 無理数と超越数, 森北出版.

立谷洋平
慶應義塾大学理工学研究科
〒 223-8522 横浜市港北区日吉 3-14-1
email: bof@math.keio.ac.jp