Hilbert symbol と単数群の filtration

九州大学数理学府　竹本 隆 (Takashi Takemoto)

Hilbert symbol とは, 局所体 K 上の Kummer 理論と類体論とを組み合わせて定義される非退化歪対称双線形写像

$$K^\times/(K^\times)^n \;\times\; K^\times/(K^\times)^n \;\longrightarrow\; \mu_n \;;\; ([a],[b])_n := \frac{\rho_K(a)(\sqrt[n]{b})}{\sqrt[n]{b}}$$

(μ_nは 1 の n 乗根全体からなる群 , ρ_Kは K 上の reciprocity map)

のことである. この Hilbert symbol の像の位数についての新たな結果を述べる.

K を μ_{p^n} を含む p-進体 $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体としたときに, K の単数群 $U_K^{(0)}$ に関する filtration

$$K^\times \supset U_K^{(0)} \supset U_K^{(1)} \supset U_K^{(2)} \supset \cdots$$

がある. そしてこの filtration は, $K^\times/(K^\times)^{p^n}$ の filtration

$$K^\times/(K^\times)^{p^n} \supset U_{K,n}^{(0)} \supset U_{K,n}^{(1)} \supset U_{K,n}^{(2)} \supset \cdots \quad \left(U_{K,n}^{(s)} := U_K^{(s)}/\big((K^\times)^{p^n} \cap U_K^{(s)}\big)\right)$$

を誘導する. この $U_{K,n}^{(s)}$ たちに定義域を制限した Hilbert symbol の像

$$\big(K^\times/(K^\times)^{p^n},\, U_{K,n}^{(s)}\big)_{p^n} \text{ および } \quad \big(U_{K,n}^{(s)}\,,\, U_{K,n}^{(t)}\big)_{p^n}$$

の位数について, 今回次のような結果を得た.

主結果

e を $K/\mathbb{Q}_p$ の分岐指数とし, 各 $k \in \mathbb{N}$ に対し, $c_k := \dfrac{e}{p-1} + ke$ とおくとき, 次が成立する.

(1)

$$\#\big(K^\times/(K^\times)^{p^n},\, U_{K,n}^{(s)}\big)_{p^n} = \begin{cases} p^n & (s \le c_1) \\ p^{n-k} & (c_k < s \le c_{k+1}) \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1) \\ 1 & (s > c_n) \end{cases}$$

(2) $p \nmid s$ または $p \nmid t$ のとき,

$$\#\big(U_{K,n}^{(s)}\,,\, U_{K,n}^{(t)}\big)_{p^n} = \begin{cases} p^n & (s+t \le c_1) \\ p^{n-k} & (c_k < s+t \le c_{k+1}) \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1) \\ 1 & (s+t > c_n) \end{cases}$$

(3) $p \mid s$ かつ $p \mid t$ のとき,

$$\#\big(U_{K,n}^{(s)}\,,\, U_{K,n}^{(t)}\big)_{p^n} = \begin{cases} p^n & (s+t < c_1) \\ p^{n-k} & (c_k \le s+t < c_{k+1}) \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1) \\ 1 & (s+t \ge c_n) \end{cases}$$

主結果は K 上の楕円曲線の話題に応用できる.

E を K 上の楕円曲線とし, E 上の p^n 倍写像の核 $E[p^n]$ が $E(K)$ に含まれることを仮定すると, p^n 倍写像が誘導する局所 Kummer 写像と, Kummer 理論を組み合わせて,

$$\delta^n : E(K)/p^nE(K) \longrightarrow H^1(K, E[p^n]) \xrightarrow{\sim} K^\times/(K^\times)^{p^n} \oplus K^\times/(K^\times)^{p^n}$$

が得られる. 従って, この写像 δ^n の像が決定できれば, 主結果と組み合わせることで, K 上の 2 つの楕円曲線 E_1, E_2 に対し,

$$E_1(K) \otimes E_2(K) \longrightarrow H^1(K, E_1[p^n]) \otimes H^1(K, E_2[p^n]) \longrightarrow \bigoplus_{1 \le i \le 4} \mu_{p^n} \quad \cdots (\sharp)$$

の像を求めることができる (後半の写像は Hilbert symbol 4 つの写像). そしてこの 2 つの楕円曲線の積 $X := E_1 \times E_2$ に対する Chow 群 $\mathrm{CH}_0(X)$ の cycle map を用いて, $\mathrm{CH}_0(X)$ の Albanese Kernel $T(X)$ が上の $(\sharp)$ の像を商にもつことを知ることができる.

既に δ^1 の像は, Kawachi 氏によって次のように計算されている.

定理 (Kawachi [6])

$p \neq 2$ とし, 同型 $E[p] \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ を適当にとるとき,

$$\mathrm{I}m\,\delta^1 = \begin{cases} K^\times/(K^\times)^p \oplus 1 & (E \text{ が } K \text{ 上 split multiplicative reduction をもつ}) \\ U_{K,1}^{(0)} \oplus U_{K,1}^{(c_1)} & (E \text{ が } K \text{ 上 ordinary good reduction をもつ}) \\ U_{K,1}^{(1+c_1-pt)} \oplus U_{K,1}^{(1+pt)} & (E \text{ が } K \text{ 上 supersingular good reduction をもつ}) \end{cases}$$

但し, c_1 は主結果に出てくるものと同一のもの, また t は楕円曲線に依存するパラメータであり, 次のように定義される. 各自然数 $i \geq 1$ に対し,

$$E_i := \{(x,y) \in E(K) \mid v(x) \leq -2i,\ v(y) \leq -3i\}$$

として, v_E を $(x,y) \in E_j - E_{j+1}$ であるときに, $v_E((x,y)) = j$ と定義するときに,

$$t := min\{v_E((x,y)) \mid (x,y) \in E[p] - \{O\}\}$$

と定義する. (そしてこの t の範囲は, $1 \leq t < \dfrac{e}{p-1}$ となることが分かっている.)

この結果と主結果とをあわせて $(\sharp)$ の像についても次のような新しい結果を得た.

定理

$p \neq 2$ とし, E_1, E_2 を K 上の楕円曲線とする. そしてそれぞれの p^n-等分点が K-有理点であるときに, $(\sharp)$ の像は下の表のようになる. 従って, $E_1 \times E_2$ の Albanese kernel $T(E_1 \times E_2)$ は表にある像を商にもつ. (表の縦の列は E_1 の reduction, 横の行は E_2 の reduction)

reduction	split multiplicative	ordinary	supersingular
split multiplicative	$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$
ordinary	$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$
supersingular	$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$	$(*)$

但し表の $(*)$ は, 次のようになる. 前ページで定義した E_1, E_2 のパラメータをそれぞれ t_1, t_2 とするとき,

$$
(*) = \begin{cases} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \left(t_1 \neq t_2 \text{ かつ } t_1 + t_2 \neq \dfrac{e}{p-1} \text{ のとき}\right) \\ \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \left(t_1 = t_2 \neq \dfrac{e}{2(p-1)} \text{ または「} t_1 + t_2 = \dfrac{e}{p-1} \text{ かつ } t_1 \neq t_2 \text{」のとき}\right) \\ 0 & \left(t_1 = t_2 = \dfrac{e}{2(p-1)} \text{のとき}\right) \end{cases}
$$

これらの像のうち, split multiplicative reduction をもつ楕円曲線どうしの積については Yamazaki [9] によって, ordinary good reduction をもつ同じ楕円曲線 ($E_1 = E_2$ の場合) の積については Murre-Ramakrishnan [7] によって既に計算されていたが, その他の像, 特に supersingular good reduction をもつ楕円曲線の場合については知られていない新たな結果である. また, supersingular good reduction をもつ同じ楕円曲線 ($E_1 = E_2$ の場合) の積については, $t_1 = t_2$ の場合で考えれば, $(*)$ から 0 か $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ のどちらかであることが分かる.

参考文献

[1] K.Iwasawa, Local class field theory, Oxford University Press, Oxford-New York, 1986

[2] I.B.Fesenko & S.V.Vostokov, Local Fields and Their Extensions 2nd ed, Mathematical Monographs.121, AMS, 2002

[3] J.Neukirch, 梅垣 敦紀 訳, 代数的整数論, Springer, 2003

[4] J.P.Serre, Local Fields, Grad.Texts in Math.67, Springer, 1979

[5] J.H.Silverman, The Arithmetic of Elliptic Curves, Grad.Texts in Math.106, Springer, 1985

[6] M.Kawachi, Isogenies of Degree p of Elliptic Curves over Local Fields and Kummer Theory, Tokyo J Math.Vol.25, No.2, 2002

[7] J.Murre & D.Ramakrishnan, Galois symbol on the squre of an elliptic curve, preprint

[8] W.Raskind & M.Spiess, Milnor K-Groups and Zero-Cycles on Products of Curves over $p-$Adic Fields, Compositio Math.Vol.121, 2000

[9] T.Yamazaki, On Chow and Brauer groups of product of Mumford curves, Math Ann.Vol.333, 2005

竹本隆
九州大学数理学府
〒 812-8581 福岡県福岡市東区箱崎 6-10-1
email: p-adicfield@leo-net.jp

Takashi Takemoto
Kyushu University
Faculty of Mathematics
Fukuoka-shi, Fukuoka-ken, 812-8581 JAPAN