

HILBERT MODULAR FORMS AND SIEGEL MODULAR FORMS OF DEGREE 2.

大阪大学大学院理学研究科 岡崎 武生 (Takeo Okazaki)

1 吉田予想, 吉田リフト.

[志村 - 谷山予想] 全ての \mathbb{Q} 上定義された楕円曲線 E に対して, 次の条件を満たす重さ 2 の楕円保型形式 f が存在する.

- $L(s, E) = L(s, f)$.
- E の conductor と f の level は一致する. □

この予想の根拠となった Eichler-Shimura 理論がありました.

[Eichler-Shimura 理論] $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}_{>0}} a_n \exp(2\pi i n z)$ を重さ 2 の Hecke eigen cuspform とする. このとき,

- $\mathbb{Q}_f := \mathbb{Q}\langle a_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ は有限次代数体である.
- $[\mathbb{Q}_f : \mathbb{Q}]$ 次元 Abel 多様体 A_f で $L(s, H^1(A_f, \mathbb{Q}_l)) = \prod_{\sigma: \mathbb{Q}_f \hookrightarrow \mathbb{C}} L(s, f^\sigma)$ となるものが存在する.

特に $\mathbb{Q}_f = \mathbb{Q}$ のときは A_f は楕円曲線である. □

さて, 志村 - 谷山予想の 2 次元版として, 京都大学の吉田敬之先生により

吉田予想 *root number = 1* をもつ \mathbb{Q} 上定義された, 全ての \mathbb{Q} -simple な Abel 曲面 A に対して, $L(s, H^1(A, \mathbb{Q}_l)) = L(s, F, spin)$ となる次数, 重さ 2 の Siegel 保型形式 F が存在する. □

と予想されました. この予想の根拠となったのが, 吉田リフトと呼ばれる Siegel 保型形式の構成法でした. その吉田リフトには次の 2 タイプがあります.

(I) 楕円保型形式の pair から構成:

$$S_2^{(1)}(\Gamma_0(p))^2 \ni (f_1, f_2) \mapsto Y_{f_1, f_2}^2 \in M_2^2(\Gamma_0(p)), \quad L(s, Y_{f_1, f_2}, spin) = L(s, f_1)L(s, f_2).$$

(II) 2 次体 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{N})$ の Hilbert 保型形式から構成:

$$S_2(SL_2(\mathfrak{o}_K)) \ni f \mapsto Y_f^2 \in M_2^2(\Gamma_0(N), \chi_N), \quad L(s, Y_f, spin) = L(s, f).$$

吉田先生は, この type (I) の吉田リフトと, Eichler-Shimura 理論で得られる Abel 曲面とを用いて, 吉田予想の成立している Siegel 保型形式と Abel 曲面の pair の example を与えました. しかし, この吉田リフトには,

Yoshida's non-vanishing problem この吉田リフトはいつでも有効な構成法なのか? 消えている事はないのか?

という問題がありました．この問題に対して，

Böcherer and Schulze-Pillot's result (1992) type (I) の吉田リフトは消えない． \square

という事が証明されました．この定理により，我々は楕円保型形式 (trivial central character) から得られる Abel 曲面に対しては吉田予想が成立している事がわかります．

一方，東京大学の織田孝幸先生の予想 (1982) や Brylinski-Labesse(1984) の結果などより，次の事を予想するのは自然と思われまます．

織田予想' K を実 2 次体， ρ を $Gal(K/\mathbb{Q})$ の生成元とする．重さ 2 の Hilbert eigen cuspform

$$f(z_1, z_2) = \sum_{\mathfrak{n} \in \mathfrak{o}_K} a_{\mathfrak{n}} \exp(2\pi i(N(\mathfrak{n})z_1 + N(\mathfrak{n})^\rho z_2))$$

に対して， K 上定義された以下の条件をみたく Abel 多様体 A_f with $\dim A_f = [\mathbb{Q}_f : \mathbb{Q}]$ が存在する．

- $L(s, H^1(A_f, \mathbb{Q}_l)) = \prod_{\sigma: \mathbb{Q}_f \hookrightarrow \mathbb{C}} L(s, f^\sigma)$.
- $End_{\mathbb{Q}}(A_f) \supset \mathbb{Q}_f$. \square

REMARK 1 $End_{\mathbb{Q}}(A_f) \supset K$ ではない事に注意．織田予想は一般次数の totally real field 上の Hilbert 保型形式に対して定式化されている．

この織田予想' を仮定すれば，特に Hilbert 保型形式 f から，次のタイプの Abel 曲面/ \mathbb{Q} が得られます．

- i). 楕円曲線 E_f/K の Weil restriction $Res_{K/\mathbb{Q}} E_f$.
- ii). $S_2^{(1)}(\Gamma_0(N), \chi_N)$ から得られる Abel 曲面．(これは予想を仮定する必要はない．E-S.)
- iii). $[\mathbb{Q}_f : \mathbb{Q}] = 2$ で，'本当は' \mathbb{Q} 上定義されている Abel 曲面 A_f .

(genus 2 の hyper-elliptic curve $C : y^2 = x^5 + a$, ($a \in \mathbb{Q}^\times$) の Jacobian などは高い conductor を持つので full-modular 保型形式に対応しないが，3 の例と考えられる．)

そこで次に吉田予想に更に根拠を与える為の自然な問題として，吉田リフト type (II) は消えないか? を考えました．

2 主結果．

上の問題について次の答えが与えられます．

MAIN THEOREM 1 • 吉田リフト type (II) の像 Y_f は消えない．

- Y_f の Fourier 係数は \mathbb{Q}_f に含まれる．
- f が Doi-Naganuma lift of nebentypus で得られるなら， Y_f は cuspform では無い．

$$\begin{aligned} S_2^{(1)}(\Gamma_K)^\vee &\xrightarrow{Y} S_2^{(2)}(\Gamma_0(N), \chi_N), \\ S_2^{(1)}(\Gamma_0(N), \chi_N) &\xrightarrow{DN} S_2(\Gamma_K)^N \xrightarrow{Y} N_2^{(2)}(\Gamma_0(N), \chi_N) \xrightarrow{\Phi} S_2^{(1)}(\Gamma_0(N), \chi_N). \end{aligned}$$

$S_2(\Gamma_K)$ における D - N lift の像を $S_2(\Gamma_K)^N$ であらわし，直交補空間を $S_2(\Gamma_K)^\vee$ としている．下段最右の map は Siegel 作用素． $N_2^{(2)}$ は Siegel non-cuspform の空間． $g \in S_2^{(1)}(\Gamma_0(N), \chi_N)$ から出発して最後まで行き着く事が常に出来， $\Phi \circ Y \circ DN(g) = g + \bar{g}$ になっている． \square

更に,

MAIN THEOREM 2 上定理では, $f \in S_2(\Gamma_K)^N$ の吉田リフトの像 Y_f は *non-cuspform* であったが, f が *Grössencharacter* でかけるなら, Y_f と同じ *spinor L-関数* をもつ *cusppform* F^C が存在する. \square

こういった現象の explicit な表示として, [4] に $\mathbb{F}y^2 = x^5 - x$ に対応した Siegel cuspform と non-cuspform が存在し Igusa-theta の 4 積の形をしている』という結果があります. なお, $y^2 = x^5 - x$ は $E: y^2 = x(x-1)(x-1-\sqrt{2})$ の Weil restriction なので \mathbb{C} -simple ではありません.

さて, 吉田予想と織田予想' を仮定すると Siegel 保型形式の standard L -関数に関する Kudla-Rallis-Soudry 結果 (1993) より, Abel 曲面の Hasse-Weil 関数の 2 次元 part の本質的な部分 $L'(s, H^2(A, \mathbb{Q}_l)) := \zeta(s-1)^{-2}L(s, H^2(A, \mathbb{Q}_l))$ に関して次の事が言えます.

A/\mathbb{Q} が simple かつ root number = 1 ならば, $ord_{s=2}L'(s, H^2(A, \mathbb{Q}_l)) \geq -1$ で

1. $End(A) \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q} \Rightarrow ord_{s=2}L'(s, H^2(A, \mathbb{Q}_l)) \geq 1$.
2. $ord_{s=2}L'(s, H^2(A, \mathbb{Q}_l)) = 0 \Rightarrow L(s, H^1(A, \mathbb{Q}_l))$ と同じ L -関数を持つ楕円保型形式の pair が Hilbert 保型形式 (虚 2 次体上も含む) が存在する.
3. $ord_{s=2}L'(s, H^2(A, \mathbb{Q}_l)) = -1 \iff A$ は $S_2^{(1)}(\Gamma_0(N), \chi_N)$ から得られる Abel 曲面.

従って, 興味深い問題として, $\mathbb{F}End(A) \otimes \mathbb{Q} \neq \mathbb{Q}$ ならば, Shimura curve の Jacobian が 2 次体上の Hilbert 保型形式の motive と isogeneous か?』という問題が考えられます.

参考文献

- [1] Böcherer, S and Schulze-Pillot, R: Siegel modular forms and theta series attached to quaternion algebras, Nagoya Math. J. **121** (1991), 35-96. II, **147** (1997), 71-106.
- [2] Kudla, S, Rallis, S and Soudry, D: On the degree 5 L -function for $Sp(2)$, Invent. math. **107** (1992), 483-541.
- [3] Oda, T: Periods of Hilbert surfaces. Progress in math. **19**, Birkhäuser, (1982).
- [4] Okazaki, T: Proof of R. Salvati Manni and J. Top's conjectures on Siegel modular forms and Abelian surfaces, Amer. J. Math. **128**, (2006) 139-165.
- [5] Yoshida, H: Siegel's modular forms and the arithmetics of quadratic forms, Invent. math. **60** (1980), 193-248.

岡崎武生

大阪大学理学研究科

〒 560-0043 豊中市待兼山町 1 番 1 号

email: okazaki@gaia.math.wani.osaka-u.ac.jp

Takeo Okazaki

Department of Mathematics

Graduate school of science

Osaka University

Toyonakashi, Machikaneyama 1-1,

560-0043 JAPAN