Mahlerの方法による代数的独立性の簡潔な証明

田中 孝明　takaaki@math.keio.ac.jp

定理. $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} z^{d^k}$ $(2 \le d \in \mathbb{Z})$ とする.
$\alpha \in K$：虚2次体, $0<|\alpha|<1 \implies \{f^{(l)}(\alpha) \mid l \ge 0\}$ は代数的独立.

証明. $f_l(z)=\left(z\dfrac{d}{dz}\right)^l f(z)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} d^{lk} z^{d^k}$ $(l \ge 0)$ とおく. $\forall m \ge 0$ に対し, $\{f_l(\alpha) \mid 0 \le l \le m\}$ と $\{f^{(l)}(\alpha) \mid 0 \le l \le m\}$ は $\mathbb{Q}(\alpha)$ 上同じベクトル空間を生成する.

証明は背理法による: $\{f^{(l)}(\alpha) \mid l \ge 0\}$ は代数的従属と仮定すると $\exists m \ge 0$ **s.t.**
$\{f^{(l)}(\alpha) \mid 0 \le l \le m\}$：代数的従属 $\iff$ $\{f_l(\alpha) \mid 0 \le l \le m\}$：代数的従属
$\implies \displaystyle\sum_{\substack{\mu=(\mu_0,\ldots,\mu_m),\\ 0\le\mu_l\le L}} \tau_\mu f_0(\alpha)^{\mu_0}\cdots f_m(\alpha)^{\mu_m}=0$ $(\tau_\mu \in \mathbb{Z})$. ただし, τ_μ は not all 0.

以下, t_μ $(\mu=(\mu_0,\ldots,\mu_m),\ 0\le\mu_l\le L)$ を $(L+1)^{m+1}$ 個の独立変数とし,

$$F(z;\boldsymbol{t}) := \sum_{\substack{\mu=(\mu_0,\ldots,\mu_m),\\ 0\le\mu_l\le L}} t_\mu f_0(z)^{\mu_0}\cdots f_m(z)^{\mu_m} \in \mathbb{Z}[\boldsymbol{t}][[z]]$$

とする.

(※ $F(z;\tau)=\displaystyle\sum_{\substack{\mu=(\mu_0,\ldots,\mu_m),\\ 0\le\mu_l\le L}} \tau_\mu f_0(z)^{\mu_0}\cdots f_m(z)^{\mu_m} \in \mathbb{Z}[[z]]$ は α を零点としてもつ.)

$f_l(z)$ は

$$f_l(z)=d^l f_l(z^d)+z \qquad (l \ge 0) \tag{1}$$

をみたす. (1) を iterate すると

$$f_l(z)=d^{kl}f_l(z^{d^k})+\sum_{h=0}^{k-1} d^{lh}z^{d^h} \qquad (k\ge 0).$$

$b_l^{(k)}(z)=\sum_{h=0}^{k-1} d^{lh}z^{d^h}$ とおく. $x_0,\ldots,x_m,y_0,\ldots,y_m,w_0,\ldots,w_m$ を変数とし

$$\sum_{\substack{\mu=(\mu_0,\ldots,\mu_m),\\ 0\le\mu_l\le L}} t_\mu(x_0w_0+y_0)^{\mu_0}\cdots(x_mw_m+y_m)^{\mu_m}=\sum_{\substack{\mu=(\mu_0,\ldots,\mu_m),\\ 0\le\mu_l\le L}} T_\mu(\boldsymbol{t};\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})w_0^{\mu_0}\cdots w_m^{\mu_m}$$

とする. 即ち,

$$T_\mu(\boldsymbol{t};\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})=\sum_{\substack{\nu=(\nu_0,\ldots,\nu_m),\\ \nu_0\ge\mu_0,\ldots,\nu_m\ge\mu_m}} t_\nu\binom{\nu_0}{\mu_0}\cdots\binom{\nu_m}{\mu_m}x_0^{\mu_0}\cdots x_m^{\mu_m}y_0^{\nu_0-\mu_0}\cdots y_m^{\nu_m-\mu_m}.$$

このとき,

$$\begin{aligned}
F(z;\boldsymbol{t}) &= \sum_{\substack{\mu=(\mu_0,\dots,\mu_m),\\ 0\le\mu_l\le L}} t_\mu f_0(z)^{\mu_0}\cdots f_m(z)^{\mu_m} \\
&= \sum_{\substack{\mu=(\mu_0,\dots,\mu_m),\\ 0\le\mu_l\le L}} t_\mu (f_0(z^{d^k})+b_0^{(k)}(z))^{\mu_0}\cdots (d^{km}f_m(z^{d^k})+b_m^{(k)}(z))^{\mu_m} \\
&= \sum_{\substack{\mu=(\mu_0,\dots,\mu_m),\\ 0\le\mu_l\le L}} T_\mu(\boldsymbol{t};1,d^k,\dots,d^{km};\boldsymbol{b}^{(k)}(z)) f_0(z^{d^k})^{\mu_0}\cdots f_m(z^{d^k})^{\mu_m} \\
&= F(z^{d^k};\boldsymbol{T}(\boldsymbol{t};1,d^k,\dots,d^{km};\boldsymbol{b}^{(k)}(z))).
\end{aligned}$$

従って,

$$0 = F(\alpha;\tau) = F(\alpha^{d^k};\boldsymbol{T}(\tau;1,d^k,\dots,d^{km};\boldsymbol{b}^{(k)}(\alpha))).$$

ただし, $T_\mu(\tau;1,\dots,1;\boldsymbol{b}^{(0)}(\alpha)) = T_\mu(\tau;1,\dots,1;0,\dots,0) = \tau_\mu$.

(※ $F\left(z;\boldsymbol{T}(\tau;1,d^k,\dots,d^{km};\boldsymbol{b}^{(k)}(\alpha))\right) \in K[[z]]$ は α^{d^k} を零点としてもつ.)

定義 1.

$$V(\tau) := \{Q(\boldsymbol{t}) \in K[\boldsymbol{t}] \mid Q(\boldsymbol{T}(\tau;1,d^k,\dots,d^{km};y_0,\dots,y_m)) = 0 \text{ for } \forall k \ge 0\}.$$

さらに, $P(z;\boldsymbol{t}) = \sum_{n=0}^\infty P_n(\boldsymbol{t})z^n \in K[\boldsymbol{t}][[z]]$ に対し,

$$\operatorname{ind} P(z;\boldsymbol{t}) := \min\{n \mid P_n \notin V(\tau)\}.$$

ただし, $P_n \in V(\tau)\ (\forall n \ge 0) \implies \operatorname{ind} P(z;\boldsymbol{t}) := \infty$.

下記の Proposition 1 は補助関数の構成に関するものであり, 証明は後述する (6 頁参照). 以下, $c_1, c_2, \dots$ は $p,\ k$ に依存しない正定数, $c_1(p), c_2(p), \dots$ は p には依存するが k には依存しない正定数 とする.

Proposition 1. p を十分大きな正整数とする.

$$B_0(z;\boldsymbol{t}),\dots,B_p(z;\boldsymbol{t}) \in \mathbb{Z}_K[z;\boldsymbol{t}], \qquad \deg_z B_h, \deg_{t_\mu} B_h \le p\ (0 \le h \le p,\ \mu)$$

であり, 次の (i), (ii) をみたすものが存在する.

(i) $\operatorname{ind} B_0(z;\boldsymbol{t}) < \infty$.

(ii) $E(z;\boldsymbol{t}) := \sum_{h=0}^p B_h(z;\boldsymbol{t})F(z;\boldsymbol{t})^h$ とおくと,

$$I := \operatorname{ind} E(z;\boldsymbol{t}) \ge c_1 p^2.$$

Proposition 2. Prop. 1 の $E(z;\boldsymbol{t})$ に対し, $k>c_2(p)$ なら

$$\left|E\left(\alpha^{d^k};\boldsymbol{T}(\tau;1,d^k,\dots,d^{km};\boldsymbol{b}^{(k)}(\alpha))\right)\right|\le c_3^{p^2d^k},\qquad 0<c_3<1.$$

証明. $b_l^{(k)}(\alpha)=f_l(\alpha)-d^{kl}f_l(\alpha^{d^k}),\ 0\le l\le m$ だから $f_l(\alpha^{d^k})\to f_l(0)\ (k\to\infty)$ に注意すると, $c_4>d^m$ とすれば, $|b_l^{(k)}(\alpha)|\le c_4^k\ (0\le l\le m)$ for $\forall k\gg 0$.

$$T_\mu(\boldsymbol{t};\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})=\sum_{\substack{\nu=(\nu_0,\dots,\nu_m),\\ \nu_0\ge\mu_0,\dots,\nu_m\ge\mu_m}} t_\nu\binom{\nu_0}{\mu_0}\cdots\binom{\nu_m}{\mu_m}x_0^{\mu_0}\cdots x_m^{\mu_m}y_0^{\nu_0-\mu_0}\cdots y_m^{\nu_m-\mu_m}$$

だから, $T_\mu(\tau;\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})\in\mathbb{Z}[x_0,\dots,x_m,y_0,\dots,y_m],\ \deg_{x_l}T_\mu(\tau;\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}),\deg_{y_l}T_\mu(\tau;\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})\le L$. 従って, k : 十分大 のとき

$$\begin{aligned}
&|T_\mu(\tau;1,d^k,\dots,d^{km};b_0^{(k)}(\alpha),\dots,b_m^{(k)}(\alpha))|\\
\le\ & c_5 d^{k\frac{m(m+1)}{2}L}c_4^{k(m+1)L}\ \le\ c_5c_4^{k\frac{m+1}{2}L}c_4^{k(m+1)L}\ =\ c_5c_4^{\frac{3}{2}(m+1)Lk}.
\end{aligned}$$

$E(z;\boldsymbol{t})$ は $\boldsymbol{t}$ については $\deg_{t_\mu}E(z;\boldsymbol{t})\le 2p$ の多項式で その係数は収束半径 1 の z の冪級数. よって,

$$E(z;\boldsymbol{t})=\sum_\lambda g_\lambda(z)\boldsymbol{t}^\lambda,\qquad g_\lambda(z)=\sum_{n=0}^\infty g_{\lambda n}z^n$$

とおくと, $|g_{\lambda n}|\le c_6(p)2^n$. $g_\lambda(z)$ は単位円内で一様絶対収束するから $E(z;\boldsymbol{t})=\sum_{n=0}^\infty\left(\sum_\lambda g_{\lambda n}\boldsymbol{t}^\lambda\right)z^n$. $I=\operatorname{ind}E(z;\boldsymbol{t})$ だから, k : 十分大 のとき

$$\begin{aligned}
&\left|E\left(\alpha^{d^k};\boldsymbol{T}(\tau;1,d^k,\dots,d^{km};\boldsymbol{b}^{(k)}(\alpha))\right)\right|\\
\le\ &\sum_{n=I}^\infty\left(\sum_\lambda c_6(p)2^n\left(c_5c_4^{\frac{3}{2}(m+1)Lk}\right)^\lambda\right)|\alpha|^{d^kn}\\
&(\ \lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_{(L+1)^{m+1}}),\quad \deg_{t_\mu}E(z;\boldsymbol{t})\le 2p\ \ \text{だから}\ )\\
\le\ &\sum_{n=I}^\infty(2p+1)^{(L+1)^{m+1}}c_6(p)2^n\left(c_5c_4^{\frac{3}{2}(m+1)Lk}\right)^{2p(L+1)^{m+1}}|\alpha|^{d^kn}\\
=\ &\sum_{n=I}^\infty c_7(p)c_8^{pk}(2|\alpha|^{d^k})^n\qquad\left(c_7(p)=(2p+1)^{(L+1)^{m+1}}c_6(p)c_5^{2p(L+1)^{m+1}},\right.\\
=\ &c_7(p)c_8^{pk}\frac{(2|\alpha|^{d^k})^I}{1-2|\alpha|^{d^k}}.\qquad\qquad\qquad\qquad\left.c_8=c_4^{3(m+1)L(L+1)^{m+1}}\right)\\
&(\ 1-2|\alpha|^{d^k}\ge\frac{1}{c_9},\ 2|\alpha|^{d^k}<1,\ I\ge c_1p^2\ (\because\ \text{Prop. 1})\ \text{だから}\ )\\
\le\ &c_9c_7(p)c_8^{pk}2^{c_1p^2}|\alpha|^{c_1p^2d^k}.
\end{aligned}$$

ここで, $\boxed{|\alpha|^{c_1} < c_3 < 1}$ にとれば $k > c_2(p)$ のとき

$$\left|E\left(\alpha^{d^k}; \boldsymbol{T}(\tau; 1, d^k, \ldots, d^{km}; \boldsymbol{b}^{(k)}(\alpha))\right)\right| \leq c_3^{p^2 d^k}. \quad \Box$$

定理の証明の完結.

$b_l^{(k)}(z) = \sum_{h=0}^{k-1} d^{lh} z^{d^h}$ だから $D = \mathrm{den}(\alpha)$ とすると, $\mathrm{den}(b_l^{(k)}(\alpha)) = D^{d^{k-1}} \quad (0 \leq l \leq m)$. Prop. 2 の証明と同様にして

$$\mathrm{den}(T_\mu(\tau; 1, d^k, \ldots, d^{km}; b_0^{(k)}(\alpha), \ldots, b_m^{(k)}(\alpha))) \leq D^{(m+1)Ld^{k-1}}.$$

$E(z; \boldsymbol{t}) = \sum_{h=0}^{p} B_h(z; \boldsymbol{t}) F(z; \boldsymbol{t})^h$, $F(\alpha^{d^k}; \boldsymbol{T}(\tau; 1, d^k, \ldots, d^{km}; \boldsymbol{b}^{(k)}(\alpha))) = 0$ だから,

$$E(\alpha^{d^k}; \boldsymbol{T}(\tau; 1, d^k, \ldots, d^{km}; \boldsymbol{b}^{(k)}(\alpha))) = B_0(\alpha^{d^k}; \boldsymbol{T}(\tau; 1, d^k, \ldots, d^{km}; \boldsymbol{b}^{(k)}(\alpha))).$$

$B_0(z; \boldsymbol{t}) \in \mathbb{Z}_K[z; \boldsymbol{t}]$, $\deg_z B_0, \deg_{t_\mu} B_0 \leq p$, $\sharp\{\mu = (\mu_0, \ldots, \mu_m) \mid 0 \leq \mu_l \leq L\} = (L+1)^{m+1}$ だから

$$\begin{aligned} D^*(k) &:= \mathrm{den}\left(E\left(\alpha^{d^k}; \boldsymbol{T}(\tau; 1, d^k, \ldots, d^{km}; \boldsymbol{b}^{(k)}(\alpha))\right)\right) \\ &\leq D^{pd^k + (m+1)L(L+1)^{m+1} p d^{k-1}} \\ &= c_{10}^{pd^k}. \qquad \boxed{c_{10} = D^{1+(m+1)L(L+1)^{m+1}/d}} \end{aligned} \tag{2}$$

もし, $E(\alpha^{d^k}; \boldsymbol{T}(\tau; 1, d^k, \ldots, d^{km}; \boldsymbol{b}^{(k)}(\alpha))) = B_0(\alpha^{d^k}; \boldsymbol{T}(\tau; 1, d^k, \ldots, d^{km}; \boldsymbol{b}^{(k)}(\alpha))) \neq 0$ ならば $D^*(k) E(\alpha^{d^k}; \boldsymbol{T}(\tau; 1, d^k, \ldots, d^{km}; \boldsymbol{b}^{(k)}(\alpha))) \in \mathbb{Z}_K \setminus \{0\}$ であり, K は虚2次体だから

$$D^*(k) |E(\alpha^{d^k}; \boldsymbol{T}(\tau; 1, d^k, \ldots, d^{km}; \boldsymbol{b}^{(k)}(\alpha)))| \geq 1. \tag{3}$$

Prop. 1 (i) より, $\mathrm{ind}\, B_0(z; \boldsymbol{t}) < \infty$ だから 下記の Prop. 3 より, $\exists k_0 > c_2(p)$ (in Prop. 2) **s.t.** $B_0(\alpha^{d^{k_0}}; \boldsymbol{T}(\tau; 1, d^{k_0}, \ldots, d^{k_0 m}; \boldsymbol{b}^{(k_0)}(\alpha))) \neq 0$. (2), (3) と Prop. 2 より, $1 \leq c_3^{p^2 d^{k_0}} c_{10}^{pd^{k_0}}$. よって, $1 \leq c_3^p c_{10}$. 即ち, $c_3^{-p} \leq c_{10}$. $0 < c_3 < 1$ だから, p が十分大きいとき これは矛盾. $\Box$

補題 1. $\{f_l(z) \mid l \geq 0\}$ は $\mathbb{C}(z)$ 上代数的独立.

Proposition 3. $P(z; \boldsymbol{t}) \in K[z; \boldsymbol{t}]$ に対し,

$$P(\alpha^{d^k}; \boldsymbol{T}(\tau; 1, d^k, \ldots, d^{km}; \boldsymbol{b}^{(k)}(\alpha))) = 0 \text{ for } \forall k \gg 0 \implies \mathrm{ind}\, P(z; \boldsymbol{t}) = \infty.$$

証明. $P(z;\boldsymbol{t})=\sum_{n=0}^{N}Q_n(\boldsymbol{t})z^n$ $(Q_n(\boldsymbol{t})\in K[\boldsymbol{t}])$ とする.

$$\begin{aligned}&Q_n(\boldsymbol{T}(\tau;1,d^k,\dots,d^{km};f_0(\alpha)-w_0,f_1(\alpha)-d^kw_1,\dots,f_m(\alpha)-d^{km}w_m)\\=&\sum_{\lambda=(\lambda_0,\dots,\lambda_m)}R_{n\lambda}(k)\boldsymbol{w}^{\lambda}\end{aligned}$$

とおく. $w_0=f_0(\alpha^{d^k}),\dots,w_m=f_m(\alpha^{d^k})$ とすると,

$$\begin{aligned}&Q_n(\boldsymbol{T}(\tau;1,d^k,\dots,d^{km};f_0(\alpha)-w_0,f_1(\alpha)-d^kw_1,\dots,f_m(\alpha)-d^{km}w_m)\\=&Q_n(\boldsymbol{T}(\tau;1,d^k,\dots,d^{km};\boldsymbol{b}^{(k)}(\alpha)))\end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned}&P(\alpha^{d^k};\boldsymbol{T}(\tau;1,d^k,\dots,d^{km};\boldsymbol{b}^{(k)}(\alpha)))\\=&\sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{\lambda=(\lambda_0,\dots,\lambda_m)}R_{n\lambda}(k)f_0(\alpha^{d^k})^{\lambda_0}\cdots f_m(\alpha^{d^k})^{\lambda_m}\right)\alpha^{d^kn}\ =\ 0\text{ for }\forall k\gg 0.\end{aligned}$$

$R_{n\lambda}(k)\in K(f_0(\alpha),\dots,f_m(\alpha))[d^k]$ だから

$$R_{n\lambda}(k)=\sum_{h=0}^{H}r_{n\lambda h}d^{hk},\qquad r_{n\lambda h}\in K(f_0(\alpha),\dots,f_m(\alpha))\subset\mathbb{C}$$

とおける. このとき,

$$\begin{aligned}&P(\alpha^{d^k};\boldsymbol{T}(\tau;1,d^k,\dots,d^{km};\boldsymbol{b}^{(k)}(\alpha)))\\=&\sum_{h=0}^{H}d^{hk}\left(\sum_{n=0}^{N}\sum_{\lambda=(\lambda_0,\dots,\lambda_m)}r_{n\lambda h}\alpha^{d^kn}f_0(\alpha^{d^k})^{\lambda_0}\cdots f_m(\alpha^{d^k})^{\lambda_m}\right).\end{aligned}$$

$G_h(z)=\sum_{n=0}^{N}\sum_{\lambda=(\lambda_0,\dots,\lambda_m)}r_{n\lambda h}z^nf_0(z)^{\lambda_0}\cdots f_m(z)^{\lambda_m}$ とおくと, $G_h(z)\in\mathbb{C}[[z]]$. 補題 1 より, $r_{n\lambda h}$ $(0\le n\le N,\ \lambda)$ が not all 0 $\Longrightarrow$ $G_h(z)=c_{h\,m_h}z^{m_h}+c_{h\,m_h+1}z^{m_h+1}+\cdots,\ c_{h\,m_h}\neq 0$. $G_h(z)$ の係数は有界だから $G_h(\alpha^{d^k})=c_{h\,m_h}\alpha^{m_hd^k}+o(\alpha^{m_hd^k})$.

$$M=\min_{0\le h\le H}m_h,\qquad H^*=\max\{h\mid m_h=M\}$$

とすると

$$\begin{aligned}&P(\alpha^{d^k};\boldsymbol{T}(\tau;1,d^k,\dots,d^{km};\boldsymbol{b}^{(k)}(\alpha)))\\=&\sum_{h=0}^{H}d^{hk}\left(c_{h\,m_h}\alpha^{m_hd^k}+o(\alpha^{m_hd^k})\right)\\=&c_{H^*M}d^{H^*k}\alpha^{Md^k}+o(d^{H^*k}\alpha^{Md^k}),\quad c_{H^*M}\neq 0,\quad\text{for }\forall k\gg 0.\end{aligned}$$

これは矛盾. 従って,

$$r_{n\lambda h} = 0 \ (0 \le n \le N,\ \lambda,\ 0 \le h \le H).$$

即ち, $Q_n(\boldsymbol{T}(\tau; 1, d^k, \ldots, d^{km}; f_0(\alpha) - w_0, f_1(\alpha) - d^k w_1, \ldots, f_m(\alpha) - d^{km} w_m) \equiv 0 \quad (0 \le n \le N)$. よって, $Q_n(\boldsymbol{T}(\tau; 1, d^k, \ldots, d^{km}; y_0, \ldots, y_m) \equiv 0 \quad (0 \le n \le N)$. 即ち, $Q_n(\boldsymbol{t}) \in V(\tau) \quad (0 \le n \le N)$. $\square$

以下, Prop. 1 の証明に用いる補題を述べる.

補題 2. $V(\tau)$ は $K[\boldsymbol{t}]$ の素イデアル.

証明. イデアルであることは明らか. $Q_1, Q_2 \in K[\boldsymbol{t}]$, $Q_1 Q_2 \in V(\tau)$ **i.e.** $Q_1(\boldsymbol{T}(\tau; 1, d^k, \ldots, d^{km}; y_0, \ldots, y_m))Q_2(\boldsymbol{T}(\tau; 1, d^k, \ldots, d^{km}; y_0, \ldots, y_m)) = 0$ for $\forall k \ge 0$ とすると, Q_1, Q_2 の少なくとも一方, それを Q_1 としてよい, は $Q_1(\boldsymbol{T}(\tau; 1, d^k, \ldots, d^{km}; y_0, \ldots, y_m)) = 0$ for ∞**-many** $k \ge 0$.

$$\begin{aligned} & T_\mu(\tau; 1, d^k, \ldots, d^{km}; y_0, \ldots, y_m) \\ = & \sum_{\substack{\nu=(\nu_0,\ldots,\nu_m), \\ \nu_0 \ge \mu_0, \ldots, \nu_m \ge \mu_m}} \tau_\nu \binom{\nu_0}{\mu_0} \cdots \binom{\nu_m}{\mu_m} d^{k\mu_1} \cdots d^{km\mu_m} y_0^{\nu_0 - \mu_0} \cdots y_m^{\nu_m - \mu_m} \end{aligned}$$

だから $Q_1(\boldsymbol{T}(\tau; 1, d^k, \ldots, d^{km}; y_0, \ldots, y_m)) \in K[d^k, y_0, \ldots, y_m]$. Q_1 が $y_0, \ldots, y_m$ の多項式として $\not\equiv 0 \implies Q_1$ の少なくともひとつの係数は d^k の多項式 $\not\equiv 0$. しかし, ∞**-many** $k \ge 0$ に対して, これが 0 となるから, 多項式の根は有限個であることに反する. 従って, $Q_1(\boldsymbol{T}(\tau; 1, d^k, \ldots, d^{km}; y_0, \ldots, y_m)) \equiv 0$. すなわち, $Q_1 \in V(\tau)$.

$\square$

補題 3. $\operatorname{ind} P_1(z; \boldsymbol{t}) P_2(z; \boldsymbol{t}) = \operatorname{ind} P_1(z; \boldsymbol{t}) + \operatorname{ind} P_2(z; \boldsymbol{t})$.

証明. $\operatorname{ind} P_1(z; \boldsymbol{t}) = I$, $\operatorname{ind} P_2(z; \boldsymbol{t}) = J$ とする. $P_1(z; \boldsymbol{t}) = \sum_{n=0}^\infty P_n(\boldsymbol{t}) z^n$, $P_2(z; \boldsymbol{t}) = \sum_{m=0}^\infty Q_m(\boldsymbol{t}) z^m$ とすると, $P_1(z; \boldsymbol{t}) P_2(z; \boldsymbol{t}) = \sum_{k=0}^\infty \left(\sum_{n+m=k} P_n(\boldsymbol{t}) Q_m(\boldsymbol{t}) \right) z^k$ だから, $I = \infty$ or $J = \infty \implies \operatorname{ind} P_1(z; \boldsymbol{t}) P_2(z; \boldsymbol{t}) = \infty$ は明らか. $I, J < \infty$ のとき,

$$P_I(\boldsymbol{t}), Q_J(\boldsymbol{t}) \notin V(\tau), \quad P_0(\boldsymbol{t}), \ldots, P_{I-1}(\boldsymbol{t}), Q_0(\boldsymbol{t}), \ldots, Q_{J-1}(\boldsymbol{t}) \in V(\tau).$$

よって, $k < I + J \implies n < I$ or $m < J \implies P_n(\boldsymbol{t})$ or $Q_m(\boldsymbol{t}) \in V(\tau) \implies \sum_{n+m=k} P_n(\boldsymbol{t}) Q_m(\boldsymbol{t}) \in V(\tau)$. また,

$$\begin{aligned}\sum_{n+m=I+J} P_n(\boldsymbol{t})Q_m(\boldsymbol{t}) &= \underbrace{\sum_{n=0}^{I-1} P_n(\boldsymbol{t})Q_{I+J-n}(\boldsymbol{t})}_{\in V(\tau)} + \underbrace{P_I(\boldsymbol{t})Q_J(\boldsymbol{t})}_{\notin V(\tau)\ (\because \text{補題 } 2)} + \underbrace{\sum_{m=0}^{J-1} P_{I+J-m}(\boldsymbol{t})Q_m(\boldsymbol{t})}_{\in V(\tau)} \\ &\notin V(\tau). \ \square\end{aligned}$$

定義 2. p を正整数とする.

$$R(p) := \{g(\boldsymbol{t}) \in K[\boldsymbol{t}] \mid \deg_{t_\mu} g(\boldsymbol{t}) \le p \text{ for } \forall \mu\}.$$

これは K-vector space.

$$\overline{R}(p) := R(p)/(R(p) \cap V(\tau)), \qquad d(p) := \dim_K \overline{R}(p).$$

$f(\boldsymbol{t}) \in R(p)$ に対し,

$$\overline{f(\boldsymbol{t})} := f(\boldsymbol{t}) + (R(p) \cap V(\tau)).$$

補題 4. $d(2p) \le 2^{(L+1)^{m+1}} d(p)$.

証明. $R(2p) \ni \forall Q(\boldsymbol{t}) = \sum_\varepsilon \left(\prod_\mu t_\mu^{\varepsilon(\mu)p}\right) Q_\varepsilon(\boldsymbol{t}),\quad Q_\varepsilon(\boldsymbol{t}) \in R(p)$ とかける. ただし, $\varepsilon(\cdot)$ は $\{\mu = (\mu_0, \dots, \mu_m) \mid 0 \le \mu_l \le L\}$ から $\{0, 1\}$ への関数で $\sum$ はそのような ε 全部にわたって動く. $\{\overline{Q_1(\boldsymbol{t})}, \dots, \overline{Q_{d(p)}(\boldsymbol{t})}\}$ を $\overline{R}(p)$ の K 上の basis とすると, $\left\{\overline{\left(\prod_\mu t_\mu^{\varepsilon(\mu)p}\right) Q_i(\boldsymbol{t})} \;\middle|\; 1 \le i \le d(p),\ \varepsilon\right\}$ は K 上で $\overline{R}(2p)$ を生成するから

$$\dim_K \overline{R}(2p) \le 2^{\sharp\{\mu=(\mu_0,\dots,\mu_m)\ \mid\ 0\le\mu_l\le L\}} d(p) = 2^{(L+1)^{m+1}} d(p). \ \square$$

補題 5. $\operatorname{ind} F(z; \boldsymbol{t}) < \infty$.

証明. 補題 1 より, $f_0(z), \dots, f_m(z)$ は $\mathbb{Q}(\subset \mathbb{C}(z))$ 上代数的独立だから,

$$F(z; \tau) = \sum_{\substack{\mu=(\mu_0,\dots,\mu_m),\\ 0\le\mu_l\le L}} \tau_\mu f_0(z)^{\mu_0} \cdots f_m(z)^{\mu_m} \not\equiv 0 \quad (\because \tau_\mu \in \mathbb{Z}).$$

一致の定理より, $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ **s.t.** $F(\alpha^{d^{k_0}}; \tau) \ne 0$. $\operatorname{ind} F(z; \boldsymbol{t}) = \infty$ とすると, $F(z; \boldsymbol{t}) = \sum_{n=0}^\infty P_n(\boldsymbol{t}) z^n$ とおくとき, $\forall n \ge 0$ に対し $P_n(\boldsymbol{t}) \in V(\tau)$. すなわち, $P_n(\boldsymbol{T}(\tau; 1, d^k, \dots, d^{km}; y_0, \dots, y_m) = 0$ for $\forall k \ge 0$. 従って, $0 \ne F(\alpha^{d^{k_0}}; \tau) = \sum_{n=0}^\infty P_n(\tau) \alpha^{d^{k_0}} = \sum_{n=0}^\infty P_n(\boldsymbol{T}(\tau; 1, \dots, 1; 0, \dots, 0)) \alpha^{d^{k_0}} = 0$. これは矛盾. $\square$

Prop. 1 の証明. $B_h(z;\boldsymbol{t}) = \sum_{l=0}^{p} B_{hl}(\boldsymbol{t})z^l$ とすると $B_{hl}(\boldsymbol{t}) \in R(p)$ だから, $\{\overline{Q_1^{(p)}(\boldsymbol{t})}, \ldots, \overline{Q_{d(p)}^{(p)}(\boldsymbol{t})}\}$ を $\overline{R}(p)$ の K 上の basis とすれば

$$\overline{B_{hl}(\boldsymbol{t})} = \sum_{i=1}^{d(p)} g_{hli}\overline{Q_i^{(p)}(\boldsymbol{t})} \quad (g_{hli} \in K)$$

と表せる.

$$\begin{aligned}
E(z;\boldsymbol{t}) &= \sum_{h=0}^{p} B_h(z;\boldsymbol{t})F(z;\boldsymbol{t})^h \\
&= \sum_{h=0}^{p}\sum_{l=0}^{p} B_{hl}(\boldsymbol{t})z^l \left(\sum_{\substack{\mu=(\mu_0,\ldots,\mu_m),\\ 0\le\mu_l\le L}} t_\mu f_0(z)^{\mu_0}\cdots f_m(z)^{\mu_m} \right)^h = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(\boldsymbol{t})z^n.
\end{aligned} \tag{4}$$

$E_n(\boldsymbol{t}) \in R(2p)$ だから $\{\overline{Q_1^{(2p)}(\boldsymbol{t})}, \ldots, \overline{Q_{d(2p)}^{(2p)}(\boldsymbol{t})}\}$ を $\overline{R}(2p)$ の K 上の basis とすると

$$\overline{E_n(\boldsymbol{t})} = \sum_{j=1}^{d(2p)} f_{nj}\overline{Q_j^{(2p)}(\boldsymbol{t})} \quad (f_{nj} \in K)$$

と表せる. 従って, $(K[\boldsymbol{t}]/V(\tau))[[z]]$ において (4) より

$$\begin{aligned}
&\sum_{h=0}^{p}\sum_{l=0}^{p} \left(\sum_{i=1}^{d(p)} g_{hli}\overline{Q_i^{(p)}(\boldsymbol{t})} \right) z^l \left(\sum_{\substack{\mu=(\mu_0,\ldots,\mu_m),\\ 0\le\mu_l\le L}} \overline{t_\mu} f_0(z)^{\mu_0}\cdots f_m(z)^{\mu_m} \right)^h \\
= &\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{d(2p)} f_{nj}\overline{Q_j^{(2p)}(\boldsymbol{t})} \right) z^n
\end{aligned}$$

となるから $\overline{R}(2p)[[z]]$ において $\{\overline{Q_1^{(2p)}(\boldsymbol{t})}, \ldots, \overline{Q_{d(2p)}^{(2p)}(\boldsymbol{t})}\}$ の係数を比較すると

$$f_{nj} = \sum_{h=0}^{p}\sum_{l=0}^{p}\sum_{i=1}^{d(p)} c_{nhlij}g_{hli} \quad (c_{nhlij} \in K;\ n \ge 0,\ 1 \le j \le d(2p)).$$

$J = [2^{-(L+1)^{m+1}}p^2]$ とおくと, 補題 4 より

$$\begin{aligned}
&\sharp\{g_{hli} \mid 0 \le h \le p,\ 0 \le l \le p,\ 1 \le i \le d(p)\} \ = \ (p+1)^2 d(p) \\
> \ & p^2 d(p) \ \ge \ J2^{(L+1)^{m+1}} d(p) \\
\ge \ & Jd(2p) \ = \ \sharp\{f_{nj} \mid 0 \le n \le J-1,\ 1 \le j \le d(2p)\}.
\end{aligned}$$

よって，$f_{nj}=0$ $(0\le n\le J-1,\ 1\le j\le d(2p))$ をみたす少なくともひとつは 0 ではない g_{hli} $(0\le h\le p,\ 0\le l\le p,\ 1\le i\le d(p))$ が存在する．$f_{nj}=0\quad(1\le j\le d(2p)) \iff \overline{E_n(\boldsymbol{t})}=0 \iff E_n(\boldsymbol{t})\in V(\tau)$ だから，このような g_{hli} をとれば，$I\ge J$ かつ $\exists h\ (0\le h\le p)$ **s.t.** $\mathrm{ind}\,B_h(z;\boldsymbol{t})<\infty$.

$r:=\min\{h\mid \mathrm{ind}\,B_h(z;\boldsymbol{t})<\infty\}$ とし，$E_0(z;\boldsymbol{t}):=\sum_{h=r}^{p}B_h(z;\boldsymbol{t})F(z;\boldsymbol{t})^{h-r}$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
I &= \mathrm{ind}\left(\underbrace{\sum_{h=0}^{r-1}B_h(z;\boldsymbol{t})F(z;\boldsymbol{t})^h}_{\in V(\tau)[[z]]}+F(z;\boldsymbol{t})^rE_0(z;\boldsymbol{t})\right)\\
&= \mathrm{ind}\,(F(z;\boldsymbol{t})^rE_0(z;\boldsymbol{t}))\\
&= r\,\mathrm{ind}\,F(z;\boldsymbol{t})+\mathrm{ind}\,E_0(z;\boldsymbol{t}) \qquad (\because \text{補題 } 3).
\end{aligned}
$$

$I\ge J$ だから $\mathrm{ind}\,E_0(z;\boldsymbol{t})\ge J-r\,\mathrm{ind}\,F(z;\boldsymbol{t})\ge 2^{-(L+1)^{m+1}}p^2-1-p\,\mathrm{ind}\,F(z;\boldsymbol{t})$. 補題 5 より $\mathrm{ind}\,F(z;\boldsymbol{t})<\infty$ だから $\boxed{2^{-(L+1)^{m+1}}>c_1}$, p ：十分大 にとれば $\mathrm{ind}\,E_0(z;\boldsymbol{t})\ge c_1p^2$. よって，$E_0(z;\boldsymbol{t})$ にその係数達の共通公分母をかけたものを $E(z;\boldsymbol{t})$ とすればよい．□

参考：定理の証明における p は以下のように具体的に定められる．

$|\alpha|^{2^{-(L+1)^{m+1}}}<|\alpha|^{c_1}<c_3<1$ より $c_3=|\alpha|^{2^{-(L+1)^{m+1}-1}}$ とすれば $-p\log c_3=2^{-(L+1)^{m+1}-1}p(-\log|\alpha|)$, $\log c_{10}=1+(m+1)L(L+1)^{m+1}d^{-1}\log D$ だから

$$p>2^{1+(L+1)^{m+1}}(1+(m+1)L(L+1)^{m+1}d^{-1})(-\log|\alpha|)^{-1}\log D$$

をみたす p をとれば矛盾．□

※ $|\alpha|\sim 1$ かつ $D\gg 0$ なる α ほど p を大きくする．

★ 定理は $\alpha\in\overline{\mathbb{Q}}$ に対しても成り立つ．証明は下記の**基本不等式**を用いる：

$\beta\in\overline{\mathbb{Q}}$, $\beta\ne 0$, $\boxed{n=\deg\beta}$, $\beta=\beta^{(1)},\beta^{(2)},\dots,\beta^{(n)}$：$\beta$ の共役．
$\lceil\beta\rceil:=\max\{|\beta^{(1)}|,|\beta^{(2)}|,\dots,|\beta^{(n)}|\}$, $d:=\mathrm{den}(\beta)$. $N_{\mathbb{Q}(\beta)/\mathbb{Q}}(d\beta)\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ だから $1\le|N_{\mathbb{Q}(\beta)/\mathbb{Q}}(d\beta)|=d^n|\beta^{(1)}||\beta^{(2)}|\cdots|\beta^{(n)}|\le d^n|\beta|\lceil\beta\rceil^{n-1}$. 故に，

$$|\beta|\ge d^{-n}\lceil\beta\rceil^{-n+1}.$$

両辺の対数をとると **基本不等式：**

$$\log|\beta|\ge -2n\max\{\log\lceil\beta\rceil,\log\mathrm{den}(\beta)\}$$

を得る．