Siegel modular form of degree 2 and Abelian variety.

岡崎　武生
大阪大学大学院理学研究科

1　吉田予想と吉田リフト．

[志村ー谷山予想]　全ての $\mathbb{Q}$ 上定義された楕円曲線 E に対して，次の条件を満たす重さ 2 の楕円保型形式 f が存在する．

- $L(s,E) \geq\leq L(s,f)$.
- E の conductor と f の level は一致する．　□

この予想の根拠となった Eichler-Shimura 理論がありました．
[Eichler-Shimura 理論]　$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}_{>0}} a_n \exp(2\pi inz)$ を重さ 2 の Hecke eigen cuspform とする．このとき，

- $\mathbb{Q}_f := \mathbb{Q}\langle a_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ は有限次代数体である.
- $[\mathbb{Q}_f : \mathbb{Q}]$ 次元 Abel 多様体 A_f で $L(s, H^1(A_f, \mathbb{Q}_l)) = \prod_{\sigma:\mathbb{Q}_f\hookrightarrow\mathbb{C}} L(s, f^\sigma)$ となるものが存在する．

特に $\mathbb{Q}_f = \mathbb{Q}$ のときは A_f は楕円曲線である．　□
さて，志村ー谷山予想の 2 次元版として，京都大学の吉田敬之先生により

吉田予想　*root number =1* をもつ $\mathbb{Q}$ 上定義された，全ての *simple* な *Abel* 曲面 A に対して，$L(s, H^1(A, \mathbb{Q}_l)) = L(s, F, spin)$*, up to finitely many bad primes* となる次数，重さ 2 の *Siegel* 保型形式 F が存在する．□

と予想されました．この予想の根拠となったのが，吉田リフトと呼ばれる Siegel 保型形式の構成法でした．その吉田リフトには次の２タイプがあります．

(I) 楕円保型形式の pair から構成:

$$S_2^{(1)}(\Gamma_0(p))^2 \ni f_1, f_2 \longmapsto Y^2_{f_1,f_2} \in M_2^2(\Gamma_0(p)),\quad L(s, Y_{f_1,f_2}, spin) = L(s,f_1)L(s,f_2).$$

(II) ２次体 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{N})$ の Hilbert 保型形式から構成:

$$S_2(\Gamma_K) \ni f \longmapsto Y_f^2 \in M_2^2(\Gamma_0(N), \chi_N),\quad L(s, Y_f, spin) = L(s,f).$$

$$\Gamma_K = \begin{pmatrix} * & \sqrt{N^{-1}}* \\ \sqrt{N}* & * \end{pmatrix},\ * \in \mathfrak{o}_K.$$

吉田先生は，この type (I) の吉田リフトと，Eichler-Shimura 理論で得られる Abel 曲面とを用いて，吉田予想の成立している Siegel 保型形式と Abel 曲面の pair の example を与えました．しかし，この吉田リフトには，

Yoshida's non-vanishing problem　この吉田リフトはいつでも有効な構成法なのか？消えている事はないのか？

という問題がありました．この問題に対して，
Böcherer and Schulze-Pillot's result (1992) type (I) の吉田リフトは消えない．　□
という事が証明されました．この定理により，我々は楕円保型形式 (trivial central character) から得られる Abel 曲面に対しては吉田予想が成立している事がわかります．
　一方，東京大学の織田孝幸先生の予想 (1982) や Brylinski-Labesse(1984) の結果などより，次の事を予想するのは自然と思われます．

Conjecture 1 K を実２次体，ρ を $Gal(K/\mathbb{Q})$ の生成元とする．重さ 2 の *Hilbert eigen cuspform* $f(z_1, z_2) = \sum_{\mathfrak{n}\in\mathfrak{o}_K} a_{\mathfrak{n}} \exp(2\pi i(N(\mathfrak{n})z_1 + N(\mathfrak{n})^{\rho}z_2))$ に対して，K 上定義された以下の条件をみたす *Abel*多様体 A_f *with* $\dim A_f = [\mathbb{Q}_f : \mathbb{Q}]$ が存在する．

- $L(s, H^1(A_f, \mathbb{Q}_l)) = \prod_{\sigma:\mathbb{Q}_f\hookrightarrow\mathbb{C}} L(s, f^{\sigma})$.
- $End_{\mathbb{Q}}(A_f) \supset \mathbb{Q}_f$.　□

Remark 1 $End_{\mathbb{Q}}(A_f) \supset K$ ではない事に注意．織田予想は一般次数の *totally real filed* 上の *Hilbert* 保型形式に対してされている．

この Conjecture 1 を仮定すれば，特に Hilbert 保型形式 f から，次のタイプの Abel 曲面/$\mathbb{Q}$ が得られます．

i). 楕円曲線 E_f/K の Weil restriction $Res_{K/\mathbb{Q}}E_f$.

ii). $S_2^{(1)}(\Gamma_0(N), \chi_N)$ から得られる Abel 曲面．(これは予想を仮定する必要はない．E-S.)

iii). $[\mathbb{Q}_f : \mathbb{Q}] = 2$ で，'本当は'$\mathbb{Q}$ 上定義されている Abel 曲面 A_f.

(genus 2 の hyper-elliptic curve $C : y^2 = x^5 + a,\ (a \in \mathbb{Q}^{\times})$ の Jacobian などは高い conductor を持つので full-modular 保型形式に対応しないが，3 の例と考えられる．)
　そこで次に吉田予想に更に根拠を与える為の自然な問題として，吉田リフト type (II) は消えないか？を考えました．

2　主結果．

　上の問題について次の答えが与えられます．$p|N$ に対して local Fircke involution を

$$i_p : S_2(\Gamma_K) \ni f(z_1, z_2) \longmapsto f(\frac{-1}{pz_1}, \frac{-1}{pz_2}) \in S_2(\Gamma_K)$$

で定義する．$i_p(f) = \pm f$ である．

Main Theorem 1 f が $i_p, p|N$ に関する *eigen value* が全て 1 ならば，*(*一つの p でも $i_p(f) = -f$ なら $Y_f = 0$.*)*

- 吉田リフト *type* (II) の像 Y_f は消えない．

- Y_f の *Fourier* 係数は $\mathbb{Q}_f$ に含まれる．
- f が *Doi-Naganuma lift of nebentypus* で得られるなら，Y_f は *cuspform* では無い．

$$\begin{array}{ccccc} & S_2^{(1)}(\Gamma_K)^\vee & \xrightarrow{Y} & S_2^{(2)}(\Gamma_0(N),\chi_N), & \\ S_2^{(1)}(\Gamma_0(N),\chi_N) \xrightarrow{DN} & S_2(\Gamma_K)^N & \xrightarrow{Y} & N_2^{(2)}(\Gamma_0(N),\chi_N) & \xrightarrow{\Phi} S_2^{(1)}(\Gamma_0(N),\chi_N). \end{array}$$

$S_2(\Gamma_K)$ における *D-N lift* の像を $S_2(\Gamma_K)^N$ であらわし，直交補空間を $S_2(\Gamma_K)^\vee$ としている．下段最右の *map* は *Siegel* 作用素．$N_2^{(2)}$ は *Siegel non-cuspform* の空間．$g \in S_2^{(1)}(\Gamma_0(N),\chi_N)$ から出発して最後まで行き着く事が常に出来，$\Phi \circ Y \circ DN(g) = g + \bar{g}$ になっている． □

更に，

Main Theorem 2 上定理では，$f \in S_2(\Gamma_K)^N$ の吉田リフトの像 Y_f は *non-cuspform* であったが，f が *Grössencharacter* でかけるなら，Y_f と同じ *spinor* L-関数をもつ *cuspform* F^C が存在する． □

こういった現象の explicit な表示として，[4] に『$y^2 = x^5 - x$ に対応した Siegel cuspform が存在し Igusa-theta の４積の形をしている.』という結果があります．なお，$y^2 = x^5 - x$ は $E : y^2 = x(x-1)(x-1-\sqrt{2})$ の Weil restriction なので $\mathbb{C}$-simple ではない．

さて，吉田予想と (拡張された) 織田予想を仮定すると Siegel 保型形式の standard L-関数に関する Kudla-Rallis-Soudry 結果 (1993) より，Abel 曲面の Hasse-Weil 関数の２次元 part の本質的な部分 $L'(s, H^2(A,\mathbb{Q}_l)) := \zeta(s-1)^{-2} L(s, H^2(A,\mathbb{Q}_l))$ に関して次の事が言えます．

$A/\mathbb{Q}$ が simple かつ root number $= 1$ ならば，$ord_{s=2} L'(s, H^2(A,\mathbb{Q}_l)) \geq -1$ で

1. $End_{\mathbb{Q}}(A) = \mathbb{Q} \Rightarrow ord_{s=2} L'(s, H^2(A,\mathbb{Q}_l)) \geq 1$.
2. $ord_{s=2} L'(s, H^2(A,\mathbb{Q}_l)) = 0 \Rightarrow L(s, H^1(A,\mathbb{Q}_l))$ と同じ L-関数を持つ楕円保型形式の pair か Hilbert 保型形式 (虚２次体上も含む) が存在する.
3. $ord_{s=2} L'(s, H^2(A,\mathbb{Q}_l)) = -1 \iff A$ は $S_2^{(1)}(\Gamma_0(N),\chi_N)$ から得られる Abel 曲面.

従って，興味深い問題として,『$End_{\mathbb{Q}}(A) \neq \mathbb{Q}$ ならば，Shimura curve の Jacobian か２次体上の Hilbert 保型形式の motive と isogeneous か？』という問題が考えられます．

参考文献

[1] Böcherer, S and Schulze-Pillot, R: Siegel modular forms and theta series attached to quaternion algebras, Nagoya Math. J. **121** (1991), 35-96. II, **147** (1997), 71-106.

[2] Kudla, S, Rallis, S and Soudry, D: On the degree 5 L-function for $Sp(2)$, Invent. math. **107** (1992), 483-541.

[3] Oda, T: Periods of Hilbert surfaces. Progress in math. **19**, Birkhässer, (1982).

[4] Okazaki, T: Proof of R. Salvati Manni and J. Top's conjectures on Siegel modular forms and Abelian surfaces, Amer. J. Math. **128**, (2006) 139-165.

[5] Yoshida, H: Siegel's modular forms and the arithmetics of quadratic forms, Invent. math. **60** (1980), 193-248.