

新谷 L 関数と HECKE L 関数について

佐藤信夫 (京都大学), 広瀬稔 (京都大学)

1. 序論

この文章では主に新谷 L 関数と呼ばれる関数を定義し、その性質について解説する予定である。新谷 L 関数は多数の連続的パラメータを持った解析的な関数であり、パラメータを特殊化することによって Hecke L 関数を構成することができる。Hecke L 関数のさまざまな性質（解析接続など）が新谷 L 関数の性質から導かれる。

Stark 予想は Hecke L 関数の $s = 0$ での先頭項 (= 高階微分値) について述べたものであるが、その微分値を和の形に分解する新谷公式は微分値を調べる際の重要な道具である。Hecke L 関数の変数 $s \in \mathbb{C}$ に対応する変数として、新谷 L 関数には多変数のパラメータ $(s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{C}^n$ があるが、この多変数化が新谷公式を理解する上で特に重要である。従来の研究ではこの多変数化の視点はあまりなかったように思う。もう一つ新谷 L 関数の重要な点は、それが変数 $(s_1, \dots, s_n)$ について $\mathbb{C}^n$ 上の正則関数であるという点である。特に $(0, \dots, 0)$ 上で正則なことが新谷公式と高階微分への一般化を考える上で重要になる。従来の新谷ゼータ関数を用いた研究では Hecke L 関数を直接的に表せる代わりに、この正則性が成立しないという問題があった。また新谷 L 関数よりさらに良い関数として正規新谷 L 関数を導入する。正規新谷 L 関数の著しい性質のひとつに関数等式がある。本文章ではまず新谷氏の結果について述べた後、新谷 L 関数の定義を行う。そして正規新谷 L 関数を導入しさらに、Hecke L 関数を正規新谷 L 関数で表す方法について解説する。最後に新谷公式の重要性を示す例として 21 節以降で Ren 氏と Sczech 氏による Stark 予想の精密化を紹介する。

2. 新谷卓郎氏の結果について

新谷卓郎氏は Hecke L 関数（部分ゼータ関数）の研究のため新谷ゼータ関数を導入し、基本領域を Cone の和として表す事で、Hecke L 関数（部分ゼータ関数）を新谷ゼータ関数で表した。また、新谷公式を用いて総実体の部分ゼータ関数の $s = 0$ での微分値の $\exp$ を多重 Γ 関数を用いて表し、 $s = 0$ が一位の零点である場合にそれが K の類体の単数で表されることを予想した。

2.1. 新谷ゼータ関数. 新谷ゼータ関数は、 $a_{\nu\mu} > 0$, $x_\mu > 0$ に対し次の級数で定義される。

$$\zeta_{n,r}(s, A, x) = \sum_{m=0}^{\infty} \prod_{\nu=1}^n \left(\sum_{\mu=1}^r a_{\nu\mu} (m_\mu + x_\mu) \right)^{-s_\nu}$$

新谷ゼータ関数は $\mathbb{C}^n$ に有理型解析接続され、

$$s_1 + \dots + s_n \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$$

などに極を持っている。 $\zeta_{1,r}(s, A, x)$ は特に Barnes のゼータ関数とよばれ、

$$\Gamma_r(A, x) = \exp \left(\frac{\partial}{\partial s} \zeta_{1,r}(s, A, x) \Big|_{s=0} \right)$$

は (定数倍を除いて) Barnes の多重 Γ 関数と呼ばれる Γ 関数の一般化になっている。

2.2. 基本領域と Cone 分解. $\mu = 1, \dots, r$ に対し

$$u_\mu = \begin{pmatrix} a_{1\mu} \\ \vdots \\ a_{n\mu} \end{pmatrix} \in (\mathbb{R}_+)^n$$

、

$$V((u_1, \dots, u_r), (x_1, \dots, x_r)) = \left\{ \sum_{\mu=1}^r (m_\mu + x_\mu) u_\mu \mid m_1, \dots, m_r \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\}$$

とおく。このとき、新谷ゼータ関数は

$$\zeta_{n,r}(s, A, x) = \sum_{v \in V(u, x)} \frac{1}{v_1^{s_1} \cdots v_n^{s_n}}$$

と書ける。

例 1. $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ の Dedekind ゼータ関数は

$$\zeta_K(s) = \sum_{x \in O_{K,+}/O_{K,+}^\times} \frac{1}{N(x)^s}$$

と表される。いま ρ を標準的な埋め込み $\rho: K \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ とすると $\mathbb{R}_+^2/\rho(O_{K,+}^\times)$ の基本領域として、

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3+2\sqrt{2} \\ 3-2\sqrt{2} \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta > 0 \right\} \\ \Lambda_2 &= \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \alpha > 0 \right\} \end{aligned}$$

として $\Lambda_1 \sqcup \Lambda_2$ を取ることができる。このとき、

$$\Lambda_1 \cap \rho(O_K) = V\left(\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3+2\sqrt{2} \\ 3-2\sqrt{2} \end{pmatrix}\right), (1, 1)\right) \sqcup V\left(\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3+2\sqrt{2} \\ 3-2\sqrt{2} \end{pmatrix}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)$$

$$\Lambda_2 \cap \rho(O_K) = V\left(\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), (1)\right)$$

であるから、

$$\begin{aligned} \zeta_K(s) &= \zeta_{2,2}\left((s, s), \begin{pmatrix} 1 & 3+2\sqrt{2} \\ 1 & 3-2\sqrt{2} \end{pmatrix}, (1, 1)\right) + \zeta_{2,2}\left((s, s), \begin{pmatrix} 1 & 3+2\sqrt{2} \\ 1 & 3-2\sqrt{2} \end{pmatrix}, \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right) \\ &\quad + \zeta_{2,1}\left((s, s), \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, (1)\right) \end{aligned}$$

と新谷ゼータ関数の和で表すことができる。まず Cone を次のように定義する。

定義 2. ある一次独立な $u_1, \dots, u_r \in \mathbb{R}^n$ によって、

$$\Lambda(u_1, \dots, u_r) = \left\{ \sum_{\mu} \alpha_\mu u_\mu \mid \alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}_{>0} \right\}$$

と表される領域を $(\{u_\mu\}_\mu$ で張られる) Cone と呼ぶ。

このとき一般に次が成立する。

定理 3. (新谷) K を代数体、 O_K を整数環、 $O_{K,+}^\times$ を総正な単数のなす群とする。このとき、 $\rho(K)$ の元が張るある有限個の *Cone* の合併

$$\mathbb{D} = \coprod_j \Lambda_j$$

であって

$$\mathbb{R}_+^n = \coprod_{\epsilon \in O_{K,+}^\times} \rho(\epsilon) \mathbb{D}$$

となるものが存在する。

各 $\Lambda_j \cap \rho(O_K)$ の寄与は有限個の新谷ゼータ関数の和になることは難しくない。この定理によって、新谷氏は代数体の Hecke L 関数を新谷ゼータ関数で表した。

2.3. 新谷公式. 新谷氏はまた次の形の定理を証明した。

$$\frac{\partial}{\partial s} \zeta_{n,r}(s, A, x)|_{s=0} = \sum_{\nu} \frac{\partial}{\partial s} \zeta_{1,r}(s, A_{\nu}, x)|_{s=0} + R$$

ここで $A_{\nu} = (a_{\nu\mu})_{1 \leq \mu \leq r}$ であり、分解の各項は多重 Γ 関数の対数になっている。また、 R は A, x の成分の有理式の対数を使って書かれる elementary term である。新谷氏はこの定理を通じて総実体の部分ゼータ関数の一階微分値を多重 Γ 関数の特殊値 (と R に由来する補正項) で表し、それが類体の単数になることを予想した。

3. 記号

以下では次の記号を用いる。

$$e(z) = e^{2\pi iz}$$

$$\Gamma_{\mathbb{C}}(s) = 2(2\pi)^{-s} \Gamma(s)$$

$$\Gamma_{\mathbb{R}}(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$$

4. 新谷 L 関数の定義

まず新谷 L 関数を定義する。

定義 4. (新谷 L 関数の級数表示)

$s = (s_{\nu})_{1 \leq \nu \leq r} \in \mathbb{C}^r, \operatorname{Re}(s_1 + \cdots + s_r) > r$, $A = (a_{\nu\mu})_{1 \leq \nu, \mu \leq r} \in M_r(\mathbb{R}), a_{\nu\mu} > 0$, $x = (x_{\nu})_{1 \leq \nu \leq r}, y = (y_{\mu})_{1 \leq \mu \leq r} \in \mathbb{R}^r$ $0 < x_{\nu}, y_{\mu} < 1$, に対して order r の新谷 L 関数 $L(s, A, x, y)$ を次で定義する。

$$\begin{aligned} L(s, A, x, y) &= \sum_{0 \leq m_1, m_2, \dots, m_r} \frac{e^{2\pi i(m_1 y_1 + \cdots + m_r y_r)}}{\prod_{1 \leq \nu \leq r} (\sum_{1 \leq \mu \leq r} a_{\nu\mu} (x_{\mu} + m_{\mu}))^{s_{\nu}}} \\ &= \sum_{0 \leq m} \frac{e(my)}{(A(x+m))^s}, \end{aligned}$$

ここで、 $e(z) = e^{2\pi iz}$ 、 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$, $s = (s_1, \dots, s_r)$ に対して $\lambda^s = \lambda_1^{s_1} \cdots \lambda_r^{s_r}$ 、 $my = m_1 y_1 + \cdots + m_r y_r$ である。

後に説明するが、新谷 L 関数は s の関数として $\mathbb{C}^r$ 全体に正則関数として解析接続できる。

例 5. ($r = 1$ の場合)
 $r = 1$ のときは

$$\begin{aligned} L(s, A, x, y) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e(y m)}{(a(x+m))^s} \\ &= \frac{1}{a^s} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e(y m)}{(x+m)^s} \end{aligned}$$

となり、これは Hurwitz-Lerch zeta 関数として知られているものである。また、 $x = 1/2, y = 1/2, A = 2$ とすると

$$\begin{aligned} L(s, (2), (\frac{1}{2}), (\frac{1}{2})) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e(\frac{m}{2})}{(1+2m)^s} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e(\frac{m}{2})}{(1+2m)^s} \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots \end{aligned}$$

となり、有理数体 $\mathbb{Q}$ の導手 4 の Dirichlet 指標に関する Dirichlet L 関数に一致する。一般の Dirichlet L 関数の場合も新谷 L 関数を複数次し合わせて表すことができる。

$$\begin{aligned} &e(\frac{1}{8})L(s, (2), (\frac{1}{2}), (\frac{1}{4})) + e(\frac{7}{8})L(s, (2), (\frac{1}{2}), (\frac{3}{4})) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e(\frac{1+2m}{8}) + e(-\frac{1+2m}{8})}{(1+2m)^s} \\ &= (e(\frac{1}{8}) + e(\frac{7}{8}))(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \frac{1}{15} + \cdots) \end{aligned}$$

次に $r = 2$ の場合を考える

例 6. $r = 2$ の場合、新谷 L 関数は次のようになる。

$$\begin{aligned} &L((s_1, s_2), \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, (x_1, x_2), (y_1, y_2)) \\ &= \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \frac{e(m_1 y_1 + m_2 y_2)}{(a_{11}(x_1 + m_1) + a_{12}(x_2 + m_2))^{s_1} ((a_{21}(x_1 + m_1) + a_{22}(x_2 + m_2))^{s_2}} \end{aligned}$$

order 2 の新谷 L 関数を用いて実二次体の Hecke L 関数を表すことが出来る。 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ の Hecke 指標を $\chi = \chi_{\infty} \chi_f$ とする。ただし χ_{∞} は無限素点での成分、 χ_f は有限素点での成分とする。いま例えば

$$\chi_f(a) = \begin{cases} 1 & a \equiv 1 \\ -1 & a \equiv 1 + \sqrt{2} \pmod{\{2\}} \\ 0 & a \equiv 0, \sqrt{2} \end{cases}$$

で定まる mod 2 の指標 χ を考える。このとき Hecke L 関数 $L_K(s, \chi)$ は次のように書ける。 $N : K \rightarrow \mathbb{Q}_+$ をノルムとする

$$\begin{aligned} L_K(s, \chi) &= \sum_{m_1} \sum_{m_2} \frac{e\left(\frac{m_1+m_2}{2}\right)}{N((2+\sqrt{2})(m_1+\frac{1}{4})+(2-\sqrt{2})(m_2+\frac{1}{4}))^s} \\ &\quad + \sum_{m_1} \sum_{m_2} \frac{e\left(\frac{m_1+m_2}{2}\right)}{N((2+\sqrt{2})(m_1+\frac{3}{4})+(2-\sqrt{2})(m_2+\frac{3}{4}))^s} \\ &= L((s, s), \begin{pmatrix} 2+\sqrt{2} & 2-\sqrt{2} \\ 2-\sqrt{2} & 2+\sqrt{2} \end{pmatrix}, (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})) \\ &\quad + L((s, s), \begin{pmatrix} 2+\sqrt{2} & 2-\sqrt{2} \\ 2-\sqrt{2} & 2+\sqrt{2} \end{pmatrix}, (\frac{3}{4}, \frac{3}{4}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})) \end{aligned}$$

となる。

5. 新谷 L 関数の積分表示

$$F(t, x, y) = \prod_{1 \leq \nu \leq r} \frac{e(it_\nu x_\nu)}{(1 - e(y_\nu + it_\nu))}$$

とする。公式

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e(izt) t^s \frac{dt}{t} &= (2\pi z)^{-s} \Gamma(s) \\ &= z^{-s} \frac{\Gamma_{\mathbb{C}}(s)}{2} \end{aligned}$$

を用いると、新谷 L 関数が次のような積分表示を持つことが分かる。

$$L(s, A, x, y) = \frac{2^r}{\Gamma_{\mathbb{C}}(s_1) \cdots \Gamma_{\mathbb{C}}(s_r)} \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty F(tA, x, y) t^s \frac{dt_1}{t_1} \cdots \frac{dt_r}{t_r}$$

ここで

$$F(t, x, y) = \prod_{1 \leq \nu \leq r} \frac{e(it_\nu x_\nu)}{(1 - e(y_\nu + it_\nu))}$$

である。この定義により A の定義域を $A \in GL_r(\mathbb{R})$ に伸ばすことが出来る。

定義 7. 一般の $A \in GL_r(\mathbb{R})$ に対しても同様に新谷 L 関数を

$$L(s, A, x, y) = \frac{2^r}{\Gamma_{\mathbb{C}}(s_1) \cdots \Gamma_{\mathbb{C}}(s_r)} \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty F(tA, x, y) t^s \frac{dt_1}{t_1} \cdots \frac{dt_r}{t_r}$$

で定義する。

一般に A の成分が定符号でない場合には $L(s, A, x, y)$ は級数表示を持たない。また定義式の積分を、 $+\infty$ から実軸を原点付近まで走り、原点を反時計回りに一周して $+\infty$ まで帰ってゆく経路 L によって、

$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty F(tA, x, y) t^s \frac{dt_1}{t_1} \cdots \frac{dt_r}{t_r} = \frac{1}{(e(s_1) - 1) \cdots (e(s_r) - 1)} \int_L \cdots \int_L F(tA, x, y) t^s \frac{dt_1}{t_1} \cdots \frac{dt_r}{t_r}$$

と書き直せば、 $L(s, A, x, y)$ の解析接続を得る。

6. 正規新谷 L 関数

次に新谷 L 関数を変形した正規新谷 L 関数を導入する。

定義 8. $\chi: \{1, \dots, r\} \rightarrow \{0, 1\}$ を任意の写像とする。正規新谷 L 関数 $L_\chi(s, A, x, y)$ を

$$\begin{aligned} L_\chi(s, A, x, y) &= \frac{1}{\Gamma_{\mathbb{C}}(s_1) \cdots \Gamma_{\mathbb{C}}(s_r)} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} F(tA, x, y) |t|_\chi^s \frac{dt_1}{t_1} \cdots \frac{dt_r}{t_r} \\ &= 2^{-r} \sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^r} \sigma^{1-\chi} L(s, \sigma A, x, y) \end{aligned}$$

で定義する。ここで

$$\begin{aligned} |t|_\chi^s &= \prod_{1 \leq \nu \leq r} \operatorname{sgn}(t_\nu)^{\chi(\nu)} |t_\nu|^{s_\nu} \\ \sigma^{1-\chi} &= \prod_{1 \leq \nu \leq r} \sigma_\nu^{1-\chi(\nu)} \\ \sigma A &= (\sigma_\nu a_{\nu\mu})_{1 \leq \nu, \mu \leq r} \end{aligned}$$

である。この χ を (正規新谷 L 関数の) 符号型 (parity type) と呼ぶことにする。以下で χ を $(\chi(1), \dots, \chi(r))$ というベクトルとみなしたり、 $(\overbrace{0, \dots, 0}^k, \overbrace{1, \dots, 1}^{r-k})$ を簡単に $(0^k 1^{r-k})$ などと表記したりする。

例 9. 例えば $r = 2$ のとき正規新谷 L 関数は次のような新谷 L 関数の和になる。

$$\begin{aligned} &L_\chi(s, A, x, y) \\ &= L(s, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, x, y) + (-1)^{1-\chi(1)} L(s, \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, x, y) \\ &\quad + (-1)^{1-\chi(2)} L(s, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix}, x, y) + (-1)^{1-\chi(1)+1-\chi(2)} L(s, \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix}, x, y) \end{aligned}$$

次に述べるように正規新谷 L 関数はふつうの新谷 L 関数よりも良い性質をもっている。

7. 正規新谷 L 関数の性質 (関数等式)

正規新谷 L 関数は次の関数等式を満たす。

定理 10. 正規新谷 L 関数の完備化を次で定義する。

$$\hat{L}_\chi(s, A, x, y) = |\det(A)|^{\frac{1}{2}} \prod_{1 \leq \nu \leq r} \Gamma_{\mathbb{R}}(\chi(\nu) + s_\nu) L_\chi(s, A, x, y).$$

このとき、

$$\hat{L}_\chi(s, A, x, y) = i_\chi e(-xy) \hat{L}_\chi(1-s, A^*, y, 1-x)$$

が成立する。

8. 正規新谷 L 関数の整数点での TAILOR 展開

正規新谷 L 関数の関数等式より $s_j \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ について $s_j \equiv \chi(j) \pmod{2\mathbb{Z}}$ は $L_\chi(s, A, x, y)$ の零点になっていることが分かる。さらに次が成立する。

定理 11. 符号型が χ の正規新谷 L 関数は $s = -m$ において次の Taylor 展開を持つ

$$L_\chi(s, A, x, y) = \prod_{j \in J} (s_j + m_j) \times (e(-xy) D_y^m \{e(xy) S_{|J|}(A_J, x, y)\} + O(s + m))$$

ここで、 $J = \{j \mid m_j = \chi(j) \bmod 2\}$ 、 $A_J = (a_{ji})_{j \in J}$ 、 $t_J = (t_j)_{j \in J}$ 、 $D_y = \frac{1}{2\pi i} \left(\sum a_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial y_\nu} \right)_{1 \leq \mu \leq r}$ 。
また $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq r}$ に対し

$$S_k(A, x, y) = \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}}^k F(tA, x, y) \frac{dt_1}{t_1} \cdots \frac{dt_k}{t_k}$$

と定める。

Taylor 展開の先頭項 $e(-xy) D_y^m \{e(xy) S_{|J|}(A_J, x, y)\}$ は

$$\int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}}^{|J|} \left[\left(-\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \right)^m F(tA, x, y) \right]_{t_j=0 \text{ for } j \notin J} \frac{dt_J}{t_J}$$

と表すことも出来る。特に $s = 0$ では、

$$L_\chi(s, A, x, y) = \prod_{j \in J} s_j \times (S_{|J|}(A_J, x, y) + O(s))$$

であって、先頭項の係数は A の内の kr 個の成分にしかよらないことも見て取れる。
またランク 1 の Stark 予想と結びつく $k = 1$ については、 $S_1(A, x, y)$ は多重三角関数の類似物になっている。

9. 新谷公式

$L((s, \dots, s), A, x, y)$ の $s = 0$ での微分値は和の形に分解することが出来る。 $L((s, \dots, s), A, x, y)$ の $s = 0$ での微分値とはつまり、 $L((s_1, \dots, s_r), A, x, y)$ の Taylor 展開の一次の係数の和である。よって次の式が成り立つ。

$$\frac{d}{ds} L((s, \dots, s), A, x, y)|_{s=0} = \sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial s_{\mu}} L((0, \dots, s_{\mu}, \dots, 0), A, x, y)|_{s=0}$$

高階微分の場合も同様である。例えば 2 階微分の場合

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{ds} \right)^2 L((s, \dots, s), A, x, y)|_{s=0} &= 2 \sum_{1 \leq \nu < \mu \leq r} \frac{\partial}{\partial s_{\nu}} \frac{\partial}{\partial s_{\mu}} L((0, \dots, 0, s_{\nu}, 0, \dots, 0, s_{\mu}, 0, \dots, 0), A, x, y)|_{s=0} \\ &\quad + \sum_{1 \leq \mu \leq r} \left(\frac{\partial}{\partial s_{\mu}} \right)^2 L((0, \dots, s_{\mu}, \dots, 0), A, x, y)|_{s=0} \end{aligned}$$

となる。新谷ゼータ関数の場合は $s_1 + \cdots + s_r = 0$ に極を持つため、同じ式は成立せず誤差項/修正項が発生する。一階微分の場合は誤差項は elementary に書くことができる (新谷公式)。2 階微分以上の場合も広瀬氏による研究があるが、この場合誤差項は複雑な積分になり elementary にならないと思われる。新谷公式によって総実体の部分ゼータ関数の一階微分値を分解すると、本質的に一成分にのみ Stark 単数の対数が現れ、他の成分は基礎体の元の対数などで書いてしまうことが知られている。一方正規新谷 L 関数を使うと本質的な一成分以外はすべて消えてしまうことが Taylor 展開の形から直ちに分かる。

10. 基本領域と Cone 分解

代数体 K の Hecke L 関数は 0 以外の整イデアルを渡る和として定義される。例えば単項イデアルに対しては、その生成元を持ってくることによって、整イデアルと K の元を対応付けることが出来る。ただし、生成元のとり方には単数倍分だけの自由度があるので、 $O_K^\times$ の作用による基本領域を考える必要が出てくる。また新谷 L 関数を級数で表示したときは Cone 領域を渡る和となっているので、基本領域を Cone の和として表す必要がある。このような背景のもと、いくつかの言葉を定義する。前述の通り一次独立なベクトル、 $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^n$ に対し $v = (v_\mu)_{1 \leq \mu \leq r}$ で張られる Cone 領域を

$$\Lambda(v_1, \dots, v_r) = \left\{ \sum_{\mu} t_{\mu} v_{\mu} \mid 0 < t_{\mu} \right\}$$

と表そう。各 j について $\Lambda(v_1, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_r)$ を $\Lambda(v_1, \dots, v_r)$ の境界と呼ぶ。

所見 12. 新谷ゼータ関数で Hecke L 関数を表す際には境界に由来する次元の低い Cone の寄与を考える必要があった。しかし今後新谷 L 関数で Hecke L 関数を表す際には境界からの寄与を 0 にすることができる。つまりこの定義では便宜的に Cone 領域から境界部分 $t_{\mu} = 0$ を外しているが、境界部分を含めるかどうかは以降の議論に関係しない。

11. 格子上の指標

より一般的な級数

$$\sum_{v \in \Lambda} \frac{\Phi(v)}{v_1^{s_1} \cdots v_r^{s_r}}$$

を扱うために、格子上の指標というものを導入する。 $\mathbb{R}^r$ の格子とは $\mathbb{R}$ 上独立な r 個の生成元から生成される $\mathbb{R}^r$ の部分 $\mathbb{Z}$ 加群のことである。

定義 13. $\Phi : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{C}$ が格子上の指標であるとは、 $\mathbb{R}^r$ の格子 $\mathbb{L}' \subset \mathbb{L} \subset \mathbb{R}^r$ が存在して、次の二条件を満たすことをいう。

- (1) 任意の $v \notin \mathbb{L}$ に対して $\Phi(v) = 0$
- (2) 任意の $w \in \mathbb{L}', v \in \mathbb{L}$ に対して、 $\Phi(v + w) = \Phi(v)$

このとき $\mathbb{L}$ を Φ の台、 $\mathbb{L}'$ を Φ の周期と呼ぶ。 $\mathbb{L}$ を台、 $\mathbb{L}'$ を周期とする指標の全体を $\mathfrak{X}(\mathbb{L}/\mathbb{L}')$ で表す。次に格子の正則性を定義する。簡単に言えば、 Φ が $u_1, \dots, u_r$ に対して正則であるとは、

$$\sum_{v \in \Lambda(u)} \frac{\Phi(v)}{v_1^{s_1} \cdots v_r^{s_r}}$$

がそのまま新谷 L 関数の和で表せるための条件である。

定義 14. $u_1, \dots, u_r \in \mathbb{L}$ とする。 $\Phi \in \mathfrak{X}(\mathbb{L}/\mathbb{L}')$ が $u = (u_1, \dots, u_r)$ に対して正則であるとは次の二条件を満たすことである。

- (1) 任意の $v \in \mathbb{R}^r$ に対して、 $v = \sum_{\mu} c_{\mu} u_{\mu}$ と表したとき、いずれかの $c_{\mu} \in \mathbb{Z}$ のとき

$$\Phi(v) = 0$$

- (2) 任意の $v \in \mathbb{R}^r$ と添え字 $1 \leq \mu \leq r$ と、 $mu_{\mu} \in \mathbb{L}'$ となる正整数 m に対して、

$$\sum_{k=0}^{m-1} \Phi(v + ku_{\mu}) = 0$$

定義 15. $x = (x_\mu) \in \mathbb{Q}^r, y = (y_\mu) \in \mathbb{Q}^r, 0 < x_\mu, y_\mu < 1$ と、 $u = (u_\mu) \in \mathbb{R}^r$ に対して、 $\Phi_u[x, y] \in \mathfrak{X}(\mathbb{L}/\mathbb{L}')$ を

$$\Phi_u[x, y](v) = \begin{cases} e(k_1 y_1 + \cdots + k_r y_r) & \exists k \in \mathbb{Z}^r, v = \sum_\mu u_\mu (x_\mu + k_\mu) \\ 0 & v \text{ otherwise} \end{cases}$$

で定める。但し $\mathbb{L}, \mathbb{L}'$ は x, y に合わせ適宜取るものとする。

$\Phi_u[x, y]$ は $L(s, A, x, y)$ と次のように結びついている。

$$L(s, A = (u_1, \dots, u_r), x, y) = \sum_{v \in \Lambda(u)} \frac{\Phi_u[x, y](v)}{v_1^{s_1} \cdots v_r^{s_r}}.$$

$\Phi_u[x, y]$ は u に対して正則な指標であるが、逆に正則な指標は $\Phi_u[x, y]$ の和となることもそれほど難しくない。すなわち次の命題が成り立つ。

命題 16. Φ が u に対して正則となる時、 $(x_j)_{j \in J}, (y_j)_{j \in J}, (c_j)_{j \in J}, \#J < \infty$ が存在して、

$$\Phi = \sum_{j \in J} c_j \Phi_u[x_j, y_j]$$

12. 格子上の指標の新谷 L 関数

格子上の一般の正則な指標に対する新谷 L 関数を定義しよう。

定義 17. Φ が u に対して正則となる時、格子上の指標の新谷 L 関数 $L(s, \Phi, \Lambda(u))$ を

$$L(s, \Phi, \Lambda(u)) = \sum_{j \in J} c_j L(s, A, x_j, y_j)$$

で定義する。ただしここで

$$A = ((u_\mu)_\nu)_{\nu\mu} = (u_1, \dots, u_r)$$

$$\Phi = \sum_{j \in J} c_j \Phi_u[x_j, y_j]$$

とする。 $L_\chi(s, \Phi, \Lambda(u)), \hat{L}_\chi(s, \Phi, \Lambda(u))$ も同様に

$$L_\chi(s, \Phi, \Lambda(u)) = \sum_{j \in J} c_j L_\chi(s, A, x_j, y_j)$$

$$\hat{L}_\chi(s, \Phi, \Lambda(u)) = \sum_{j \in J} c_j \hat{L}_\chi(s, A, x_j, y_j)$$

で定義する。

$$L(s, \Phi, \Lambda) = \sum_{v \in \Lambda} \frac{\Phi(v)}{v_1^{s_1} \cdots v_n^{s_n}}$$

ともかける。また Φ が $\{\Lambda_j\}_j$ に対して正則なとき $\mathbb{D} = \coprod_j \Lambda_j$ に対して正則といい

$$L(s, \Phi, \mathbb{D}) = \sum_j L(s, \Phi, \Lambda_j)$$

と定める。

13. HECKE L 関数を新谷 L 関数で書くための方針 (狭義類数が 1 の場合)

K の狭義類数が 1 (K の任意のイデアルが総正な元によって生成される単項イデアル) の場合に Hecke L 関数を新谷 L 関数で書くための方法を考える。Hecke L 関数は次のような形をしている。

$$\begin{aligned} L_K(s, \chi) &= \sum_{a \in O_K^+ / E} \frac{\chi(a)}{N(a)^s} \\ &= \sum_{\mu(a) \in \mathbb{D}} \frac{\chi(a)}{N(a)^s} \\ &= \sum_j \sum_{\mu(a) \in \Lambda_j} \frac{\chi(a)}{N(a)^s} \end{aligned}$$

ここで、 Φ を

$$\Phi(v) = \begin{cases} \chi(x) & \exists x \in O_K, v = \rho(x) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定める。 Φ が (生成元をうまくとったときに) $\mathbb{D}$ に対して正則ならば、

$$L_K(s, \chi) = L((s, \dots, s), \Phi, \mathbb{D})$$

と書ける。一般には Φ が正則になるような Cone たちの生成元が取れるとは限らない (取れる場合もある)。

14. HECKE L 関数を新谷 L 関数で書くための方針 (類数が一般の場合)

K の狭義イデアル類群を $Cl^+ = (c_\mu)_\mu$ とする。 Cl^+ の位数が 1 とは限らない場合を考える。 b_μ を c_μ^{-1} に属する K の整イデアルとすして Hecke L 関数を変形すると、

$$\begin{aligned} L_K(s, \chi) &= \sum_{a: \text{ideal}} \frac{\chi(a)}{N(a)^s} \\ &= \sum_{\mu} \sum_{a: \text{integral ideal}} \frac{\chi(a)}{N(a)^s} \\ &= \sum_{\mu} \left(\frac{\chi(b_\mu)}{N(b_\mu)^s} \right)^{-1} \sum_{a \in \mu} \frac{\chi(ab_\mu)}{N(ab_\mu)^s} \\ &= \sum_{\mu} \left(\frac{\chi(b_\mu)}{N(b_\mu)^s} \right)^{-1} \sum_{a \in b_\mu / E} \frac{\chi(a)}{N(a)^s} \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\Phi_{\chi, b}(v) = \begin{cases} \chi(x) & \exists x \in b, \rho(x) = v \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定める。 $\Phi_{\chi, b}$ が $\mathbb{D}$ に対して正則ならば

$$L_K(s, \chi) = \sum_{\mu} \left(\frac{\chi(b_\mu)}{N(b_\mu)^s} \right)^{-1} L((s, \dots, s), \Phi_{\chi, b}, \mathbb{D})$$

と書ける。

15. Φ を正則にするための方法 (条件 1)

$p \in O_K^+$ で、 $N(p) = P$ が素数であるとする。基本領域として、 $\mathbb{D}$ の代わりに $\rho(p)\mathbb{D}$ を用い、 χ の代わりに、

$$\chi'(y) = \begin{cases} 0 & y \in pO_K \\ \chi(y) & y \text{ otherwise} \end{cases}$$

を用いる。このとき、 p を適切に選べば、条件 1 は満たされる。より正確には次が成立する。

定理 18. Λ を Cone, Λ' を Λ の境界のひとつとする。有限個の p を除いて、次の条件を満たす。

$y \in O_K^+$ で、 $\rho(y) \in \rho(p)\Lambda'$ となるとき、 $y \in pO_K$ 。

Proof. $\Lambda = \Lambda(\rho(x_1), \dots, \rho(x_n)), \Lambda' = \Lambda(\rho(x_1), \dots, \rho(x_{n-1})), (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \in O_K^n$ とする。ほとんど全ての p に対し

$$\#(O_K/x_1\mathbb{Z} + \dots + x_n\mathbb{Z})$$

が $N(p)$ と互いに素なので、それを仮定する。また $y = p(b_1x_1 + \dots + b_{n-1}x_{n-1})/N(p) \in O_K$ とする ($b_1, \dots, b_n \in \mathbb{Q}$)。このとき、 $y \in pO_K$ を示せばよい。 $y \in O_K$ より

$$b_1x_1 + \dots + b_{n-1}x_{n-1} \in \frac{N(p)}{p}O_K.$$

さらに $K/\mathbb{Q}$ の Galois Clousure を K' とし、 K の K' への埋め込みを $\rho_1, \dots, \rho_n$ とすると

$$b_1\rho_j(x_1) + \dots + b_{n-1}\rho_j(x_{n-1}) \in \frac{N(p)}{\rho_j(p)}O_K.$$

よって、 $j = 2, \dots, n-1$ に対して

$$b_1\rho_j(x_1) + \dots + b_{n-1}\rho_j(x_{n-1}) \in \rho_1(p)O_K.$$

よって行列

$$\begin{pmatrix} \rho_2(x_1) & \cdots & \rho_2(x_{n-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_n(x_1) & \cdots & \rho_n(x_{n-1}) \end{pmatrix}$$

が mod $\rho(p)$ で可逆なら $b_1, \dots, b_{n-1} \equiv 0 \pmod{N(Q)}$ となり、 $y \in pO_K$ となる。よって、

$$\det(\rho_j(x_i))_{i=1, j=2}^{n-1, n} \neq 0$$

を示せばよい。 $\det(\rho_j(x_i))_{i=1, j=2}^{n-1, n} \neq 0$ とすると、

$$\det(\rho_j(x_i))_{i=1, j=1}^{n, n} = 0$$

となるが、これは $x_1, \dots, x_n$ が $\mathbb{Q}$ 上一次独立であることに反する。 $\square$

所見 19. χ を χ' に取り替えた影響は、 $L_K(s, \chi') = L_K(s, \chi) \times (1 - \chi(p)P^{-s})$ となるが、この操作によって、 $L_K(s, \chi')$ の $s = 0$ での零点の位数が $L_K(s, \chi)$ より 1 大きくなる可能性がある。 χ が O_K^+ 上非自明な場合は、うまく p をとれば、 $\chi(p) \neq 1$ とできる。 χ が O_K^+ 上自明な場合でも、 χ が自明でなければ、 $N(p) = P$ が素数となるような一般的な素イデアル p を何倍かして総正かつ単項にすれば、同様の議論が行える。

16. Φ を正則にするための方法 (条件 2)

次に、条件 2 を満たすための変形を考える。 $\Lambda = \Lambda(\rho(x))$ を Cone として、 $\rho(x)$ は χ の周期であるとする。 $q \in O_K^+$ で、 $N(q) = Q$ が素数であり、 q は x_μ を割らないとする。このとき、

$$\chi'(y) = \begin{cases} (1-Q)\chi(y) & y \in qO_K \\ \chi(y) & \text{otherwise} \end{cases}$$

とすると、 χ' から作る Φ は条件を満たす。実際、任意の添え字 μ に対して、

$$\sum_{k=0}^{Q-1} \chi'(y + kx_\mu) = \chi(y) \sum_{k=0}^{Q-1} \frac{\chi'(y + kx_\mu)}{\chi(y)} = 0$$

となる。 $(k = 0, \dots, Q-1)$ の中で、 $y + kx_\mu \in qO_K$ となる k が丁度ひとつ存在するため

17. Φ を正則にする方法 (まとめ)

Hecke L 関数 $L_K(s, \chi)$ はそのままでは新谷 L 関数でかける形とは限らない。しかしノルムが素数であるような二つの素イデアル p, q を適切に選んで、 $L_K(s, \chi') = L_K(s, \chi) \times (1 - \chi(p)P^{-s})(1 - \chi(q)Q^{1-s})$ が $p\mathbb{D}$ に対して正則になるようにできる。

18. HECKE L 関数を正規新谷 L 関数で表す

K を r 次総実代数体、 $E = O_{K+}^\times$ とする。ここでは、 K の Hecke L 関数を正規新谷 L 関数で表す方法を考える。 $\rho(K)$ を base とするような r 次元 Cone の $\mathbb{Z}$ 係数形式和全体に次のような同値関係を入れる。

- (1) Λ の特性関数を f_Λ としたとき、 $\sum_j c_j f_{\Lambda_j}$ が境界を無視して (測度 0 の集合を無視して) 0 ならば $\sum_j c_j \Lambda_j \sim 0$

このような同値関係で割った $\mathbb{Z}$ 加群を $\mathbb{M}$ で表す。この同値関係が新谷 L 関数の定義と compatible、つまり

$$\sum_j c_j \Lambda_j \sim 0 \Rightarrow \sum_j c_j L(s, \Phi, \Lambda_j) = 0$$

となることに注意する。以後この同値関係で常に割って考える。また、

$$\{\epsilon\Lambda - \Lambda \mid \epsilon \in E, \Lambda : \text{Cone}\}$$

で生成される $\mathbb{M}$ の部分 $\mathbb{Z}$ 加群を $\mathbb{I}$ とする。 $g = (g_\mu)_\mu \in \{\pm 1\}^r$ に対し $\mathbb{R}_g^r = \prod_\mu (g_\mu \mathbb{R}_+)$ とおく。このとき次の主張が成立する。

命題 20. $\mathbb{D}$ を $\mathbb{R}_+^r/E$ の基本領域、 $\mathbb{D}(g)$ を $\mathbb{R}_g^r/E$ の基本領域とすると、 $\mathbb{D}(g) - (\prod_\mu g_\mu)\mathbb{D} \in \mathbb{I}$

また、さらに Φ が E で不変なとき

$$L((s, \dots, s), \Phi, \epsilon\Lambda) - L((s, \dots, s), \Phi, \Lambda) = (\epsilon_1^s \epsilon_2^s \cdots \epsilon_r^s - 1) \times L((s, \dots, s), \Phi, \Lambda) = 0$$

より

$$L((s, \dots, s), \Phi, \mathbb{D}(g)) = L((s, \dots, s), \Phi, (\prod_\mu g_\mu)\mathbb{D})$$

となる。この事実を用いて Hecke L 関数を正規新谷 L 関数で表す。

狭義イデアル類群の代わりに、単にイデアル類群を使う。 $cl(K) = (C_\mu)_\mu$ とする。 b_μ を $b_\mu \in C_\mu^{-1}$ となる整イデアルとする。

$$\begin{aligned}
L_K(s, \chi) &= \sum_{\mu} \sum_{a \in C_\mu} \frac{\chi(a)}{N(a)^s} \\
&= \sum_{\mu} \left(\frac{\chi(b_\mu)}{N(b_\mu)^s} \right)^{-1} \sum_a \frac{\chi(ab_\mu)}{N(ab_\mu)^s} \\
&= \sum_{\mu} \left(\frac{\chi(b_\mu)}{N(b_\mu)^s} \right)^{-1} \sum_{x \in (b_\mu / O_K^\times)} \frac{\chi(x)}{N(x)^s} \\
&= \frac{1}{\#(O_K^\times / E)} \sum_{\mu} \left(\frac{\chi(b_\mu)}{N(b_\mu)^s} \right)^{-1} \sum_g \chi_\infty(g) \sum_{\substack{x \in (b_\mu / E) \\ \rho(x) \in \mathbb{R}_g^r}} \frac{\chi_f(x)}{N(x)^s}
\end{aligned}$$

となるので、ここで

$$F_\mu = \sum_g \chi_\infty(g) \sum_{\substack{x \in (b_\mu / E) \\ \rho(x) \in \mathbb{R}_g^r}} \frac{\chi_f(x)}{N(x)^s}$$

とおき、 F_μ を正規新谷 L 関数で表す。

$$\begin{aligned}
F_\mu &= \sum_g \chi_\infty(g) \sum_{\substack{x \in (b_\mu / E) \\ \rho(x) \in \mathbb{R}_g^r}} \frac{\chi_f(x)}{N(x)^s} \\
&= \sum_{g \in \{\pm 1\}^r} \chi_\infty(g) \sum_{\substack{x \in b_\mu \\ \rho(x) \in \mathbb{D}(g)}} \chi_f(x) \prod_{\mu} (g_\mu \rho_\mu(x))^{-s}
\end{aligned}$$

ここで $v = (g_\mu \rho_\mu(x))_\mu$ と置くと、

$$\begin{aligned}
F_\mu &= \sum_{g \in \{\pm 1\}^r} \chi_\infty(g) \sum_{v \in \mathbb{D}(g)_g} \Phi_{\chi_f, b, g}(v) \prod_{\mu} v_\mu^{-s} \\
&= \sum_{g \in \{\pm 1\}^r} \chi_\infty(g) L((s, \dots, s), \Phi_{\chi_f, b, g}, \mathbb{D}(g)_g)
\end{aligned}$$

ここで $\chi_R : \{1, \dots, r\} \rightarrow \{0, 1\}$ を

$$\chi_\infty(g) = \prod_{\mu} g_\mu^{\chi_R(\mu)}$$

となるようにとり、さらに、 $\mathbb{D}(g) - (\prod_{\mu} g_\mu) \mathbb{D} \in \mathbb{I}$ を用いると

$$\begin{aligned}
F_\mu &= \sum_{g \in \{\pm 1\}^r} g^{1-\chi_R} L((s, \dots, s), \Phi_{\chi_f, b, g}, \mathbb{D}(g)) \\
&= 2^r L_{\chi_R}((s, \dots, s), \Phi_{\chi_f, b}, \mathbb{D}) \\
L_K(s, \chi) &= \frac{2^r}{\#(O_K^\times / E)} \sum_{\mu} \left(\frac{\chi(b_\mu)}{N(b_\mu)^s} \right)^{-1} L_{\chi_R}((s, \dots, s), \Phi_{\chi_f, b}, \mathbb{D})
\end{aligned}$$

となる。

19. 新谷 L 関数の複素化

新谷 L 関数の条件において、 $a_{\nu\mu} > 0$ の条件を $Re(a_{\nu\mu}) > 0$ に変えても、同様に新谷 L を定義できる。

定義 21. $s = (s_\nu)_{1 \leq \nu \leq r} \in \mathbb{C}^r, Re(s_1 + \cdots + s_r) > r, A = (a_{\nu\mu})_{1 \leq \nu, \mu \leq r} \in M_r(\mathbb{C}), Re(a_{\nu\mu}) > 0, x = (x_\nu)_{1 \leq \nu \leq r}, y = (y_\mu)_{1 \leq \mu \leq r} \in \mathbb{R}^r, 0 < x_\nu, y_\mu < 1$, に対して order r の新谷 L 関数 $L(s, A, x, y)$ を次で定義する。

$$\begin{aligned} L(s, A, x, y) &= \sum_{0 \leq m_1, m_2, \dots, m_r} \frac{e^{2\pi i(m_1 y_1 + \cdots + m_r y_r)}}{\prod_{1 \leq \nu \leq r} (\sum_{1 \leq \mu \leq r} a_{\nu\mu} (x_\mu + m_\mu))^{s_\nu}} \\ &= \sum_{0 \leq m} \frac{e(my)}{(A(x+m))^s}, \end{aligned}$$

また、実数の場合と同様に積分表示も持ち、 s の関数として、 $\mathbb{C}^r$ 全体に正則関数として解析接続できる。ただし、実の場合と違い、積分表示を用いても、 A の定義域を $Re(a_{\nu\mu}) > 0$ の外に拡張することが出来ない。

20. CONE 分解と回転行列

K の複素素点の個数を r' 個とし K の $\mathbb{C}$ への埋め込み全体を

$$\rho = (\rho_\mu)_\mu$$

で $1 \leq \mu \leq r'$ のとき $\rho_{\mu+r'} = \bar{\rho}_\mu$ となるようにする。最初の $2r'$ 個が複素素点に対応する。総実代数体の場合と同様に基本領域を Cone の和として表す。

$$\begin{aligned} \mathbb{D} &= \prod_j \Lambda_j \\ K_\infty^+ &= \prod_{\epsilon \in E} \epsilon \mathbb{D} \end{aligned}$$

このとき $\Lambda_j = \Lambda(u)$ のとき、 $Re((u_\nu)_\mu) > 0$ とは限らないため、そのままでは

$$L(s, \Phi, \Lambda_j)$$

を定義できない。そのため各 Λ_j に対して回転角と呼ばれる量 $T_j \in \mathbb{R}^r$ を導入して $L(s, \Phi, \Lambda_j, T_j)$ を定義する。まず一般に成分が正の対角行列

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & & & 0 \\ & c_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & c_r \end{pmatrix}$$

に対し、

$$L(s, CA, x, y) = \left(\prod_{\mu} c_\mu^{-s_\mu} \right) L(s, A, x, y)$$

となることに注意する。よって各 $\Lambda_j = \Lambda(u)$ に対して次のような操作を行う。次の条件を満たすように $T_j = (t_\mu)_\mu \in \mathbb{R}$ をとる。

- (1) 任意の $1 \leq \mu \leq r$ と $1 \leq \nu \leq r$ に対して、 $\Re(e(t_\mu) \cdot (u_\nu)_\mu) > 0$
- (2) $1 \leq \mu \leq r'$ に対して $t_{\mu+r'} = -t_\mu$ となり、 $2r' + 1 \leq \mu \leq r$ に対して $t_\mu = 0$ 。

このように $T_j = (t_\mu)_\mu$ をとり、さらに

$$C_j = \begin{pmatrix} e(t_1) & & & 0 \\ & e(t_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e(t_r) \end{pmatrix}$$

とおく。 $C_j \Lambda_j = \Lambda(C_j u_1, \dots, C_j u_r), C_j u_\nu = (e(t_\mu) \cdot (u_\nu)_\mu)_{1 \leq \mu \leq r}$ とすると $C_j u_\nu$ の各成分の実部は正となる。よって $L(s, \Phi, \Lambda_j, T_j)$ を

$$L(s, \Phi, \Lambda_j, T_j) = \prod_{\mu} e\left(\sum_{\mu} t_{\mu} s_{\mu}\right) \times L(s, C_j \Phi, C_j \Lambda_j)$$

で定義する。ここで、 $C_j \Phi$ は $C_j \Phi(C_j v) = \Phi(v)$ となるようにとる。

21. REN と SCZECH の予想 (概略)

複素 3 次体の場合を考える。Stark 予想から得られる値は Stark 単数の絶対値であって、Stark 単数の偏角の情報は抜けている。方向微分を考えることにより、この情報を復元できるというのが、Ren と Sczech の予想の重要な点である。Ren と Sczech によるオリジナルの予想の定式化は新谷ゼータ関数を用いたものであるが、ここでは新谷 L 関数を用いて定式化する。また複素素点をちょうど一つ持つような一般次数の代数体に一般化して定式化する。

22. REN, SCZECH の予想

K を複素素点をただ一つ持つ r 次代数体とする。 K の $\mathbb{C}$ への埋め込み全ての組を

$$\rho = (\rho_\mu)_\mu$$

とし、 ρ_1 と ρ_2 を複素素点に対応する埋め込みとする。 K' を K の狭義イデアル類群に対応する K の拡大体とする。そして、 L を K' を含むような、 K の abel 拡大体とする。 $G = \text{Gal}(L/K), G' = \text{Gal}(K'/K)$ 。そして、群環の元

$$\alpha = \sum_j c_j \sigma_j \in \mathbb{Z}[G]$$

をとってくる。説明を簡単にするために今回は $\sigma_j \in \text{Gal}(L/K')$ となる場合のみを考える。つまり σ_j に対応するイデアル類に属するイデアルは全て総正な元から生成される単項イデアルである。まず、 α の部分ゼータ関数 $\zeta(s, \alpha) = \sum_j c_j \zeta(s, \sigma_j)$ がどのようにして、新谷 L 関数で書けるかを考える。説明の簡単のため、今回は正則にするための補正が必要ないケースのみを考える。各 j に対して、格子上の指標 Φ_j を任意の総正元 v で

$$\Phi_j(v) = \begin{cases} 1 & \exists x \in O_K, \sigma(x) \equiv \sigma_j, \rho(x) = v \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

となるよう定め、

$$\Phi_\alpha = \sum_j c_j \Phi_j$$

とおく。(補正が必要なケースの場合は単に Φ_j の定義を取り替える)。 Φ_α が $\mathbb{D}$ に対して正則ならば、

$$\zeta(s, \alpha) = L((s, \dots, s), \Phi_\alpha, \mathbb{D}, T)$$

となる。ここで

$$X_\mu = \frac{\partial}{\partial s_\mu} L(s, \Phi_\alpha, \mathbb{D}, T)|_{s=0}$$

と置くと、Stark 予想より L の単数 η が存在して、

$$\sum_{\mu} X_\mu = \frac{1}{2} \log |\eta|_{\mathbb{C}}$$

となる。

推論. $(Ren, Szech(r=3))O_K$ の単数 ϵ と有理数 R が存在して、 $\mu \neq 1, 2$ のとき、

$$X_\mu = R \log |\epsilon|_{\mu}$$

となる。また $\mu = 1, 2$ に対して、

$$X_\mu - R \log |\epsilon|_{\mu} = \frac{1}{2} \log \rho_\mu(\eta) \pmod{2\pi i \mathbb{Q}}$$

となる。

所見 22. もし、何らかの意味で '正規化された' 複素新谷 L 関数を用いれば、単に $R = 0$ つまり

$$X_\mu = \begin{cases} \frac{1}{2} \log \rho_\mu(\eta) \pmod{2\pi i \mathbb{Q}} & \mu = 1, 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

となることが期待される。'正規化された' 複素新谷 L 関数 L' と正規化を特に考えずに用いた新谷 L 関数 L の差は $c_j \in \mathbb{Z}$ と $\text{Cone} \Lambda_j$ と総正な単数 $\epsilon(j) \in E$ を用いて L

$$L - L' = \sum_j (\epsilon(j)_1^{s_1} \epsilon(j)_2^{s_2} \cdots \epsilon(j)_r^{s_r} - 1) c_j L((s_1, \dots, s_r), \Phi, \Lambda_j)$$

と表されると思われる。よって

$$\epsilon^R = \prod_j \epsilon(j)^{c_j L((0, \dots, 0), \Phi, \Lambda_j)}$$

と考えれば辻褄があう。よって、予想の前半部分は、例えば複素新谷 L 関数の正規化を構成できれば自動的に証明される部分と思われる。

23. さらなる予想の一般化など

Stark 予想は Hecke L 関数の $s = 0, 1$ での値 (先頭項) について述べたものだが、Stark 予想のさらなる一般化として、正整数 m に対して、Hecke L 関数の $s = m, 1-m$ での値について述べた予想がある (Hecke L 関数に対する Zagier 予想)。この場合特殊値は $\log$ の代わりに Polylog 関数を用いて表される。より厳密には次で定義される関数 F_m を用いて表される。

$$Li_m(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^m}$$

$$F_m(z) = R_m \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{2^k B_k}{k!} \log^k |z| Li_{m-k}(z) \right)$$

ここで R_m は実成分または虚成分で

$$R_m = \begin{cases} Re & m : \text{odd} \\ Im & m : \text{even} \end{cases}$$

と定義している。筆者は、この一般の負の整数点での予想に対しても、同様の refinement が成立すると考えている。例えば、ここで R_m をとる操作は $m = 1$ の場合に $\log(z)$ の代わりに $\log(|z|)$ をとる操作と考えられる。よって、Stark 予想の refinement は $s = 1 - m$ の場合にも適応可能だと思われる。 K が虚二次体で、 L が K のヒルベルト類体の場合に Don Zagier と Herbert Gangl による類似の予想 [1, Chapter 7, The enhanced conjecture] がある。

参考文献

- [1] Don Zagier and Herbert Gangl. *Classical and elliptic polylogarithms and special values of L-series*, The arithmetic and geometry of algebraic cycles Banff, AB, 1998), NATO Science Series C, Mathematical and Physical Sciences, volume 548, pages 561-615; Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.
- [2] T. Ren, R. Sczech, A refinement of Stark's conjecture over complex cubic number fields. J. Number Theory 129 (2009), no. 4, 831-857.
- [3] T. Shintani, On evaluation of zeta functions of totally real algebraic number fields at non positive integers, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 23 (1976), no. 2, 393-417.
- [4] H.Hida, Elementary theory of L-functions and Eisenstein series, London Mathematical Society Student Texts, 1993.