

Stark-Tate の定式化

加塩 朋和 (東京理科大学)

第 20 回整数論サマースクール『Stark 予想』初日 (2012 年 9 月 2 日)

概要.

ここでは Stark-Tate による予想の定式を扱う. 一般の場合の Stark 予想は予想 3 である. また rank 1 abelian Stark conjecture と呼ばれる, 特別な場合の精密化は予想 15 = 予想 $\text{St}(K/k, S, v, w)$ である. なお, 参考文献は本報告集 “Rubin’s integral refinement” の最後に一括して載せてある.

1 類数公式の復習.

代数体 k に対し Dedekind ゼータ関数 $\zeta_k(s)$ は次式で定義される:

$$(1) \quad \zeta_k(s) := \prod_{\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_k} \frac{1}{1 - N\mathfrak{p}^{-s}} = \sum_{\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_k} N\mathfrak{a}^{-s} \quad (\text{Re}(s) > 1)$$

ただし $\mathfrak{p}, \mathfrak{a}$ はそれぞれ整数環 $\mathcal{O}_k$ の素イデアル全体, 整イデアル全体を走る. さらに有理型に解析接続され, $s = 1$ でのみ一位の極を持つことが知られている. Dedekind ゼータ関数の $s = 0$ での Taylor 展開の先頭項を表した次式は **類数公式** などと呼ばれる:

$$(2) \quad \zeta_k(s) = \frac{-h_k R_k}{e_k} s^{r_k-1} + O(s^{r_k}) \quad (s \rightarrow 0).$$

ここで r_k, h_k, R_k, e_k はそれぞれ k の無限素点の個数, 類数, 単数基準 (regulator), $|\mu_k|$ (μ_k は k に含まれる 1 の冪根全体のなす群), である. すなわち

$$(3) \quad \frac{\zeta_k(s) \text{ の } s = 0 \text{ での先頭係数}}{\text{regulator}} = \text{意味深な有理数} = \frac{\text{イデアル類群の情報}}{\mu_k \text{ の情報}}$$

という形になる. Stark 予想 を (不正確だが) 簡単に説明すると,

類数公式を Dedekind ゼータ関数から Artin L 関数へ拡張

したものである.

補足 1. 関数等式により, 類数公式は以下の形でも表せる:

$$\text{Res}_{s=1} \zeta_k(s) = \frac{2^{r_{k,1}} (2\pi)^{r_{k,2}} h_k R_k}{\sqrt{|D_k|} e_k}.$$

ただし $r_{k,1}, r_{k,2}, D_k$ はそれぞれ k の実素点の個数, 複素素点の個数, 判別式, を表す.

補足 2. 代数体の有限次 Galois 拡大 K/k に対し

$$\zeta_k(s) = \prod_{\chi} L(s, \chi)^{\chi(1)}$$

が成立する. ただし χ は $\text{Gal}(K/k)$ の既約指標全体を走り, $L(s, \chi)$ は χ に付随する Artin L 関数を表す. とくに Dedekind ゼータ関数 $\zeta_k(s)$ の先頭係数は, Artin L 関数 $L(s, \chi)$ の先頭係数の積で表される. この積に対応するように, 単数基準 R_k を “分解” したものが, Stark 予想だと見ることもできる.

1.1 単数群の対数的埋め込み, 単数基準と単数定理

単数基準の定義を思い出しておく. 代数体 k の無限素点全体のなす集合を $S_{\infty} = \{\infty_1, \dots, \infty_{r_k}\}$ と置く. 次の準同型を単数群 $\mathcal{O}_k^{\times}$ の **対数的埋め込み** などと呼ぶ:

$$\lambda: \mathcal{O}_k^{\times} \rightarrow \mathbb{R}^{r_k}, \quad \lambda(x) := (\log |x|_{\infty_j})_{1 \leq j \leq r_k}.$$

単数定理 は, この像が位数 $r_k - 1$ の自由 $\mathbb{Z}$ -加群であることを言うので

$$\mathcal{O}_k^{\times} / \mu_k \cong \text{Im}(\lambda) \cong \mathbb{Z}^{r_k-1}$$

となる. とくに生成元 $\varepsilon_i \bmod \mu_k \in \mathcal{O}_k^{\times} / \mu_k$ を取れば

$$\mathcal{O}_k^{\times} = \langle \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{r_k-1} \rangle_{\mathbb{Z}} \times \mu_k$$

と書ける. このとき k の **単数基準** R_k は次式で定義される:

$$(4) \quad R_k := |\det(\log |\varepsilon_i|_{\infty_j})_{1 \leq i, j \leq r_k-1}| = \pm \begin{vmatrix} \log |\varepsilon_1|_{\infty_1} & \log |\varepsilon_1|_{\infty_2} & \dots & \log |\varepsilon_1|_{\infty_{r_k-1}} \\ \log |\varepsilon_2|_{\infty_1} & \log |\varepsilon_2|_{\infty_2} & \dots & \log |\varepsilon_2|_{\infty_{r_k-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \log |\varepsilon_{r_k-1}|_{\infty_1} & \log |\varepsilon_{r_k-1}|_{\infty_2} & \dots & \log |\varepsilon_{r_k-1}|_{\infty_{r_k-1}} \end{vmatrix}.$$

なお, 行列式において無限素点は S_{∞} 全体から一つ減っているが, R_k の値はこの素点の選び方などにはよらない.

2 (非可換) Stark 予想.

以降, 特に断らない限り

- K/k : 代数体の有限次ガロア拡大,
- $G := \text{Gal}(K/k)$,
- S : k の素点からなる有限集合, S_∞ : k の無限素点全体,

とし,

$$S_\infty \subset S$$

を仮定する. また S に含まれる素点の上にある体 K の素点全体のなす集合を

$$S_K := \{ \text{体 } K \text{ の素点 } w \mid \exists v \in S \text{ s.t. } w|v \}$$

で表す. さらに環の拡大 $\mathbb{Z} \subset R$ と $\mathbb{Z}$ -加群 M に対し

$$RM := R \otimes_{\mathbb{Z}} M$$

と書くことにする. Stark 予想は (記号の厳密な定義を後回しにすると) 以下のように定式化される. G の複素数値指標 χ に対し

- $C_S(\chi) \in \mathbb{C}^\times$: Artin L 関数 $L_S(s, \chi)$ の $s = 0$ での Taylor 展開の先頭係数,
- $R_S(\chi, f) \in \mathbb{C}^\times$: S -単数群 ($\subset K^\times$) に関する “Stark regulator”,
- $A_S(\chi, f) := R_S(\chi, f)/C_S(\chi) \in \mathbb{C}^\times$,

とおいたとき

予想 3 (Stark 予想).

$$(5) \quad A_S(\chi, f)^\gamma = A_S(\chi^\gamma, f) \quad (\forall \gamma \in \text{Aut}(\mathbb{C})).$$

注意 4. G が有限群なので体 $\mathbb{Q}(\chi) := \mathbb{Q}(\chi(g) \in \mathbb{C} \mid g \in G)$ は有理数体 $\mathbb{Q}$ の有限次アーベル拡大体となる (G の指数を n とおけば $\mathbb{Q}(\chi) \subset \mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{n}})$). また上記予想から $A_S(\chi, f) \in \mathbb{Q}(\chi)$ が導かれる.

以下, 記号 $C_S(\chi), R_S(\chi, f)$ の厳密な定義を述べて, Stark 予想の定式を完成させる.

2.1 L 関数の先頭係数 $C_S(\chi)$

G の複素数値指標 χ に対し, 対応する $\mathbb{C}$ 上の表現空間 V をとる. とくに群環 $\mathbb{C}[G]$ は V に作用している:

$$\mathbb{C}[G] \curvearrowright V.$$

また k の各素点 v に対し, K の素点で v 上にあるものを一つ選んで固定し, この素点に関する分解群, 惰性群, Frobenius 自己同型 (の一つ) をそれぞれ $G_v \subset G$, $I_v \subset G$, $\text{Frob}_v \in G$ で表す. このとき (S 部分を除外した) **Artin L 関数** を

$$(6) \quad L_S(s, \chi) := \prod_{\mathfrak{p} \notin S} \det(1 - \text{Frob}_{\mathfrak{p}} N\mathfrak{p}^{-s} |_{V^{I_{\mathfrak{p}}}})^{-1} \quad (\text{Re}(s) > 1)$$

で定義すると, 有理型に解析接続され $s = 0$ で正則になる. ただし $\mathfrak{p}$ は S に含まれない有限素点全体を走り, G の部分群 H に対し

$$V^H := \{v \in V \mid \forall h \in H, hv = v\}$$

とおいた. とくに $V^{I_{\mathfrak{p}}}$ への Frobenius 自己同型 $\text{Frob}_{\mathfrak{p}}$ の作用は, その取り方によらないことに注意. この Artin L 関数 $L_S(s, \chi)$ の $s = 0$ での Taylor 展開の **先頭係数** を $C_S(\chi)$, **零点の位数** を $r_S(\chi)$ で表す. つまり

$$(7) \quad L_S(s, \chi) = C_S(\chi) s^{r_S(\chi)} + O(s^{r_S(\chi)+1}) \quad (C_S(\chi) \neq 0, s \rightarrow 0)$$

である.

2.2 零点の位数 $r_S(\chi)$ と $\mathbb{Z}[G]$ -加群 $X_{K,S}$

Artin L 関数 $L_S(s, \chi)$ の $s = 0$ での零点の位数 $r_S(\chi)$ は

- $L(s, \chi)$ ($:= L_{S_\infty}(s, \chi)$) の関数等式中の Γ 因子 ($v \in S_\infty$ の寄与)
- 取り除かれた Euler 因子 $\prod_{\mathfrak{p} \in S - S_\infty} \det(1 - \text{Frob}_{\mathfrak{p}} N\mathfrak{p}^{-s} |_{V^{I_{\mathfrak{p}}}})^{-1}$ ($v \in S - S_\infty$ の寄与)

を計算することにより

$$(8) \quad r_S(\chi) = \left(\sum_{v \in S} \dim_{\mathbb{C}} V^{G_v} \right) - \dim_{\mathbb{C}} V^G$$

と表せる (補足 5). さらに計算すると

$$\begin{aligned} r_S(\chi) &= \left(\sum_{v \in S} \dim_{\mathbb{C}} V^{G_v} \right) - \dim_{\mathbb{C}} V^G \\ &= \left(\sum_{v \in S} \langle \chi|_{G_v}, 1_{G_v} \rangle_{G_v} \right) - \langle \chi, 1_G \rangle_G \quad (\because \text{指標の直交性}) \\ (9) \quad &= \left(\sum_{v \in S} \langle \chi, \text{Ind}_{G_v}^G 1_{G_v} \rangle_G \right) - \langle \chi, 1_G \rangle_G \quad (\because \text{Frobenius の相互律}) \\ &= \langle \chi, \left(\sum_{v \in S} \text{Ind}_{G_v}^G 1_{G_v} \right) - 1_G \rangle_G \end{aligned}$$

と変形できる. ただし関数 $\chi, \psi: G \rightarrow \mathbb{C}$ の内積を

$$\langle \chi, \psi \rangle_G := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \overline{\psi(g)}$$

と置き, 自明表現の指標を 1_G と置いた. 最後に現れた指標 $(\sum_{v \in S} \text{Ind}_{G_v}^G 1_{G_v}) - 1_G$ を実現する自然な $\mathbb{Z}[G]$ -加群 $X := X_S := X_{K,S}$ が Stark 予想の定式に必要なのでここで導入しておく. まず $Y := Y_S := Y_{K,S}$ を S_K の元で生成される自由 $\mathbb{Z}$ -加群とし, Galois 群 G の自然な作用を考えると

$$Y := \oplus_{w \in S_K} \mathbb{Z}w = \oplus_{v \in S} (\oplus_{w|v} \mathbb{Z}w) = \oplus_{v \in S} \text{Ind}_{G_v}^G 1_{G_v} (= \oplus_{v \in S} \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[G_v]} \mathbb{Z})$$

となる. $\mathbb{Z}[G]$ -加群 X は, 自然な $\mathbb{Z}[G]$ -準同型 $\deg: Y \rightarrow \mathbb{Z}$, $\sum_w n_w w \mapsto \sum_w n_w$ の核として定義される:

$$(10) \quad X := \left\{ \sum_w n_w w \in Y \mid \sum_w n_w = 0 \right\}.$$

明らかに $0 \rightarrow X \hookrightarrow Y \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z} \rightarrow 0$ は完全系列であり, X, Y の指標 χ_X, χ_Y は

$$\chi_X + 1_G = \chi_Y = \sum_{v \in S} \text{Ind}_{G_v}^G 1_{G_v}$$

を満たす. よって位数 $r_S(\chi)$ に関する公式 (9) は次に書き換えられる:

$$r_S(\chi) = \langle \chi, \chi_X \rangle_G = \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(V, \mathbb{C}X).$$

この表記により次が分かる:

$$(11) \quad r_S(\chi) = r_S(\chi)^\gamma = \langle \chi^\gamma, \chi_X^\gamma \rangle_G = \langle \chi^\gamma, \chi_X \rangle_G = r_S(\chi^\gamma) \quad (\forall \gamma \in \text{Aut}(\mathbb{C})).$$

ここで $r_S(\chi)^\gamma = r_S(\chi)$ ($\because r_S(\chi) \in \mathbb{Z}$), $\chi_X^\gamma = \chi_X$ ($\because X$ は $\mathbb{Z}$ 上定義される) を使った. とくに反傾表現 $V^* := \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$, $(g\phi)(v) := \phi(g^{-1}v)$ の指標は $\bar{\chi}$ ($:= \chi$ の複素共役) より

$$(12) \quad r_S(\chi) = r_S(\bar{\chi}) = \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(V^*, \mathbb{C}X)$$

とも表せる. 一方で式 (8) から直接

$$(13) \quad \dim_{\mathbb{C}} V = 1 \text{ なら } r_S(\chi) = \begin{cases} |S| - 1 & \chi = 1_G \text{ のとき,} \\ |\{v \in S \mid \chi(G_v) = \{1\}\}| & \chi \neq 1_G \text{ のとき} \end{cases}$$

となることが示せる.

補足 5. Artin L 関数 $L(s, \chi)$ の関数等式は $\Lambda_0(s) := \Gamma_{\mathbb{C}}(s)^{r_2} \Gamma_{\mathbb{R}}(s)^{a_1} \Gamma_{\mathbb{R}}(s+1)^{a_2} L(s, \chi)$ に対して

$$\Lambda_0(s) = g(s) \Lambda_0(1-s, \bar{\chi})$$

の形. ただし $r_2 := \text{複素素点の数}$, $a_1 := \sum_{\text{実素点 } v} \dim V^{G_v}$, $a_2 := \sum_{\text{実素点 } v} \text{codim } V^{G_v}$, $\Gamma_{\mathbb{R}} := \pi^{-s/2} \Gamma(s/2)$, $\Gamma_{\mathbb{C}} := 2(2\pi)^{-s} \Gamma(s)$, $g(s)$: 極, 零をもたない正則関数, である. また $L(s, \chi)$ は $s = 1$ において, $\chi \neq 1_G$ なら正則かつ非零, $\chi = 1_G$ なら一位の極を持つことが分かる. これらと Brauer の定理より

$$r_{S_{\infty}}(\chi) = \text{ord}_{s=0} L(s, \chi) = \left(\sum_{v \in S_{\infty}} \dim_{\mathbb{C}} V^{G_v} \right) - \dim_{\mathbb{C}} V^G$$

が導かれる. さらに関係式

$$L(s, \chi) = L_S(s, \chi) \times \prod_{\mathfrak{p} \in S - S_{\infty}} \det(1 - \text{Frob}_{\mathfrak{p}} N_{\mathfrak{p}}^{-s} |_{V^{\mathfrak{p}}})^{-1}$$

より

$$r_{S_{\infty}}(\chi) = r_S(\chi) - \sum_{v \in S - S_{\infty}} \dim_{\mathbb{C}} V^{G_v}$$

が導かれる. あわせて式 (8) を得る (詳細は [Da, Proposition 3.2.2] など参照).

2.3 Stark regulator $R_S(\chi, f)$ と S -単数群 $U_{K,S}$

(必ずしも $S_{\infty} \subset S$ とは限らない S に対し) 体 K の **S-単数群** (実際は S_K -単数群) は

$$(14) \quad U := U_{K,S} := \{x \in K^{\times} \mid |x|_w = 1, \forall w \notin S_K\}$$

と表せる. とくに $U_{K,(S_{\infty})_K} = \mathcal{O}_K^{\times}$ である. 対数的埋め込み $\lambda := \lambda_{K,S}: U \rightarrow \mathbb{R}X$ を

$$(15) \quad \lambda(u) := \sum_{w \in S_K} \log |u|_w w \quad (:= \sum_{w \in S_K} \log |u|_w \otimes w)$$

で定めると, 単数定理は次の $\mathbb{C}[G]$ -加群としての同型を与える:

$$(16) \quad \text{id}_{\mathbb{C}} \otimes \lambda: \mathbb{C}U \cong \mathbb{C}X.$$

とくに $\mathbb{Q}[G]$ -加群 $\mathbb{Q}U, \mathbb{Q}X$ は同じ指標をもつことになるので, $\mathbb{Q}[G]$ -加群としての (非標準的な) 同型

$$(17) \quad f: \mathbb{Q}X \cong \mathbb{Q}U$$

が存在することも分かる. 次の写像を考える:

$$(18) \quad \begin{aligned} (\lambda \circ f)_V: \text{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(V^*, \mathbb{C}X) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(V^*, \mathbb{C}X), \\ \phi &\mapsto (\text{id}_{\mathbb{C}} \otimes \lambda) \circ (\text{id}_{\mathbb{C}} \otimes f) \circ \phi. \end{aligned}$$

これは $r_S(\chi)$ -次元 $\mathbb{C}$ -ベクトル空間 $\text{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(V^*, \mathbb{C}X) = (V \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}X)^G$ (式 (12) 参照) の自己同型写像であり, **Stark regulator** $R_S(\chi)$ はその行列式として定義される:

$$(19) \quad R_S(\chi) := R_S(\chi, f) := \det(\lambda \circ f)_V.$$

補足 6. 大まかに言って, 同型写像 $(\lambda \circ f)_V$ は, 対数的埋め込みが導く同型写像 $\text{id}_{\mathbb{C}} \otimes \lambda: \mathbb{C}U \cong \mathbb{C}X$ の “ $\bar{\chi}$ -部分” を切り出したものである (補題 9 の証明や練習問題 19 の解答参照). よって, Stark regulator $R_S(\chi)$ は補足 2 で考察した “単数基準の分解” であると期待できる.

2.4 いくつかの結果

以下, 今後の議論に必要な結果を箇条書きで書いておく.

1. $\chi: G = \text{Gal}(K/k)$ の複素数値指標, $S: k$ の素点からなる有限集合で $S \supset S_\infty$ を満たすもの, $\mathbb{Q}[G]$ -同型 $f: \mathbb{Q}X_{K,S} \cong \mathbb{Q}U_{K,S}$, に対して定義される不変量

$$A_S(\chi, f) = \frac{R_S(\chi, f)}{C_S(\chi)}$$

は以下の性質を満たす ([Da, Proposition 3.7.1]):

- (a) G の指標 χ, χ' に対し

$$A_S(\chi + \chi', f) = A_S(\chi, f)A_S(\chi', f).$$

- (b) $H: G$ の部分群, $\chi: H = \text{Gal}(K/K^H)$ の指標に対し

$$A_S(\text{Ind}_H^G \chi, f) = A_{S_{K^H}}(\chi, f).$$

- (c) $H: G$ の正規部分群, $\chi: G/H = \text{Gal}(K^H/k)$ の指標に対し

$$A_S(\text{Inf}_{G/H}^G \chi, f) = A_S(\chi, f|_{\mathbb{Q}X_{K^H,S}}).$$

- (d) $\bar{z}$ で z の複素共役を表すとき

$$A_S(\bar{\chi}, f) = \overline{A_S(\chi, f)}.$$

2. Stark 予想の成立は f, S の取り方によらない ([Da, §3.6 (とその直前の議論), Proposition 3.7.2]).
3. Stark 予想が $k = \mathbb{Q}$ の場合に成立 $\Rightarrow$ 任意の代数体 k で成立 ([Da, Proposition 3.7.3]).
4. Stark 予想が任意のアーベル拡大 K/k で成立 $\Rightarrow$ 任意の Galois 拡大 K/k で成立 (同上).
5. $r_S(\chi) = 0$ なら $R_S(\chi) = 1$ なので

$$\text{Stark 予想} \stackrel{r_S(\chi)=0}{\Leftrightarrow} L_S(0, \chi)^\gamma = L_S(0, \chi^\gamma) \quad (\forall \gamma \in \text{Aut}(\mathbb{C}))$$

となる. これは Siegel の結果より成立.

6. $\chi = 1_G$ の場合, Stark 予想は成立 (類数公式より導ける. 簡単な場合は次の練習問題, 一般の場合は [Da, Proposition 3.7.4]).

7. $\mathbb{Q}(\chi) = \mathbb{Q}$ の場合, Stark 予想は成立 (山本氏の解説参照).

8. Stark 予想の refinement (rank 1 abelian Stark conjecture など) が定義され, 成立が示されている場合がある. 当然これらの場合も Stark 予想は成立する (各解説参照).

練習問題 7. $K = k, S = S_\infty, \chi = 1_G$ の場合に Stark 予想を解け.

解答. Stark 予想で $K = k$ ($\therefore G = \{\text{id}_k\}$), $S = S_\infty, \chi = 1_G$ とする. とくに $V = \mathbb{C}$ (1_G の表現空間), X, U への G の作用は自明なので

$$\text{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(V^*, \mathbb{C}X) = (\mathbb{C}X)^G = \mathbb{C}X$$

である. また $S_K = \{K \text{ の無限素点} \} =: \{\infty_1, \infty_2, \dots, \infty_{r+1}\}, U = \mathcal{O}_K^\times =: \langle \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r \rangle \times \mu_K$ と番号付けておけば

$$\mathbb{Q}X \cong \mathbb{Q}U, \quad \infty_j - \infty_{r+1} \mapsto \varepsilon_j$$

は $\mathbb{Q}$ 上の ($\therefore \mathbb{Q}[G]$ -加群としての) 同型を与える. この場合の $(\lambda \circ f)_V$ は

$$\begin{array}{ccccccc} \infty_j - \infty_{r+1} & \in & \mathbb{Q}X & \subset & \mathbb{C}X & \xrightarrow{(\lambda \circ f)_V} & \mathbb{C}X \ni \sum_{i=1}^{r+1} \log |\varepsilon|_{\infty_i} \infty_i \\ \downarrow & & f \downarrow & & \downarrow & \lambda \nearrow & \nearrow \\ \varepsilon_j & \in & \mathbb{Q}U & \subset & \mathbb{C}U & \ni & \varepsilon \end{array}$$

で与えられる. さらに $\sum_{i=1}^{r+1} \log |\varepsilon_j|_{\infty_i} = \log |N(\varepsilon_j)| = 0$ に注意すると

$$\begin{aligned} (\lambda \circ f)_V(\infty_j - \infty_{r+1}) &= \sum_{i=1}^{r+1} \log |\varepsilon_j|_{\infty_i} \infty_i \\ &= \sum_{i=1}^r \log |\varepsilon_j|_{\infty_i} (\infty_i - \infty_{r+1}) \\ &= \left(\log |\varepsilon_j|_{\infty_1} \quad \log |\varepsilon_j|_{\infty_2} \quad \dots \quad \log |\varepsilon_j|_{\infty_r} \right) \begin{pmatrix} \infty_1 - \infty_{r+1} \\ \infty_2 - \infty_{r+1} \\ \vdots \\ \infty_r - \infty_{r+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が分かるので, 基底 $\{\infty_j - \infty_{r+1} \mid j = 1, 2, \dots, r\}$ に関する $(\lambda \circ f)_V$ の表現行列 (の転置行列) は

$$\begin{pmatrix} \log |\varepsilon_1|_{\infty_1} & \log |\varepsilon_1|_{\infty_2} & \dots & \log |\varepsilon_1|_{\infty_r} \\ \log |\varepsilon_2|_{\infty_1} & \log |\varepsilon_2|_{\infty_2} & \dots & \log |\varepsilon_2|_{\infty_r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \log |\varepsilon_r|_{\infty_1} & \log |\varepsilon_r|_{\infty_2} & \dots & \log |\varepsilon_r|_{\infty_r} \end{pmatrix}$$

となり, Stark regulator $R_{S_\infty}(1_G) = \det(\lambda \circ f)_V$ は通常の単数基準 R_k の ± 1 倍と一致する. とくにこの場合の Stark 予想は

$$\left(\frac{R_k}{C_{S_\infty}(1_G)} \right)^\gamma = \frac{R_k}{C_{S_\infty}(1_G)} \quad (\forall \gamma \in \text{Aut}(\mathbb{C})), \text{ すなわち } \frac{R_k}{C_{S_\infty}(1_G)} \in \mathbb{Q}$$

を言っている ($\therefore 1_G^\gamma = 1_G$). これは類数公式 $\frac{R_k}{C_{S_\infty}(1_G)} = \frac{R_k}{\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\zeta_k(s)}{s^r}} = \frac{e_k}{-h_k}$ より従う. $\square$

注意 8. 類数公式: $\frac{R_k}{C_{S_\infty}(1_G)} = \frac{e_k}{-h_k}$ は自明指標の場合の Stark 予想: $\frac{R_k}{C_{S_\infty}(1_G)} \in \mathbb{Q}$ より詳しい情報を含んでいることに注意 (これが **integral refinement** の典型例).

2.5 Tate による言い換え ($r_S(\chi) = 1$ の場合)

Stark 単数 や **G-同変** の概念への導入として, Tate による Stark 予想 (の $r_S(\chi) = 1$ の場合) の再定式を紹介しておく.

補題 9 (Tate). χ は G の既約指標で $r_S(\chi) = 1$ を満たすとする. 元 $a \in \mathbb{Q}(\chi)^\times$ に対し

$$\pi(a, \chi) := \sum_{\gamma \in \text{Gal}(\mathbb{Q}(\chi)/\mathbb{Q})} a^\gamma L'_S(0, \chi^\gamma) e_{\bar{\chi}^\gamma} \in \mathbb{C}[G]$$

と置く. ただし $\mathbb{C}[G]$ の χ 成分への idempotent を $e_\chi := \frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \bar{\chi}(\sigma) \sigma$ と置いた. このとき次の同値が成り立つ:

指標 χ に関して Stark 予想は正しい $\Leftrightarrow (\pi(a, \chi) \cdot \mathbb{Q}X) \cap (\text{id}_{\mathbb{C}} \otimes \lambda)(\mathbb{Q}U) \neq \{0\}$.

注意 10. 上記の補題は (少なくとも $r_S(\chi) = 1$ のとき)

適切な **S-単元** の冪根 ($\in \mathbb{Q}U$) の存在 $\Rightarrow$ Stark 予想

を示唆している (可換拡大の場合は, 本報告集 “rank 1 abelian Stark conjecture”, 非可換拡大の場合は小笠原氏, 野村氏の解説を参照).

補題 9 の証明の概略. (詳しい証明は [Da, Proposition 4.2.2] を参照.) ($\Leftarrow$) の議論を見ていく. $r_S(\chi) = 1$ (と Schur index の議論) を使って, 指標 $\text{Tr}_{\mathbb{Q}(\chi)/\mathbb{Q}} \chi$ は $\mathbb{Q}$ 上の既約表現として実現され, さらに $\mathbb{Q}X, \mathbb{Q}U$ の中で重複度 1 であることが示せる (補足 11). その成分を X_1, U_1 とおき, $\mathbb{Q}[G]$ -加群としての分解

$$\mathbb{Q}X = X_1 \oplus X_2, \quad \mathbb{Q}U = U_1 \oplus U_2$$

を考える. X_1, X_2, U_1, U_2 の取り方より

$$\exists g: X_2 \cong U_2, \quad \mathbb{C}X_1 \cong \mathbb{C}U_1 \cong \bigoplus_{\gamma \in \text{Gal}(\mathbb{Q}(\chi)/\mathbb{Q})} V^\gamma$$

である. ただし, 指標 χ^γ の $\mathbb{C}$ 上の実現を V^γ とおいた. このとき成分毎に見ると

$$(20) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C}X & = & \mathbb{C}X_1 \oplus \mathbb{C}X_2 \cong \left(\bigoplus_{\gamma \in \text{Gal}(\mathbb{Q}(\chi)/\mathbb{Q})} V^\gamma \right) \oplus \mathbb{C}X_2, \\ \circlearrowleft & & \circlearrowleft \qquad \qquad \qquad \circlearrowleft \\ \pi(a, \chi) & \leftrightarrow & \left(\bigoplus_{\gamma \in \text{Gal}(\mathbb{Q}(\chi)/\mathbb{Q})} \bar{a}^\gamma L'_S(0, \bar{\chi}^\gamma) \right) \oplus 0 \end{array}$$

となっていることに注意 (ただし $\pi(a, \chi)$ -倍写像, $\bar{a}^\gamma L'_S(0, \bar{\chi}^\gamma)$ -倍写像を, 記号 $\pi(a, \chi)$, $\bar{a}^\gamma L'_S(0, \bar{\chi}^\gamma)$ で表している). よって次の同値を得る:

$$\begin{aligned}
& (\pi(a, \chi) \cdot \mathbb{Q}X) \cap (\text{id}_{\mathbb{C}} \otimes \lambda)(\mathbb{Q}U) \neq \{0\} \\
& \Leftrightarrow (\pi(a, \chi) \cdot X_1) \cap (\text{id}_{\mathbb{C}} \otimes \lambda)(\mathbb{Q}U) \neq \{0\} \quad (\because \pi(a, \chi) \cdot X_2 = 0) \\
& \Leftrightarrow \exists U_3 \subset \mathbb{Q}U \text{ s.t. } (\text{id}_{\mathbb{C}} \otimes \lambda)^{-1} \circ \pi(a, \chi): X_1 \cong U_3 \quad (\because X_1 \text{ は既約}) \\
& \Leftrightarrow (\text{id}_{\mathbb{C}} \otimes \lambda)^{-1} \circ \pi(a, \chi): X_1 \cong U_1 \quad (\because X_1 \cong U_1 \text{ の } \mathbb{Q}U \text{ での重複度 } 1) \text{ — } (\spadesuit)
\end{aligned}$$

次に $\mathbb{C}[G]$ -準同型 $f(a, \chi): \mathbb{C}X \rightarrow \mathbb{C}U$ と同型写像 $(\lambda \circ f(a, \chi))_{V^\gamma}$ を

$$(21) \quad f(a, \chi) = \begin{cases} (\text{id}_{\mathbb{C}} \otimes \lambda)^{-1} \circ \pi(a, \chi) & (\mathbb{C}X_1 \text{ 上}), \\ \text{id}_{\mathbb{C}} \otimes g & (\mathbb{C}X_2 \text{ 上}), \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
(\lambda \circ f(a, \chi))_{V^\gamma}: \text{Hom}_{\mathbb{C}[G]}((V^\gamma)^*, \mathbb{C}X) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}[G]}((V^\gamma)^*, \mathbb{C}X), \\
\phi &\mapsto (\text{id}_{\mathbb{C}} \otimes \lambda) \circ f(a, \chi) \circ \phi
\end{aligned}$$

で定める. このとき

もし $f(a, \chi)|_{X_1}$ が $\mathbb{Q}[G]$ -同型: $X_1 \cong U_1$ を与えていれば, $f(a, \chi)|_{\mathbb{Q}X}$ が $\mathbb{Q}[G]$ -同型: $\mathbb{Q}X \cong \mathbb{Q}U$ となり, 行列式 $\det((\lambda \circ f(a, \chi))_{V^\gamma})$ は Stark regulator になる — (

ことに注意. 次に $\mathbb{C}X$ の分解より

$$\begin{aligned}
\text{Hom}_{\mathbb{C}[G]}((V^\gamma)^*, \mathbb{C}X) &= \left(\bigoplus_{\gamma' \in \text{Gal}(\mathbb{Q}(\chi)/\mathbb{Q})} \text{Hom}_{\mathbb{C}[G]}((V^\gamma)^*, V^{\gamma'}) \right) \oplus \text{Hom}_{\mathbb{C}[G]}((V^\gamma)^*, \mathbb{C}X_2) \\
&= \text{Hom}_{\mathbb{C}[G]}((V^\gamma)^*, V^{\rho\gamma})
\end{aligned}$$

が分かる. ただし複素共役写像を ρ とおいた $((V^\gamma)^*, V^{\rho\gamma})$ の指標は共に $\bar{\chi}$. よって同型写像 $(\lambda \circ f(a, \chi))_{V^\gamma}$ は, 実際は一次元 $\mathbb{C}$ -線形空間 $\text{Hom}_{\mathbb{C}[G]}((V^\gamma)^*, V^{\rho\gamma})$ の自己同型であり,

$$\begin{aligned}
(\lambda \circ f(a, \chi))_{V^\gamma}: \phi &\mapsto (\text{id}_{\mathbb{C}} \otimes \lambda) \circ f(a, \chi) \circ \phi \\
&= \pi(a, \chi) \circ \phi \quad (\because \text{定義式 (21)}) \\
&= a^\gamma L'_S(0, \chi^\gamma) \circ \phi \quad (\because \text{分解 (20)})
\end{aligned}$$

となる. つまり $(\lambda \circ f(a, \chi))_{V^\gamma}$ は $a^\gamma L'_S(0, \chi^\gamma)$ -倍写像であり, とくに

$$A(\chi^\gamma, f(a, \chi)) := \frac{\det((\lambda \circ f(a, \chi))_{V^\gamma})}{L'_S(0, \chi^\gamma)} = a^\gamma \quad (\forall \gamma \in \text{Gal}(\mathbb{Q}(\chi)/\mathbb{Q})) \text{ — } (\diamond)$$

が分かる. まとめると

$$\begin{aligned}
(\pi(a, \chi) \cdot \mathbb{Q}X) \cap (\text{id}_{\mathbb{C}} \otimes \lambda)(\mathbb{Q}U) \neq \{0\} &\stackrel{(\spadesuit)}{\Leftrightarrow} f(a, \chi)|_{X_1} = (\text{id}_{\mathbb{C}} \otimes \lambda)^{-1} \circ \pi(a, \chi): X_1 \cong U_1 \\
&\stackrel{(\clubsuit), (\diamond)}{\Rightarrow} \text{指標 } \chi \text{ に対して Stark 予想が成立.}
\end{aligned}$$

逆向き ($\Rightarrow$) を示すには以下の手順で変形すればよい:

指標 χ に対して Stark 予想が成立

$$\Leftrightarrow f \text{ が } \mathbb{Q} \text{ 上定義されていれば } A(\chi, f)^\beta = A(\chi^\beta, f) \ (\forall \beta \in \text{Aut}(\mathbb{C}))$$

^{補足}¹² f が $\mathbb{C}$ 上定義されていれば $A(\chi, f)^\beta = A(\chi^\beta, f^\beta) \ (\forall \beta \in \text{Aut}(\mathbb{C}))$
(ただし f^β は $f: \mathbb{C}X \rightarrow \mathbb{C}U$ を $\beta: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ で base change したもの)

$$\Rightarrow A(\chi^\alpha, f(a, \chi)) = a^\alpha = (a^{\beta^{-1}\alpha})^\beta = A(\chi^{\beta^{-1}\alpha}, f(a, \chi))^\beta = A(\chi^\alpha, f(a, \chi)^\beta) \ (\forall \alpha, \beta \in \text{Aut}(\mathbb{C}))$$

$$\Rightarrow \det((\lambda \circ f(a, \chi)^\beta)_{V^\alpha}) = \det((\lambda \circ f(a, \chi))_{V^\alpha}) \ (\forall \alpha, \beta \in \text{Aut}(\mathbb{C}))$$

$$\Rightarrow (\text{id}_{\mathbb{C}} \otimes \lambda) \circ f(a, \chi)^\beta|_{V^\alpha} = (\text{id}_{\mathbb{C}} \otimes \lambda) \circ f(a, \chi)|_{V^\alpha} \ (\forall \alpha, \beta \in \text{Aut}(\mathbb{C}))$$

$$\Rightarrow (\text{id}_{\mathbb{C}} \otimes \lambda) \circ f(a, \chi)^\beta|_{\mathbb{C}X_1} = (\text{id}_{\mathbb{C}} \otimes \lambda) \circ f(a, \chi)|_{\mathbb{C}X_1} \ (\forall \beta \in \text{Aut}(\mathbb{C}))$$

$$\Rightarrow f(a, \chi)|_{\mathbb{C}X_1} = (\text{id}_{\mathbb{C}} \otimes \lambda)^{-1} \circ \pi(a, \chi): \mathbb{C}X_1 \rightarrow \mathbb{C}U \text{ は } \mathbb{Q} \text{ 上定義される, すなわち } f(a, \chi)(\mathbb{Q}X_1) \subset \mathbb{Q}U$$

$$\Rightarrow \pi(a, \chi) \cdot \mathbb{Q}X = \pi(a, \chi) \cdot X_1 \subset (\text{id}_{\mathbb{C}} \otimes \lambda)(\mathbb{Q}U)$$

$$\Rightarrow (\pi(a, \chi) \cdot \mathbb{Q}X) \cap (\text{id}_{\mathbb{C}} \otimes \lambda)(\mathbb{Q}U) = \pi(a, \chi) \cdot X_1 \neq \{0\}.$$

□

補足 11. 『 $r_S(\chi) = 1$ なら, 指標 $\text{Tr}_{\mathbb{Q}(\chi)/\mathbb{Q}}\chi$ は $\mathbb{Q}$ 上の既約表現として実現され, さらに $\mathbb{Q}X \cong \mathbb{Q}U$ の中で重複度 1』であることは, 有限群の表現に関する次の事実 ([Da, Theorem A.12.4]) から従う:

(*) 有限群 G , 標数 0 の体 F , F の代数閉包 C , G の C 上の既約指標 θ を考える. このとき自然数 m が存在して $m\theta$ は $F(\theta)$ 上の既約指標となる.

(**) さらに $\text{Tr}_{F(\theta)/F}(m\theta)$ は F 上の既約指標である.

実際, 今の状況に適応すると

χ は既約指標 $\stackrel{(*)}{\Rightarrow} \exists m \in \mathbb{N}$ s.t. $m\chi$ は $\mathbb{Q}(\chi)$ 上の既約表現 V として実現される.

さらに V が既約であることと

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{Q}(\chi)} \text{Hom}_{\mathbb{Q}(\chi)[G]}(V, \mathbb{Q}(\chi)X) &= \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}(\chi)} V, \mathbb{C}X) \\ &= \langle m\chi, \chi_X \rangle_G = mr_S(\chi) = m > 0 \end{aligned}$$

より, 指標 $m\chi$ は $\mathbb{Q}(\chi)X$ の部分表現として実現され, よって $\mathbb{C}X$ の部分表現としても実現される. つまり χ の m 個の直和が $\mathbb{C}X$ に入っているので $m \leq \langle \chi, \chi_X \rangle_G$ となる. 一方で $\langle \chi, \chi_X \rangle_G = r_S(\chi) = 1$ であるから $m = 1$ が成り立つ. すなわち

(**) $\Rightarrow \text{Tr}_{\mathbb{Q}(\chi)/\mathbb{Q}}\chi$ は $\mathbb{Q}$ 上の既約指標

が言えた. 同様に $\text{Tr}_{\mathbb{Q}(\chi)/\mathbb{Q}}\chi$ の $\mathbb{Q}$ 上の表現空間 W が既約であることと

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{Q}} \text{Hom}_{\mathbb{Q}[G]}(W, \mathbb{Q}X) &= \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(\mathbb{C}W, \mathbb{C}X) \\ &= \langle \text{Tr}_{\mathbb{Q}(\chi)/\mathbb{Q}}\chi, \chi_X \rangle_G \geq \langle \chi, \chi_X \rangle_G = r_S(\chi) = 1 \end{aligned}$$

より, 指標 $\text{Tr}_{\mathbb{Q}(\chi)/\mathbb{Q}}\chi$ は $\mathbb{Q}X$ の部分空間として実現されることが分かる. さらに

指標 χ の $\mathbb{C}$ 上の表現空間 $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}(\chi)} V \hookrightarrow$ 指標 $\text{Tr}_{\mathbb{Q}(\chi)/\mathbb{Q}}\chi$ の $\mathbb{C}$ 上の表現空間 $\mathbb{C}W$ と埋め込めるから, もし指標 $\text{Tr}_{\mathbb{Q}(\chi)/\mathbb{Q}}\chi$ の $\mathbb{Q}X$ での重複度が 2 以上なら

$$\begin{aligned} 2 &\leq \dim_{\mathbb{Q}} \text{Hom}_{\mathbb{Q}[G]}(W, \mathbb{Q}X) = \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(\mathbb{C}W, \mathbb{C}X) \\ &\leq \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}(\chi)} V, \mathbb{C}X) = r_S(\chi) = 1 \end{aligned}$$

となり矛盾. よって指標 $\text{Tr}_{\mathbb{Q}(\chi)/\mathbb{Q}}\chi$ の $\mathbb{Q}X$ での重複度は 1 である.

補足 12. Deligne による Stark 予想の言い換え ([Da, Conjecture 3.5.2]) より.

3 rank 1 abelian Stark conjecture.

この節では (前節より強めて) 以下を仮定する:

1. K/k : 代数体の有限次アーベル拡大.
2. S は無限素点と, K/k での分岐素点を全て含む.
3. S は K/k で完全分解する素点 v を一つ以上含む. 以下, v とその上の素点 w を一つ選び, 固定して考える.
4. $|S| \geq 2$.

補足 13. 代数体の Galois 拡大 K/k と, k, K の無限素点 v, w s.t. $w|v$ に対し

$$\begin{aligned} v \text{ が完全分解} &\Leftrightarrow v, w \text{ が共に実素点, または共に複素素点} \\ &\Leftrightarrow w \text{ が実素点, または } v \text{ が複素素点.} \end{aligned}$$

さらに以下の記号を用いる:

- $e_K := |\mu_K|$, $\hat{G}$: G の既約指標全体のなす群.
- $\sigma \in G$ に付随する (S 部分を除外した) **部分ゼータ関数** $\zeta_S(s, \sigma)$ は

$$\zeta_S(s, \sigma) := \sum_{(\mathfrak{a}, S)=1, (\mathfrak{a}, K/k)=\sigma} N\mathfrak{a}^{-s}$$

で定義される. ただし $\mathfrak{a}$ は k の整イデアルのうち, S に含まれる任意の有限素点と互いに素で, Artin 記号 $(*, K/k)$ で σ へ写るものの全体を走る.

注意 14. 部分ゼータ関数と Artin L 関数は次の関係にある.

$$\zeta_S(s, \sigma) = \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \widehat{G}} \bar{\chi}(\sigma) L_S(s, \chi), \quad L_S(s, \chi) = \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma) \zeta_S(s, \sigma).$$

さらに, G がアーベル群より既約表現は一次元だから公式 (13) が使えて

$$\text{仮定 } 3, 4 \Rightarrow r_S(\chi) \geq 1 \ (\forall \chi \in \widehat{G}) \Rightarrow \zeta_S(0, \sigma) = 0 \ (\forall \sigma \in G).$$

予想 15 ($\text{St}(K/k, S, v, w)$). 仮定 1, 2, 3, 4 のもとで, 元 ε ($:= \varepsilon(K/k, S, v, w)$) $\in K^\times$ が存在し以下を満たす:

- $|S| > 2$ のとき, ε は $\{v\}$ -単数である.
- $|S| = 2$ のとき $S =: \{v, v'\}$ とおくと, ε は $\{v, v'\}$ -単数であり, さらに次を満たす:

$$\forall w' | v', \forall w'' | v', |\varepsilon|_{w'} = |\varepsilon|_{w''}.$$

- $\log |\varepsilon^\sigma|_w = -e_K \zeta'_S(0, \sigma) \ (\forall \sigma \in G).$
- $K(\varepsilon^{1/e_K})/k$ はアーベル拡大.

注意 16. 予想 $\text{St}(K/k, S, v, w)$ を **rank 1 abelian Stark conjecture**, 元 ε を **Stark 単数** などと呼ぶ. 予想の最初三つの条件は, Stark 単数 ε の全ての素点での絶対値 $|\varepsilon|_w$ を与えている. よって Stark 単数は (もし存在すれば) μ_K の元倍を除いて一意的である.

注意 17. 簡単のため $|S| > 2$ とする. このとき Stark 単数は $\{v\}$ -単数である. とくに

$$\begin{cases} v \mid \infty & \Rightarrow \varepsilon \in \mathcal{O}_K^\times, \\ v < \infty & \Rightarrow \varepsilon \text{ は strong } v\text{-unit} \end{cases}$$

である (“strong v -unit” は $\{v\}$ -単数のことであるが, K の任意の無限素点 ∞_K に対し $|\varepsilon|_{\infty_K} = 1$ を満たす性質, すなわち任意の複素共役が -1 乗で作用する性質を強調したもの).

注意 18. 予想 $\text{St}(K/k, S, v, w)$ の三つ目の条件は次と同値:

$$L'_S(0, \chi) = -\frac{1}{e_K} \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma) \log |\varepsilon^\sigma|_w \quad (\forall \chi \in \widehat{G}).$$

3.1 いくつかの結果.

1. S に K/k で完全分解する素点が二つ以上含まれている場合, 予想 $\text{St}(K/k, S, v, w)$ は成立 ($\because |S| > 2$ なら公式 (13) より $\zeta'_S(0, \sigma) = 0$ となり自明. $|S| = 2$ の場合は [Da, Proposition 4.3.4] 参照).

2. 予想 $\text{St}(K/k, S, v, w)$ の成立は w の取り方によらない ($\because v$ 上の任意の素点は w^τ ($\tau \in G$) と書ける. このとき $\varepsilon(K/k, S, v, w^\tau) := \varepsilon(K/k, S, v, w)^\tau$ とおけば良い).
3. 上記二つより, 予想 $\text{St}(K/k, S, v, w)$ の成立は v, w の選び方によらない. よって $\text{St}(K/k, S, v)$, $\text{St}(K/k, S)$ などとも書く.
4. この節の最初の仮定 1,2,3,4 のもとで以下が成り立つ (本質的な場合の証明は, 本報告集 “有理数体上の Stark 予想の証明” の練習問題 19).

予想 $\text{St}(K/k, S) \Rightarrow r_S(\chi) = 1$ を満たす χ に対して, Stark 予想 (5) が成立.

5. G が巡回群で, S に含まれる素点で K/k で完全分解するものが v ただ一つするとき, 予想 $\text{St}(K/k, S, v, w)$ を仮定すると $K = k(\varepsilon)$ が言える ([Da, Remark 4.3.3]). さらに v は実素点とし, 埋め込み $k \subset K \subset K_w = \mathbb{R}$ を固定すると Stark 単数 ε は

$$\varepsilon^\sigma = \exp(-2\zeta'_S(0, \sigma)) = \exp\left(\sum_{\chi \in \hat{G}} \frac{-2\bar{\chi}(\sigma)}{|G|} L'_S(0, \chi)\right) \quad (\forall \sigma \in G)$$

を満たす ($K \subset \mathbb{R}$ より $e_K = 2$). つまり

$$K = k(\exp(-2\zeta'_S(0, \text{id}_K)))$$

と書ける. これは Hilbert の第 12 問題 (類体構成) の部分解と言えよう.

6. $S \subset S'$ のとき, 予想 $\text{St}(K/k, S) \Rightarrow$ 予想 $\text{St}(K/k, S')$ ([Da, Proposition 4.3.7]).
7. K/k の中間体 F に対して, 予想 $\text{St}(K/k, S) \Rightarrow$ 予想 $\text{St}(F/k, S)$ ([Da, Proposition 4.3.8]).
8. $|G| = 2$ のとき, 予想 $\text{St}(K/k, S)$ は正しい (k と K の類数公式を使う, [Da, §7.2]). なお G の指数が 2 のときも部分的に証明されている (Sands 氏の結果, [Da, §7]).
9. 予想 $\text{St}(K/\mathbb{Q}, S)$ は正しい ($v = \infty$ なら円単数, $v = p$ ならガウス和を使う. 本報告集 “有理数体上の Stark 予想の証明” 参照).
10. 虚二次体 k に対し, 予想 $\text{St}(K/k, S)$ は正しい (小野寺氏の解説参照).
11. $|S| = 2$ のとき, 予想 $\text{St}(K/k, S)$ は正しい ([Da, Proposition 4.3.11]).