

# 有理数体上の Stark 予想の証明

加塩 朋和 (東京理科大学)

第 20 回整数論サマースクール『Stark 予想』二日目 (2012 年 9 月 3 日)

概要.

ここでは Stark 予想 (本報告集 “Stark-Tate の定式化”, 予想 3), 予想  $\text{St}(K/k, S, v, w)$  (rank 1 abelian Stark conjecture, 同, 予想 15) の復習をしたのち, 基礎体が有理数体で, かつアーベル拡大の場合の証明の概略を与える. また Stark 予想に関連する研究として, CM 周期に関する吉田敬之氏の予想と, Stark 予想の  $p$ -進類似である Gross-Stark 予想の簡単な紹介も行う (詳細は, 前者は文献 [Yo], 後者は本報告集, 河村氏の解説を参照). なお, 参考文献は本報告集 “Rubin’s integral refinement” の最後に一括して載せてある.

## 4 復習

以降, 特に断らない限り, 以下の記号を用いる:

- $K/k$ : 代数体の有限次 Galois 拡大,
- $G := \text{Gal}(K/k)$ ,
- ( $K/k$  がアーベル拡大のとき)  $\widehat{G}$ :  $G$  の既約指標全体のなす群,
- $S$ :  $k$  の素点からなる有限集合,
- $S_\infty$ :  $k$  の無限素点全体のなす集合.

**Stark 予想.**  $K/k$ : 有限次 Galois 拡大,  $S \supset S_\infty$ ,  $G := \text{Gal}(K/k)$  の指標  $\chi$ ,  $\mathbb{Q}[G]$ -同型  $f: \mathbb{Q}X \cong \mathbb{Q}U$  に対し

$$A_S(\chi) := \frac{R_S(\chi, f)}{C_S(\chi)} \left( = \frac{\text{Stark regulator}}{L_S(s, \chi) \text{ の } s=0 \text{ での先頭係数}} \right)$$

と定める. このとき

$$A_S(\chi^\gamma) = A_S(\chi)^\gamma \quad (\forall \gamma \in \text{Aut}(\mathbb{C})).$$

予想  $\text{St}(K/k, S, v, w)$ .  $K/k$ : 有限次アーベル拡大,  $S \supset S_\infty$ ,  $S$  は  $K/k$  で分岐する任意の素点を含む,  $|S| \geq 2$ ,  $S \ni \exists v$  s.t.  $K/k$  で完全分解,  $w|v$  を固定, とする. このとき元  $\varepsilon \in K^\times$  が存在し以下を満たす:

- $|S| > 2$  のとき,  $\varepsilon$  は  $\{v\}$ -単数である.
- $|S| = 2$  のとき  $S =: \{v, v'\}$  とおくと,  $\varepsilon$  は  $\{v, v'\}$ -単数であり, さらに次を満たす:

$$\forall w'|v', \forall w''|v', |\varepsilon|_{w'} = |\varepsilon|_{w''}.$$

- $\log |\varepsilon^\sigma|_w = -e_K \zeta'_S(0, \sigma) \quad (\forall \sigma \in G)$ . ただし  $e_K$  は  $K$  に含まれる 1 の冪根の数.
- $K(\varepsilon^{1/e_K})/k$  はアーベル拡大.

練習問題 19. 予想  $\text{St}(K/k, S, v, w)$  の条件に加えて

- $|S| \geq 3$ ,
- $S$  に含まれる素点で  $K/k$  で完全分解する素点は  $v$  ただ一つ.

とする. この条件下で

予想  $\text{St}(K/k, S, v, w) \Rightarrow \chi \in \widehat{G}, r_S(\chi) = 1$  の場合の Stark 予想

を示せ.

注意 20. Tate による再定式 (補題 9) を仲介した証明が標準的である ([Da, Proposition 4.2.2 ~ §4.3 の前までの議論]). また, 本報告集 “Rubin’s integral refinement” において, 予想  $\text{RS}(K/k, S, T, r)$  (予想 50) を定式化し

- 予想  $\text{RS}(K/k, S, T, r)$  は予想  $\text{St}(K/k, S, v, w)$  の一般化であり (注意 51)
- 予想  $\text{RS}(K/k, S, T, r)$  より弱い命題が Stark 予想と同値である (補題 47, 練習問題 48)

ことを言うので, 合わせて練習問題 19 の (より見通しの良い) 別解となっている. 以下では直接的な解答 (Stark 単数を用いて Stark regulator を計算) を与える.

練習問題 19 の解答. まず, 公式 (13) より  $r_S(1_G) = |S| - 1 \geq 2$  が成り立つので ( $r_S(\chi) = 1$  の場合を考えているので)  $\chi \neq 1_G$  であることに注意.  $G$  がアーベル群なので, 各  $\gamma \in \text{Aut}(\mathbb{C})$  に対し, 既約指標  $\chi^\gamma$  は一次元表現  $V^\gamma = \mathbb{C}$ ,  $gv := \chi^\gamma(g)v$  ( $g \in G, v \in V^\gamma$ ) で実現できる. とくに

$$\text{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(V^*, \mathbb{C}X) = (V \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}X)^G = (\mathbb{C}X)^{\bar{\chi}^\gamma}$$

である. ただし  $\mathbb{C}[G]$ -加群  $V$  に対し  $V^\chi := \{v \in V \mid gv = \chi(g)v \ (\forall g \in G)\}$  とおいた. なお  $\mathbb{C}[G]$ -加群としての同型  $\mathbb{C}U \cong \mathbb{C}X$  と公式 (11), (13) より

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}U)^{\bar{\chi}^\gamma} = \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}X)^{\bar{\chi}^\gamma} = r_S(\chi^\gamma) = r_S(\chi) = 1$$

となる. ここで元  $\sum_{\sigma \in G} \chi^\gamma(\sigma) w^\sigma \in \mathbb{C}Y$  を考えると

- $\chi^\gamma \neq 1_G$  より  $\deg(\sum_{\sigma \in G} \chi^\gamma(\sigma) w^\sigma) = \sum_{\sigma \in G} \chi^\gamma(\sigma) = 0$ .

- $\tau(\sum_{\sigma \in G} \chi^\gamma(\sigma) w^\sigma) = \sum_{\sigma \in G} \chi^\gamma(\sigma) w^{\sigma\tau} = \sum_{\sigma \in G} \chi^\gamma(\sigma\tau^{-1}) w^\sigma = \overline{\chi^\gamma}(\tau) \sum_{\sigma \in G} \chi^\gamma(\sigma) w^\sigma$   
( $\forall \tau \in G$ ).
- $w$  の係数  $= \chi^\gamma(\text{id}_K) = 1$ .

となっているので  $(\mathbb{C}X)^{\overline{\chi^\gamma}}$  に含まれる非自明な元である. よって

$$(22) \quad (\mathbb{C}X)^{\overline{\chi^\gamma}} = \mathbb{C} \cdot \sum_{\sigma \in G} \chi^\gamma(\sigma) w^\sigma$$

と書ける. 同様に  $(\mathbb{C}U)^{\overline{\chi^\gamma}}$  に含まれる元として (予想  $\text{St}(K/k, S, v, w)$  を仮定して) Stark 単数  $\varepsilon$  を使って

$$(\mathbb{C}U)^{\overline{\chi^\gamma}} \ni \sum_{\sigma \in G} \chi^\gamma(\sigma) \varepsilon^\sigma$$

を考える. もし

$$(\text{id}_{\mathbb{C}} \otimes f)(\sum_{\sigma \in G} \chi^\gamma(\sigma) w^\sigma) = \sum_{\sigma \in G} \chi^\gamma(\sigma) \varepsilon^\sigma \text{ を満たす同型 } f: \mathbb{Q}X \cong \mathbb{Q}U \text{ が存在} \quad (\dagger)$$

するならば, Stark regulator の定義に現れる同型写像  $(\lambda \circ f)_{V^\gamma}$  は

$$\begin{array}{ccccc} \sum_{\sigma \in G} \chi^\gamma(\sigma) w^\sigma & \in & (\mathbb{C}X)^{\overline{\chi^\gamma}} & \xrightarrow{(\lambda \circ f)_{V^\gamma}} & (\mathbb{C}X)^{\overline{\chi^\gamma}} & \ni & \sum_{w' \in S_K, \sigma \in G} \chi^\gamma(\sigma) \log |\varepsilon^\sigma|_{w'} w' \\ \downarrow & & f \downarrow & \lambda \nearrow & & \searrow & \\ \sum_{\sigma \in G} \chi^\gamma(\sigma) \varepsilon^\sigma & \in & (\mathbb{C}U)^{\overline{\chi^\gamma}} & \ni & \sum_{\sigma \in G} \chi^\gamma(\sigma) \varepsilon^\sigma & \end{array}$$

で表される. 予想  $\text{St}(K/k, S, v, w)$  は次を言っている:

- $w' \nmid v$  のとき  $\log |\varepsilon^\sigma|_{w'} = 0$ .
- $w' | v$  のとき  $w' = w^\tau$  とおけば

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in G} \chi^\gamma(\sigma) \log |\varepsilon^\sigma|_{w'} &= \sum_{\sigma \in G} \chi^\gamma(\sigma) \log |\varepsilon^\sigma|_{w^\tau} \\ &= \sum_{\sigma \in G} \chi^\gamma(\sigma) \log |\varepsilon^{\sigma\tau^{-1}}|_w \\ &= \sum_{\sigma \in G} -e_K \chi^\gamma(\sigma) \zeta'_S(0, \sigma\tau^{-1}) \\ &= -e_K L'_S(0, \chi^\gamma) \chi^\gamma(\tau). \end{aligned}$$

よって

$$(\lambda \circ f)_{V^\gamma}(\sum_{\sigma \in G} \chi^\gamma(\sigma) w^\sigma) = \sum_{\tau \in G} -e_K L'_S(0, \chi^\gamma) \chi^\gamma(\tau) w^\tau = -e_K L'_S(0, \chi^\gamma) \cdot \sum_{\sigma \in G} \chi^\gamma(\sigma) w^\sigma$$

となり,

$$R_S(\chi^\gamma) = -e_K L'_S(0, \chi^\gamma), \quad A_S(\chi^\gamma) = \frac{R_S(\chi^\gamma)}{C_S(\chi^\gamma)} = -e_K$$

を得る. よって Stark 予想:  $A_S(\chi)^\gamma = A_S(\chi^\gamma)$  が導ける (実際は, より詳しい “integral refinement” になっている). なお, 条件 (†) を満たす  $\mathbb{Q}[G]$ -同型  $f: \mathbb{Q}X \cong \mathbb{Q}U$  の存在は, 以下の事実からただちに導ける:

- $w_\gamma := \sum_{\sigma \in G} \chi^\gamma(\sigma) w^\sigma$ ,  $\varepsilon_\gamma := \sum_{\sigma \in G} \chi^\gamma(\sigma) \varepsilon^\sigma$  ( $\gamma \in \Gamma := \text{Gal}(\mathbb{Q}(\chi)/\mathbb{Q})$ ) とおくと

$$\bigoplus_{\gamma \in \Gamma} (\mathbb{C}X)^{\bar{\chi}^\gamma} = \langle w_\gamma \mid \gamma \in \Gamma \rangle_{\mathbb{C}}, \quad \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} (\mathbb{C}U)^{\bar{\chi}^\gamma} = \langle \varepsilon_\gamma \mid \gamma \in \Gamma \rangle_{\mathbb{C}}.$$

前半は (22) より. 後半も, 上記計算より  $(\text{id}_{\mathbb{C}} \otimes \lambda)(\varepsilon_\gamma) \neq 0$  が分かり,  $\varepsilon_\gamma \neq 0$ , すなわち  $(\mathbb{C}U)^{\bar{\chi}^\gamma} = \mathbb{C} \cdot \varepsilon_\gamma$  が言えることから従う.

- $w_g := \sum_{\gamma \in \Gamma} \chi^\gamma(g) w_\gamma$ ,  $\varepsilon_g := \sum_{\gamma \in \Gamma} \chi^\gamma(g) \varepsilon_\gamma$  ( $g \in G$ ) とおくと

$$\langle w_\gamma \mid \gamma \in \Gamma \rangle_{\mathbb{C}} = \langle w_g \mid g \in G \rangle_{\mathbb{C}}, \quad \langle \varepsilon_\gamma \mid \gamma \in \Gamma \rangle_{\mathbb{C}} = \langle \varepsilon_g \mid g \in G \rangle_{\mathbb{C}} \text{ で,} \\ \langle w_g \mid g \in G \rangle_{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{Q}X, \quad \langle \varepsilon_g \mid g \in G \rangle_{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{Q}U \text{ はそれぞれ } \mathbb{Q}[G]\text{-部分空間.}$$

前半の (⊃) は  $w_g, \varepsilon_g$  の定義より自明. (⊂) も関係式  $\sum_{g \in G} \bar{\chi}^\gamma(g) * _g = |G| * _\gamma$  ( $* = w, \varepsilon$ ) より従う. 後半は  $* _g = \sum_{\sigma \in G} [\sum_{\gamma \in \Gamma} \chi^\gamma(g\sigma)] * _\sigma$  ( $* = w, \varepsilon$ ) より従う.

実際,  $\mathbb{C}[G]$ -同型

$$\langle w_\gamma \mid \gamma \in \Gamma \rangle_{\mathbb{C}} \rightarrow \langle \varepsilon_\gamma \mid \gamma \in \Gamma \rangle_{\mathbb{C}}, \quad w_\gamma \mapsto \varepsilon_\gamma$$

を考えると, この写像の制限は  $\mathbb{Q}X, \mathbb{Q}U$  の部分空間の間の  $\mathbb{Q}[G]$ -同型

$$\langle w_g \mid g \in G \rangle_{\mathbb{Q}} \rightarrow \langle \varepsilon_g \mid g \in G \rangle_{\mathbb{Q}}, \quad w_g \mapsto \varepsilon_g$$

を与えている. この同型を拡張して求める  $f$  が得られる. □

注意 21. 補題 9.22 による Stark 予想, 予想  $\text{St}(K/k, S, v, w)$  の言い換えや, Rubin の定式を見ると, より正確に “integral refinement” の意味が分かる.

#### 4.1 Tate の再定式.

(代数体の) 有限次 Galois 拡大  $K/k$  とその Galois 群  $G$  に対し, 次の  $\mathbb{C}[G]$ -値  $L$  関数  $\Theta_S(s)$  を考える:

$$(23) \quad \Theta_S(s) := \sum_{\chi \in \hat{G}} L_S(s, \chi) e_{\bar{\chi}}, \\ e_\chi := \frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \bar{\chi}(\sigma) \sigma.$$

$\Theta_S(s)$  は  $\mathbb{C}$  から  $\mathbb{C}[G]$  への有理型関数である. とくに  $K/k$  がアーベル拡大で,  $S$  が任意の分岐素点を含んでいるなら

$$\Theta_S(s) = \sum_{\sigma \in G} \zeta_S(s, \sigma) \sigma^{-1}$$

となる. Tate による予想  $\text{St}(K/k, S, v)$  の言い換えは以下の通り (証明等は [Da, Conjecture 6.3.1, Proposition 6.3.3] 参照).

**補題 22.** 記号  $K/k, S, S_K, v, e_K, U = U_{K,S}, X = X_{K,S}, \lambda = \lambda_{K,S}$  は予想  $\text{St}(K/k, S, v)$  中, 及び Stark regulator  $R_S(\chi)$  の定義中と同じとする. さらに

$$U^{\text{abel}} := \{u \in U \mid K(u^{1/e_K})/k \text{ はアーベル拡大} \}$$

とおく. このとき次の同値が成り立つ.

$$\text{St}(K/k, S, v) \Leftrightarrow \Theta'_S(0)X \subset \frac{1}{e_K} \lambda(U^{\text{abel}}).$$

**注意 23.** 補題 9 より,  $r_S(\chi) = 1$  の場合の Stark 予想に関して次の同値が成り立っていた.

$$A_S(\chi, f)^\gamma = A_S(\chi^\gamma, f) \quad (\forall \gamma \in \text{Aut}(\mathbb{C})) \stackrel{r_S(\chi)=1}{\Leftrightarrow} (\pi(a, \chi) \cdot \mathbb{Q}X) \cap (\text{id}_{\mathbb{C}} \otimes \lambda)(\mathbb{Q}U) \neq \{0\}$$

右辺は  $\pi(a, \chi) \cdot \mathbb{Q}X \subset \lambda(\mathbb{Q}U)$  を意味し, とくに “ $\lambda(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \text{単数群})$ ” に関する命題である. 一方で予想  $\text{St}(K/k, S, v)$  は “ $\lambda(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \text{単数群})$ ” に含まれる “ $\mathbb{Z}$ -格子  $\frac{1}{e_K} \lambda(U^{\text{abel}})$ ” に関する命題であり integral refinement などと呼ばれる.

## 5 $\text{St}(K/\mathbb{Q}, S, \infty)$ .

この節では  $k = \mathbb{Q}, v = \infty$  の場合の証明を与える. 簡単のため  $K := \mathbb{Q}(\zeta_m + \zeta_m^{-1}) \subset \mathbb{R}$  ( $\zeta_m := \exp(\frac{2\pi i}{m}) \in \mathbb{C}$ ) とする. このとき  $\mathbb{Q}$  の無限素点  $\infty$  は完全分解しており,  $e_K := |\mu_K| = |\{\pm 1\}| = 2$  である. よって  $S := \{p|m\} \cup \{\infty\}, v := \infty$  とすれば, 予想  $\text{St}(K/k, S, v)$  の仮定を満たす ( $w$  は埋め込み  $K \subset \mathbb{R}$  に対応するものをとる).

**注意 24.** この場合から一般の  $K, S$  に対する予想  $\text{St}(K/\mathbb{Q}, S, \infty)$  が導かれることに注意 ( “Stark-Tate の定式化”, §3.1-6,7). さらに Stark 予想の  $k = \mathbb{Q}, K/\mathbb{Q}$ : アーベル拡大の場合も導かれる. なぜなら, Stark 予想は既約指標  $\chi$  の場合に考えれば十分で, さらに成立は  $S$  の取り方によらないので, 最小の  $S$  をとれば  $r_S(\chi) = 0, 1$  となる.  $r_S(\chi) = 0$  の場合は Siegel の結果より従い,  $r_S(\chi) = 1$  の場合は予想  $\text{St}(K/\mathbb{Q}, S, \infty)$  から従う ( 同上, §3.1-4).

Galois 群の元を表すのに以下の記号を用いる:

$$\begin{aligned} G &:= \text{Gal}(K/\mathbb{Q}) && \cong (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times / \{\pm 1\} \\ \sigma_{\pm a} &: \zeta_m + \zeta_m^{-1} \mapsto \zeta_m^a + \zeta_m^{-a} && \leftrightarrow \pm a \bmod m \quad (0 < a < m, (a, m) = 1). \end{aligned}$$

このとき

$$\begin{aligned} \zeta_S(s, \sigma_{\pm a}) &= \sum_{(n) \subset \mathbb{Z}, (n, m)=1, ((n), K/\mathbb{Q})=\sigma_{\pm a}} N(n)^{-s} \\ &= \sum_{n=1, n \equiv \pm a \bmod m}^{\infty} n^{-s} \\ &= \zeta(s, m, a) + \zeta(s, m, m-a) \end{aligned}$$

となる. ただし Hurwitz ゼータ関数  $\zeta(s, m, a)$  ( $m, a \in \mathbb{R}_{>0}$ ) を

$$\zeta(s, m, a) := \sum_{n=0}^{\infty} (a + nm)^{-s}$$

とおいた. ここで Lerch の公式

$$\zeta'(0, m, a) = \log\left(\Gamma\left(\frac{a}{m}\right)(2\pi)^{-\frac{1}{2}} m^{\frac{m-2a}{2m}}\right)$$

を使うと

$$\begin{aligned} \zeta'_S(0, \sigma_{\pm a}) &= \zeta'(0, m, a) + \zeta'(0, m, m-a) \\ &= \log\left(\Gamma\left(\frac{a}{m}\right)(2\pi)^{-\frac{1}{2}} m^{\frac{m-2a}{2m}}\right) + \log\left(\Gamma\left(\frac{m-a}{m}\right)(2\pi)^{-\frac{1}{2}} m^{\frac{2a-m}{2m}}\right) \\ &= \log\left(\Gamma\left(\frac{a}{m}\right)\Gamma\left(\frac{m-a}{m}\right)(2\pi)^{-1}\right) \end{aligned}$$

を得る. さらに Euler の公式

$$\frac{\pi}{\sin(z\pi)} = \Gamma(z)\Gamma(1-z), \quad \sin(z) = \frac{\exp(zi) - \exp(-zi)}{2i}$$

を用いることにより

$$\begin{aligned} \exp(-2\zeta'_S(0, \sigma_{\pm a})) &= \left(\frac{2\pi}{\Gamma(\frac{a}{m})\Gamma(\frac{m-a}{m})}\right)^2 \\ &= (2\sin(\frac{a}{m}\pi))^2 \\ &= -(\zeta_{2m}^a - \zeta_{2m}^{-a})^2 = 2 - (\zeta_m^a + \zeta_m^{-a}) \end{aligned}$$

が分かる. よって  $\varepsilon := 2 - (\zeta_m + \zeta_m^{-1}) \in K$  に対して

- $\varepsilon = -\zeta_m^{-1}(\zeta_m - 1)^2$  と書けるので, 円単数の理論より  $m$  が  $p$ -冪であれば  $\{p, \infty\}$ -単数, それ以外であれば  $\{\infty\}$ -単数である.
- $\varepsilon^{\sigma_{\pm a}} = \exp(-2\zeta'_S(0, \sigma_{\pm a}))$ .
- $\varepsilon^{1/2} = \frac{\zeta_{2m} - \zeta_{2m}^{-1}}{i} \in \mathbb{Q}(\zeta_{4m})$  より  $K(\varepsilon^{1/2})/\mathbb{Q}$  はアーベル拡大.

であることが分かり, 予想  $\text{St}(K/\mathbb{Q}, S, \infty, w)$  が成立している.

注意 25.  $k = \mathbb{Q}$  での証明の類似を考えるなら,  $v$  が無限素点の場合の予想  $\text{St}(K/k, S, v, w)$  の解決には

- “特殊関数” の計算 ( $k = \mathbb{Q}$  なら Lerch の公式, Euler の公式)
- “特殊値” の代数性, 単数性, 相互法則の証明 ( $k = \mathbb{Q}$  なら円単数の性質を利用)

が必要であると思われる. 実際,  $k$  が虚二次体の場合は Kronecker's limit formula と楕円単数を使った証明がある (小野寺氏の解説参照). また, 前半部分に関する結果がいくつかある (佐藤氏, 広瀬氏の解説参照. 総実体の場合は [Yo] において深い考察がなされている).

## 6 $\exp(\zeta'_S(0, \sigma))$ が超越数となる場合.

アーベル拡大  $K/k$  で  $k$  が総実体の場合を考える.  $K$  が実素点  $w$  を持てば, その下の  $k$  の実素点  $v$  が完全分解することになり, 予想  $\text{St}(K/k, S, v, w)$  の条件を満たす. とくに予想  $\text{St}(K/k, S, v, w)$  を仮定すれば

$K$  が総虚でなければ  $\exp(\zeta'_S(0, \sigma))$  は代数的数

である. 一方で吉田敬之氏の結果として,  $S$  を最小にとれば

$K$  が CM 体の場合の  $\exp(\zeta'_S(0, \sigma))$  を “用いて” 任意の CM 周期 が書ける

という予想がある (補足 26). CM 周期とは, 虚数乗法を持つアーベル多様体の (ある条件を満たす) 微分形式の積分値のことで, とくにその多くが超越数であると思われる. 例えば, 前節の状況から

$$K/k = \mathbb{Q}(\zeta_m + \zeta_m^{-1})/\mathbb{Q} \implies K/k = \mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q}$$

と変更すれば,  $K$  は CM 体で, とくに  $S := \{p|m\} \cup \{\infty\}$  に含まれるどの素点も  $K/k$  で完全分解しておらず, 予想  $\text{St}(K/k, S)$  の条件を満たしていない. Galois 群の元は

$$\begin{aligned} G := \text{Gal}(K/\mathbb{Q}) &\cong (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \\ \sigma_a: \zeta_m &\mapsto \zeta_m^a \quad \leftrightarrow \quad a \bmod m \quad (0 < a < m, (a, m) = 1). \end{aligned}$$

と表され

$$\zeta_S(s, \sigma_a) = \sum_{n=1, n \equiv a \bmod m}^{\infty} n^{-s} = \zeta(s, m, a)$$

となる. よって Lerch の公式より

$$(24) \quad \exp(\zeta'_S(0, \sigma_a)) = \Gamma\left(\frac{a}{m}\right)(2\pi)^{-\frac{1}{2}} m^{\frac{m-2a}{2m}}$$

である. 一方で Fermat 曲線  $F_m: x^m + y^m = 1$  を考えると, そのヤコビ多様体が  $K = \mathbb{Q}(\zeta_m)$  による虚数乗法を持ち, 第二種微分形式  $\eta_{i,j} := x^{i-1}y^{j-m}dx$  ( $0 < i, j < m, i+j \neq m$ ) と, 任意の閉積分路  $\gamma \subset F_m(\mathbb{C})$  に対し値  $\int_\gamma \eta_{i,j}$  は円分体  $\mathbb{Q}(\zeta_m)$  の CM 周期を与えている. この場合は

$$(25) \quad \int_\gamma \eta_{i,j} \sim \frac{\Gamma(\frac{i}{m})\Gamma(\frac{j}{m})}{\Gamma(\frac{i+j}{m})}$$

が成り立つことが知られている (Rohrlich の結果). 式 (24), (25) が上記の吉田氏の予想の特別な場合を与えている. ただし

$$a \sim b \Leftrightarrow b \neq 0, a/b \in \overline{\mathbb{Q}}^\times$$

と定義する. なお CM 周期の間にはいくつかの単項関係式が知られている. とくに

$$(26) \quad \int_{\gamma} \eta_{i,j} \int_{\gamma'} \eta_{m-i,m-j} \sim \pi$$

が成り立つ. 式 (25),(26) を組み合わせて, 関係式

$$(27) \quad \frac{\Gamma(\frac{i}{m})\Gamma(\frac{j}{m})\Gamma(\frac{m-i}{m})\Gamma(\frac{m-j}{m})}{\Gamma(\frac{i+j}{m})\Gamma(\frac{2m-i-j}{m})} \sim \pi$$

を得ることができる. さらにこの関係式 (とガンマ関数の関数等式  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ ) を組み合わせて, 関係式

$$\Gamma(\frac{i}{m})\Gamma(\frac{m-i}{m}) \sim \pi$$

を示すことができ, Euler の公式を使わずに  $k = \mathbb{Q}$ ,  $v = \infty$  の場合の Stark 単数の代数性を言える. 例えば, 式 (27) に  $(m, i, j) = (5, 1, 1), (5, 2, 2)$  を代入すると関係式

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{5})^2\Gamma(\frac{4}{5})^2}{\Gamma(\frac{2}{5})\Gamma(\frac{8}{5})} \sim \pi, \quad \frac{\Gamma(\frac{2}{5})^2\Gamma(\frac{3}{5})^2}{\Gamma(\frac{4}{5})\Gamma(\frac{6}{5})} \sim \pi$$

を得る. 左式の二乗と右式を掛け合わせ,  $\Gamma(\frac{8}{5}) \sim \Gamma(\frac{3}{5})$ ,  $\Gamma(\frac{6}{5}) \sim \Gamma(\frac{1}{5})$  に注意すると, 関係式

$$\Gamma(\frac{1}{5})^3\Gamma(\frac{4}{5})^3 \sim \frac{\Gamma(\frac{1}{5})^4\Gamma(\frac{4}{5})^4\Gamma(\frac{2}{5})^2\Gamma(\frac{3}{5})^2}{\Gamma(\frac{2}{5})^2\Gamma(\frac{8}{5})^2\Gamma(\frac{4}{5})\Gamma(\frac{6}{5})} \sim \pi^3$$

が手に入る. この式は  $\mathbb{Q}(\zeta_5 + \zeta_5^{-1})/\mathbb{Q}$  の場合の Stark 単数

$$\exp(-2\zeta'_S(0, \sigma_{\pm 1})) = \left(\frac{2\pi}{\Gamma(\frac{1}{5})\Gamma(\frac{4}{5})}\right)^2$$

の代数性を与えている. なお, CM 周期だけでなくその  $p$ -進類似まで考察すると,  $k = \mathbb{Q}$ ,  $v = \infty$  の場合の Stark 単数の相互法則に関する部分的結果も得られる (preprint 準備中). 更に, [Yo] 中で考察されている “吉田氏の予想と Stark 予想との関係” も非常に興味深い.

補足 26. 吉田氏の予想を, より正確な形で書いておく (詳しくは [Yo] 参照).

- (新谷氏, 吉田氏の結果) アーベル拡大  $K/k$  で  $k$  が総実体の場合, 自然な分解

$$\exp(\zeta'_S(0, \sigma)) = \prod_{v|\infty} \exp(X_{K/k,S}(\sigma, v))$$

が得られる. ただし  $v$  は  $k$  の実素点全体を走る. なお値  $\exp(X_{K/k,S}(\sigma, v))$  は, 新谷氏の コーン分解 と呼ばれる操作と, Barnes 氏の 多重ガンマ関数 の特殊値を用いて定義され,  $F$  の元の有理数乗倍を除いて一意的に決まる.

- (志村氏の結果)  $L$  を CM 体 とし, 代数体上定義され, CM 型  $(L, \Phi)$  を持つアーベル多様体  $A$  を考える. とくに  $\phi \in \Phi$  に対し  $x \in K$  が  $x^\phi$  倍として作用する正則一次形式  $0 \neq \omega_\phi \in H_{\text{dR}}^1(A, \overline{\mathbb{Q}})$  が取れる. このとき積分値  $\int_\gamma \omega_\phi \bmod \overline{\mathbb{Q}}^\times$  は  $A, \omega_\phi, 0 \neq \gamma \in H_1(A(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$  の取り方によらない. さらに自然な分解

$$\int_\gamma \omega_\phi \sim \pi \prod_{\psi \in \Phi} p_L(\phi, \psi)$$

が得られる. なお, 埋め込みの組  $\phi, \psi: L \hookrightarrow \mathbb{C}$  に対して定まる値  $p_L(\phi, \psi)$  は志村氏の CM 周期記号 と呼ばれ, 代数的数倍を除いて一意的に決まる.

- (CM 周期に関する吉田予想) 任意の  $p_L(\phi, \psi)$  は有限積

$$p_L(\phi, \psi) \sim \pi^{r_\pi} \prod_{K/k, S, \sigma, v} \exp(X_{K/k, S}(\sigma, v))^{r(L, \phi, \psi, K/k, S, \sigma, v)}$$

の形に書ける. ただし  $r_\pi, r(L, \phi, \psi, K/k, S, \sigma, v)$  は (いくつかの手順が必要ではあるが) 明示的に書ける有理数である.

## 7 $\text{St}(K/\mathbb{Q}, S, p)$ .

有限素点  $v = \mathfrak{p}, w = \mathfrak{p}$  の場合には, 予想  $\text{St}(K/k, S, \mathfrak{p}, \mathfrak{p})$  は イデアルの単項化 に関する命題になる.  $|S| > 2$  とし, 素点の集合  $S_0 := S - \{\mathfrak{p}\}$  を考える.

練習問題 27. 同値

$$\text{St}(K/k, S, \mathfrak{p}, \mathfrak{p}) \Leftrightarrow \exists \varepsilon \in K^\times \text{ s.t. } \begin{cases} \forall w' | \infty, |\varepsilon|_{w'} = 1, \\ \theta := \sum_{\sigma \in G} e_K \zeta_{S_0}(0, \sigma) \sigma^{-1} \text{ に対し } \theta \mathfrak{p} = (\varepsilon), \\ K(\varepsilon^{1/e_K})/k \text{ はアーベル拡大.} \end{cases}$$

を示せ.

注意 28. Deligne-Ribet の結果より  $e_K \zeta_{S_0}(0, \sigma) \in \mathbb{Z}$  ( $\sigma \in G$ ) が成り立っている. とくに  $\theta \in \mathbb{Z}[G]$ . なお, 元  $\sum_{\sigma \in G} n_\sigma \sigma \in \mathbb{Z}[G]$  はイデアル  $\mathfrak{a}$  に  $(\sum_{\sigma \in G} n_\sigma \sigma) \mathfrak{a} := \prod_{\sigma \in G} \sigma(\mathfrak{a})^{n_\sigma}$  で作用する.

練習問題 27 の解答.  $\mathfrak{p}$  が完全分解より  $(\mathfrak{p}, K/k) = \text{id}_K$  が成り立つことに注意すると

$$\begin{aligned} \zeta_S(s, \sigma) &= \sum_{(\mathfrak{a}, S)=1, (\mathfrak{a}, K/k)=\sigma} N \mathfrak{a}^{-s} \\ &= \sum_{(\mathfrak{a}, S_0)=1, (\mathfrak{a}, K/k)=\sigma} N \mathfrak{a}^{-s} - \sum_{(\mathfrak{a}, S_0)=1, (\mathfrak{a} \mathfrak{p}, K/k)=(\mathfrak{a}, K/k)=\sigma} N(\mathfrak{p} \mathfrak{a})^{-s} \\ &= \zeta_{S_0}(s, \sigma) - N \mathfrak{p}^{-s} \zeta_{S_0}(s, \sigma) \\ &= (1 - N \mathfrak{p}^{-s}) \zeta_{S_0}(s, \sigma) \end{aligned}$$

と変形できる. すなわち

$$\zeta'_S(0, \sigma) = \zeta_{S_0}(0, \sigma) \cdot \log N\mathfrak{p}$$

が成り立つ. よって予想  $\text{St}(K/k, S, \mathfrak{p}, \mathfrak{P})$  の前半は以下のように言い換えられる:  $K$  の任意の素点  $w'$  に対し

- $w'$  が  $\mathfrak{p}$  上でないなら  $|\varepsilon|_{w'} = 1$ .
- $w'$  が  $\mathfrak{p}$  上なら  $w' = \mathfrak{P}^\sigma$  ( $\exists \sigma \in G$ ) と書けるので

$$\begin{aligned} e_K \zeta_{S_0}(0, \sigma^{-1}) \cdot \log N\mathfrak{p} &= e_K \zeta'_S(0, \sigma^{-1}) \\ &\stackrel{\text{St}(K/k, S, \mathfrak{p}, \mathfrak{P})}{=} -\log |\varepsilon^{\sigma^{-1}}|_{\mathfrak{P}} = -\log |\varepsilon|_{\mathfrak{P}^\sigma} = \text{ord}_{\mathfrak{P}^\sigma} \varepsilon \cdot \log N\mathfrak{P}^\sigma \end{aligned}$$

が成り立つ. さらに  $\mathfrak{p}$  は完全分解より  $N\mathfrak{P}^\sigma = N\mathfrak{p}$  だから

$$\text{ord}_{\mathfrak{P}^\sigma} \varepsilon = e_K \zeta_{S_0}(0, \sigma^{-1})$$

が成り立つ.

これらの言い換えより題意を得る. □

**注意 29.** 上記の予想  $\text{St}(K/k, S, \mathfrak{p}, \mathfrak{P})$  の言い換えを推し進めると  $\text{Ann}_{\mathbb{Z}[G]} \text{Cl}_K$  に関する Brumer-Stark 予想 になる (本報告集 “Rubin’s integral refinement”, および三浦氏の解説参照).

以下, 一番簡単な場合  $\text{St}(\mathbb{Q}(\zeta_{p-1})/\mathbb{Q}, S := \{l|(p-1)\} \cup \{\infty\}, p \neq 2, 3)$  を考える. このとき  $p$  は  $\mathbb{Q}(\zeta_{p-1})/\mathbb{Q}$  で完全分解し,  $e_{\mathbb{Q}(\zeta_{p-1})} = p-1$  となることに注意.  $p$  の上にある  $\mathbb{Q}(\zeta_{p-1})$  の素イデアル  $\mathfrak{P}$  を一つ選んで固定しておく. ここで  $G$  の元を

$$\begin{aligned} G = \text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{p-1})/\mathbb{Q}) &\cong (\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z})^\times \\ \sigma_a: \zeta_{p-1} &\mapsto \zeta_{p-1}^a \quad \leftrightarrow \quad a \bmod (p-1) \quad (0 < a < p-1, (a, p-1) = 1) \end{aligned}$$

で表すとき  $S_0 = \{l|(p-1)\} \cup \{\infty\}$  に対して

$$\zeta_{S_0}(0, \sigma_a) = \zeta(0, p-1, a) = \frac{1}{2} - \frac{a}{p-1}$$

となることが分かる. よって練習問題 27 により, 予想  $\text{St}(\mathbb{Q}(\zeta_{p-1})/\mathbb{Q}, S, p)$  の解決には以下の性質を満たす元  $\varepsilon \in \mathbb{Q}(\zeta_{p-1})$  の存在が問題となる:

$$(28) \quad \begin{cases} \forall w' | \infty, |\varepsilon|_{w'} = 1. \\ \theta \mathfrak{P} = (\varepsilon). \text{ ただし } \theta := \sum_{a=1, (a, p-1)=1}^{p-2} \left(\frac{p-1}{2} - a\right) \sigma_a^{-1}. \\ \mathbb{Q}(\zeta_{p-1}, \varepsilon^{1/(p-1)})/\mathbb{Q} \text{ はアーベル拡大.} \end{cases}$$

実際, 以下で定義する Gauss 和 により, 上記の性質をみたす元  $\varepsilon$  が構成できる.

定義 30. 準同型  $\chi: (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$  に対し Gauss 和  $G(\chi) \in \mathbb{Z}[\zeta_{p(p-1)}]$  を

$$(29) \quad G(\chi) := \sum_{x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times} \chi(x) \zeta_p^x$$

で定める ( $|(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times| = p-1$  より  $\text{Im}(\chi) \subset \mathbb{Z}[\zeta_{p-1}]$ ). このとき以下が成り立つ:

- $G(\chi) \overline{G(\chi)} = p$ .
- $\tau_b \in \text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{p(p-1)})/\mathbb{Q})$ ,  $\tau_b(\zeta_{p(p-1)}) := \zeta_{p(p-1)}^b$  に対し  $G(\chi)^{\tau_b} = \chi(b)^{-1} G(\chi^b)$ .

とくに, Gauss 和  $G(\chi)$  は  $\{p, \infty\}$ -単数であることが分かる.

$\mathbb{Z}[\zeta_{p-1}]$  の  $p$  上の素イデアル  $\mathfrak{p}$  に対し

$$\chi_{\mathfrak{p}}(x) \bmod \mathfrak{p} = x \ (\in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{Z}[\zeta_{p-1}]/\mathfrak{p}) \quad (\forall x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times)$$

を満たす唯一の準同型  $\chi_{\mathfrak{p}}: (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \rightarrow \mathbb{Z}[\zeta_{p-1}]^\times \subset \mathbb{C}^\times$  が定まる. このとき

$$G(\chi_{\mathfrak{p}})^{p-1} \in \mathbb{Z}[\zeta_{p-1}], \quad (G(\chi_{\mathfrak{p}})^{p-1}) = \left( \sum_{a=1, (a,p-1)=1}^{p-2} (p-1-a) \sigma_a^{-1} \right) \mathfrak{p}$$

が成り立つことが示せる. よって

$$\varepsilon := \frac{G(\chi_{\mathfrak{p}})^{p-1}}{p^{\frac{p-1}{2}}} \in \mathbb{Q}(\zeta_{p-1})$$

とおけば, これは (strong)  $\{p\}$ -単数になり,  $\theta\mathfrak{p} = (\varepsilon)$  を満たし,  $\varepsilon^{1/(p-1)} \in \mathbb{Q}(\zeta_{p(p-1)}, \zeta_4)$  となる. とくに条件 (28) を満たすので, 予想  $\text{St}(\mathbb{Q}(\zeta_{p-1})/\mathbb{Q}, S, p)$  は成立する.

注意 31.  $K$  が一般の場合の予想  $\text{St}(K/\mathbb{Q}, S, p)$  も, より一般的な Gauss 和を用いて具体的に  $\varepsilon$  を構成することによって解決される.

## 8 Gross-Stark 予想.

有限素点の場合の予想  $\text{St}(K/k, S, \mathfrak{p}, \mathfrak{p})$  の言い換えにおいて,  $e_K := |\mu_K|$  の代わりに十分大きな自然数  $M$  をとれば

$$\exists \varepsilon_M \in K^\times \text{ s.t. } \theta := \sum_{\sigma \in G} M \zeta_{S_0}(0, \sigma) \sigma^{-1} \text{ に対し } \theta\mathfrak{p} = (\varepsilon_M)$$

の部分は自明である (例えば  $M = e_K h_K$ ). とくに (strong)  $\{\mathfrak{p}\}$ -単数  $\varepsilon_M \in K^\times$  で

$$\log |\varepsilon_M^\sigma|_{\mathfrak{p}} = -M \zeta'_S(0, \sigma) \quad (\forall \sigma \in G)$$

を満たすものが存在し, これは  $\mu_K$  の元倍を除いて一意である.

予想 32 (Gross-Stark 予想).  $K/k, S, \mathfrak{p}, \mathfrak{P}, M, \varepsilon_M$  は上記の通りとし,  $\mathfrak{p}|p$  となる有理素数  $p$  をとる. 次を仮定する.

$p$  上にある  $k$  の素点は全て  $S$  に含まれている.

このとき  $\zeta_S(s, \sigma)$  の  $s = 0$  付近での  $p$  進補間関数  $\zeta_{p,S}(s, \sigma)$  に対し

$$(30) \quad \log_p(N_{K_{\mathfrak{P}}/\mathbb{Q}_p} \varepsilon_M^\sigma) = -M \zeta'_{S,p}(0, \sigma) \quad (\forall \sigma \in G)$$

が成り立つ.

注意 33. Gross-Stark 予想は  $k = \mathbb{Q}$  の場合正しい (Gross による. Ferrero-Greenberg 公式, Gross-Koblitz 公式を使う). さらに近年 Dasgupta-Darmon-Pollack により大きな進展があった (山上氏, 河村氏の解説参照).

補足 34.  $N_{K_{\mathfrak{P}}/\mathbb{Q}_p}(\varepsilon_M^\sigma) \in \mathbb{Q}_p$  ではなく,  $\varepsilon_M^\sigma \in K_{\mathfrak{P}} = k_{\mathfrak{P}}$  に関する予想もある (Gross, 加塩-吉田, Dasgupta).

注意 35. 有限素点のとき, 予想  $\text{St}(K/k, S, \mathfrak{p})$  は, Stark 単数  $\varepsilon$  の  $\mathfrak{p}$  上の素点での order を述べている. 一方 Gross-Stark 予想は, Stark 単数  $\varepsilon (= \varepsilon_M^{\frac{e}{M}})$  (の Norm) の  $\mathfrak{p}$  進数としての値 を述べている. 後者は  $p$  進特殊関数を用いた類体構成 などへの応用が考えられる.