Rubin's integral refinement

加塩 朋和 (東京理科大学)

第20回整数論サマースクール『Stark 予想』 四日目 (2012年9月5日)

概要.

ここでは Stark 予想 (本報告集 “Stark-Tate の定式化” 予想, 3) のアーベル拡大の場合の精密化 (Rubin's integral refinement for the abelian Stark conjecture, 予想 50 = 予想 RS($K/k, S, T, r$)) を取り扱う. また, 有限素点の場合に関連する予想群を定式化し, それらの関係を簡単に述べる. 後者の詳しい内容は, 本報告集の三浦氏の解説に譲る.

integral refinement (for the abelian Stark conjecture) とは？

類数公式の例:

$$\zeta_k(s) = \frac{-h_k R_k}{e_k} s^{r_{S_\infty}(1_G)} + O(s^{r_{S_\infty}(1_G)+1}) \quad (s \to 0)$$

で分かるように, Artin L 関数の先頭係数は regulator 以外にも不変量を含んでおり, その情報まで取り出す試みが “integral refinement” である. ここでは Rubin による定式 (大域体の有限次アーベル拡大の場合に, 追加の仮定 (H_r) の下での予想) を見ていく.

注意 36. 非可換拡大の場合も Burns などによって定式化されているが, ここでは扱わない (小笠原氏, 野村氏の解説参照).

9 アーベル拡大の場合の Stark 予想の言い換え.

以降, 特に断らない限り, 以下の記号を用いる:

- K/k: 大域体の有限次アーベル拡大, $G := \mathrm{Gal}(K/k)$, $\widehat{G}$: G の既約指標全体のなす群.
- μ_K : K に含まれる 1 の冪根全体のなす群, $e_K := |\mu_K|$.
- S, T: k の素点からなる空でない有限集合, S_K, T_K: それぞれ S, T に含まれる素点上にある K の素点全体のなす集合.
- $r \in \mathbb{Z}, \geq 0$.

このとき, 各 r に対して以下の条件を考える.

定義 37 (仮定 ($\mathbf{H_r}$)). 1. S は無限素点と, K/k での分岐素点を全て含む.

2. $T \cap S = \emptyset$.

3. $\{\zeta \in \mu_K \mid \zeta \equiv 1 \bmod T_K\} = \{1\}$. ただし $x \equiv 1 \bmod T_K \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall w \in T_K,\, x \equiv 1 \bmod w$.

4. S は K/k で完全分解する素点を r 個以上含む.

5. $|S| \geq r+1$.

補足 38. 条件 3 は標数 $p \neq 0$ なら ($T \neq \emptyset$ より) 自動的に成り立つ. また標数 0 の場合も

$$\exists \mathfrak{P}, \mathfrak{Q} \in T_K \text{ s.t. } (N\mathfrak{P}, N\mathfrak{Q}) = 1, \text{ または } \exists \mathfrak{P} \in T_K \text{ s.t. } N\mathfrak{P} > e_K$$

を満たせば成立する.

注意 39. $r' < r$ なら, 仮定 $(H_r) \Rightarrow$ 仮定 $(H_{r'})$ が成り立つ. とくに $r = 0$ の場合, 仮定 (H_0)-4,5 は 自明である. すなわち

$$\textbf{仮定 } (\mathbf{H_0}): \begin{cases} 1.\ S \text{ は無限素点と, } K/k \text{ での分岐素点を全て含む.} \\ 2.\ T \cap S = \emptyset. \\ 3.\ \{\zeta \in \mu_K \mid \zeta \equiv 1 \bmod T_K\} = \{1\}. \end{cases}$$

注意 40. 仮定 (H_r)-4,5 より

$$r_S(\chi) = \mathrm{ord}_{s=0} L_S(s,\chi) \geq r \quad (\forall \chi \in \widehat{G}) \tag{31}$$

が導かれる ($\because$ $r_S(\chi)$ の公式より. 本報告集 “Stark-Tate の定式化”, 式 (13) 参照).

定義 41 (G-同変 L 関数). $\mathbb{C}[G]$-値有理型関数 $\Theta_S(s)$, $\mathbb{C}[G]$-値正則関数 $\Theta_{S,T}(s)$ を以下で定める.

$$\begin{aligned} \Theta_S(s) &:= \sum_{\chi \in \widehat{G}} L_S(s,\chi) e_{\overline{\chi}}, \\ \Theta_{S,T}(s) &:= \left(\prod_{\mathfrak{p} \in T} (1 - \mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}}^{-1} N\mathfrak{p}^{1-s}) \right) \Theta_S(s). \end{aligned} \tag{32}$$

ただし $e_\chi := \frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \overline{\chi}(\sigma)\sigma$ である.

注意 42. 以下の意味で, 関数 $\Theta_S(s)$ の “分母を払った” ものが関数 $\Theta_{S,T}(s)$ である.

- $\Theta_S(1-n) \in \mathbb{Q}[G]$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) (Siegel, etc).
- 仮定 (H_0) のもとで $\Theta_{S,T}(1-n) \in \mathbb{Z}[G]$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) (Deligne-Ribet, etc).

また $\delta_T(n) := \prod_{\mathfrak{p}\in T}(1-\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}}^{-1}N\mathfrak{p}^n)$ とおけば, 仮定 (H_0)-1 を満たす S に対して

$$\mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}[G]}\,\mu_K^{\otimes n} = \langle \delta_T(n) \mid T \text{ は仮定 } (H_0) \text{ を満たす} \rangle_{\mathbb{Z}[G]}$$

が成り立つ (Coates, etc).

定義 43.

$$\Theta_S^{(r)}(0) := \lim_{s\to 0}\frac{\Theta_S(s)}{s^r}, \quad \Theta_{S,T}^{(r)}(0) := \lim_{s\to 0}\frac{\Theta_{S,T}(s)}{s^r}. \tag{33}$$

これらは仮定 (H_r) のもとで収束する. また $\delta_T := \delta_T(1) = \prod_{\mathfrak{p}\in T}(1-\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}}^{-1}N\mathfrak{p})$ とおけば $\delta_T \in \mathbb{Q}[G]^\times$ であり

$$\Theta_{S,T}^{(r)}(0) = \delta_T\Theta_S^{(r)}(0) \tag{34}$$

が成り立つ.

S-整数環 (実際は S_K-整数環) を

$$\mathcal{O}_S := \mathcal{O}_{K,S} := \{x \in K \mid \text{任意の } K \text{ の有限素点 } \mathfrak{P} \notin S_K \text{ に対して } |x|_{\mathfrak{P}} \le 1\}$$

と定める. さらに $U_S := U_{K,S} := \mathcal{O}_{K,S}^\times$ とし

$$U_{S,T} := U_{K,S,T} := \{x \in U_{K,S} \mid x \equiv 1 \bmod T_K\}$$

とおく. ここで $[U_S : U_{S,T}] < \infty$ であり,

$$\text{仮定 } (H_r)\text{-3} \Rightarrow U_{S,T} \text{ は torsion を持たない}$$

ことに注意.

定義 44 (G-同変 regulator map). 仮定 (H_r) が成立しているとする. とくに S は r 個の完全分解している素点 $v_1, v_2, \ldots, v_r$ を含んでいる. 各 v_i 上にある K の素点 w_i を一つずつ選び, 固定しておく. このとき $W := (w_1, w_2, \ldots, w_r)$ に付随する G-同変 regulator map $R_W \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}\left(\bigwedge_{\mathbb{Z}[G]}^r U_{S,T}, \mathbb{C}[G]\right)$ を

$$R_W\colon \bigwedge_{\mathbb{Z}[G]}^r U_{S,T} \to \mathbb{C}[G],\ u_1\wedge\cdots\wedge u_r \mapsto \det(-\sum_{\sigma\in G}\log|u_i^{\sigma^{-1}}|_{w_j}\sigma)_{1\le i,j\le r} \tag{35}$$

で定める.

補足 45. 単数基準 $R_k := |\det(\log|\varepsilon_i|_{\infty_j})_{1\le i,j\le r}|$ ($\mathcal{O}_k^\times =: \langle \varepsilon_i \mid 1 \le i \le r\rangle \times \mu_k$, $S_\infty =: \{\infty_j \mid 1 \le j \le r+1\}$) は, 以下の pairing の像 (の絶対値) であった:

$$\begin{array}{ccccccc} \bigwedge_{\mathbb{Z}}^r \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{O}_k^\times, \mathbb{R}) & \times & \bigwedge_{\mathbb{Z}}^r \mathcal{O}_k^\times & \to & \mathbb{R}, \\ (\ \log|\cdot|_{\infty_1}\wedge\cdots\wedge\log|\cdot|_{\infty_r} & , & \varepsilon_1\wedge\cdots\wedge\varepsilon_r\ ) & \mapsto & \det(\log|\varepsilon_i|_{\infty_j})_{1\le i,j\le r}. \end{array}$$

この pairing を

$$\mathbb{Z}\text{-加群}, \mathbb{R}\text{-値}, \text{単数群 } \mathcal{O}_k^\times \Rightarrow \mathbb{Z}[G]\text{-加群}, \mathbb{C}[G]\text{-値}, U_{S,T}$$

と置き換えると, 次の $\mathbb{Z}[G]$-双線形な pairing を得る:

$$\begin{array}{ccccccc} \bigwedge^r_{\mathbb{Z}[G]} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(U_{S,T}, \mathbb{C}[G]) & \times & \bigwedge^r_{\mathbb{Z}[G]} U_{S,T} & & \to & & \mathbb{C}[G], \\ (\quad \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_r & , & \varepsilon_1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon_r &) & \mapsto & & \det(\varphi_j(\varepsilon_i))_{1 \le i,j \le r}. \end{array}$$

ただし $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(U_{S,T}, \mathbb{C}[G])$ への $\sigma \in G$ の作用は $(\sigma\varphi)(u) := \varphi(\sigma u) = \sigma(\varphi(u))$ で定める. Rubin の regulator map R_W で単数と paring をとっている相手

$$[u \mapsto -\sum_{\sigma \in G} \log |u^{\sigma^{-1}}|_{w_j} \sigma] \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(U_{S,T}, \mathbb{C}[G])$$

は (単数基準や Stark regulator の定義にも表れる) 対数的埋め込み

$$\lambda_S \colon U_{S,T} \hookrightarrow U_S \to \mathbb{C}X_S, \quad u \mapsto \sum_{w \in S_K} \log |u|_w w$$

と K の各素点 w_j に付随する準同型

$$\left[\phi_{w_j} \colon \sum_{w \in S_K} n_w w \mapsto n_{w_j} \right] \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X_S, \mathbb{Z}),$$

及び, 同一視

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X_S, \mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(X_S, \mathbb{Z}[G]), \ \phi \mapsto \left[\widetilde{\phi} \colon x \mapsto \sum_{\sigma \in G} \phi(x^{\sigma^{-1}}) \sigma \right],$$

を組み合わせた写像

$$(-1) \cdot (\mathrm{id}_{\mathbb{C}} \otimes \widetilde{\phi_{w_j}}) \circ \lambda_S \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(U_{S,T}, \mathbb{C}[G])$$

であることが分かる.

“位数 r' 成分” への idempotent $e_{S,r'}$ を

(36)
$$e_{S,r'} := \sum_{\chi \in \widehat{G}, \ r_S(\chi) = r'} e_\chi \in \mathbb{Q}[G]$$

で定める ($e_{S,r'} \in \mathbb{Q}[G]$ は $\forall \gamma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$, $r_S(\chi) = r_S(\chi^\gamma)$ より従う). 仮定 (H_r)-4,5 より $r_S(\chi) \ge r$ $(\forall \chi \in \widehat{G})$ だから $r' < r \Rightarrow e_{S,r'} = 0$. さらに $r_S(\chi) > r$ なら $\Theta_{S,T}^{(r)}(0)$ の e_χ 成分 $(\fallingdotseq L_S^{(r)}(0, \chi)) = 0$ だから

(37)
$$\Theta_{S,T}^{(r)}(0) \in e_{S,r}\mathbb{C}[G]$$

が成り立つ. また単数定理より, $\mathbb{C}[G]$-準同型写像 $\mathrm{id}_{\mathbb{C}} \otimes R_W$ の制限は, 同型:

(38)
$$\mathrm{id}_{\mathbb{C}} \otimes R_W \colon e_{S,r} \left(\mathbb{C} \bigwedge_{\mathbb{Z}[G]}^r U_{S,T} \right) \cong e_{S,r}\mathbb{C}[G]$$

を導くことが分かる (補足 46) ので

$$\varepsilon_{S,T,r} := (\mathrm{id}_{\mathbb{C}} \otimes R_W)^{-1}\left(\Theta_{S,T}^{(r)}(0)\right) \in e_{S,r}\left(\mathbb{C}\bigwedge_{\mathbb{Z}[G]}^{r} U_{S,T}\right)$$

が定義される.

補足 46. 写像 $\mathrm{id}_{\mathbb{C}} \otimes R_W \colon \mathbb{C}\bigwedge_{\mathbb{Z}[G]}^{r} U_{S,T} \to \mathbb{C}[G]$ は $\mathbb{C}[G]$-準同型なので, 各 e_χ 成分の直和になっている. すなわち

$$\exists R_{W,\chi} \in \mathrm{Hom}_{e_\chi\mathbb{C}[G]}\left(e_\chi\mathbb{C}\bigwedge_{\mathbb{Z}[G]}^{r} U_{S,T}, e_\chi\mathbb{C}[G]\right) \text{ s.t. } \mathrm{id}_{\mathbb{C}} \otimes R_W = \bigoplus_{\chi\in\widehat{G}} R_{W,\chi}.$$

以下, $r = r_S(\chi)$ ($\Leftrightarrow r = r_S(\overline{\chi})$) として, 各成分 $R_{W,\overline{\chi}}$ を観察してみる. 補足 45 で観察したように, R_W の値は pairing の像として書ける:

$$\begin{array}{ccccc} \bigwedge_{\mathbb{Z}[G]}^{r} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(U_{S,T}, \mathbb{C}[G]) & \times & \bigwedge_{\mathbb{Z}[G]}^{r} U_{S,T} & \to & \mathbb{C}[G], \\ (\quad \Phi_1 \circ \lambda_S \wedge \cdots \wedge \Phi_r \circ \lambda_S & , & \varepsilon &) & \mapsto \quad (-1)^r \cdot R_W(\varepsilon). \end{array}$$

ただし

$$\left[\Phi_i := \mathrm{id}_{\mathbb{C}} \otimes \widetilde{\phi_{w_i}} \colon \sum_{w\in S_K} z_w w \mapsto \sum_{\sigma\in G} z_{w_i^\sigma}\sigma\right] \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(\mathbb{C}X_S, \mathbb{C}[G])$$

とおいた. 各項に $\mathbb{C}\otimes$ して $e_{\overline{\chi}}$ 成分を見ると

$$\begin{array}{ccccc} \bigwedge_{\mathbb{C}}^{r} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(e_{\overline{\chi}}\mathbb{C}U_S, \mathbb{C}\cdot e_{\overline{\chi}}) & \times & \bigwedge_{\mathbb{C}}^{r} e_{\overline{\chi}}\mathbb{C}U_S & \to & \mathbb{C}\cdot e_{\overline{\chi}}, \\ (\quad \Phi_{1,\overline{\chi}} \circ \lambda_S \wedge \cdots \wedge \Phi_{r,\overline{\chi}} \circ \lambda_S & , & \varepsilon &) & \mapsto \quad (-1)^r \cdot R_{W,\overline{\chi}}(\varepsilon) \end{array} \tag{39}$$

となる. ただし

$$e_{\overline{\chi}}\mathbb{C}\bigwedge_{\mathbb{Z}[G]}^{r} U_{S,T} = \bigwedge_{e_{\overline{\chi}}\mathbb{C}[G]}^{r} e_{\overline{\chi}}\mathbb{C}U_{S,T}, \quad \mathbb{C}U_{S,T} = \mathbb{C}U_S \ (\because [U_S : U_{S,T}] < \infty), \quad e_{\overline{\chi}}\mathbb{C}[G] = \mathbb{C}\cdot e_{\overline{\chi}}$$

を使った. なお $\mathbb{C}\cdot e_{\overline{\chi}}$ は χ の表現空間 V の反傾空間 V^* と $\mathbb{C}[G]$-同型であり, 環としては $\mathbb{C}$ と同型である. また写像 λ_S は, 実際は $\mathrm{id}_{\mathbb{C}} \otimes \lambda_S$ の制限: $e_{\overline{\chi}}\mathbb{C}U_S \cong e_{\overline{\chi}}\mathbb{C}X_S$ を表し, $\Phi_{i,\overline{\chi}}$ は Φ_i の $e_{\overline{\chi}}$ 成分:

$$\left[\Phi_{i,\overline{\chi}} \colon e_{\overline{\chi}}\left(\sum_{w\in S_K} z_w w\right) \mapsto \left(\sum_{\sigma\in G} \overline{\chi}(\sigma) z_{w_i^\sigma}\right)\cdot e_{\overline{\chi}}\right] \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(e_{\overline{\chi}}\mathbb{C}X_S, \mathbb{C}\cdot e_{\overline{\chi}})$$

を表している. 次の可換図式を考えると, Stark regulator $R_S(\chi, f)$ と Rubin の G-同変 regulator map R_W の関係が分かる:

$$
\begin{array}{ccccc}
\bigwedge_{\mathbb{C}}^{r} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(e_{\overline{\chi}}\mathbb{C}X_S, \mathbb{C}\cdot e_{\overline{\chi}}) & \times & \bigwedge_{\mathbb{C}}^{r} e_{\overline{\chi}}\mathbb{C}X_S & \to & \mathbb{C}\cdot e_{\overline{\chi}}, \\
\uparrow \circ f & & \downarrow f & & \| \\
\bigwedge_{\mathbb{C}}^{r} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(e_{\overline{\chi}}\mathbb{C}U_S, \mathbb{C}\cdot e_{\overline{\chi}}) & \times & \bigwedge_{\mathbb{C}}^{r} e_{\overline{\chi}}\mathbb{C}U_S & \to & \mathbb{C}\cdot e_{\overline{\chi}}, \\
\uparrow \circ \lambda_S & & \downarrow \lambda_S & & \| \\
\bigwedge_{\mathbb{C}}^{r} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(e_{\overline{\chi}}\mathbb{C}X_S, \mathbb{C}\cdot e_{\overline{\chi}}) & \times & \bigwedge_{\mathbb{C}}^{r} e_{\overline{\chi}}\mathbb{C}X_S & \to & \mathbb{C}\cdot e_{\overline{\chi}}.
\end{array} \tag{40}
$$

ただし $\mathrm{id}_{\mathbb{C}} \otimes f$, $\mathrm{id}_{\mathbb{C}} \otimes \lambda_S$ の r 個の wedge 積を, それぞれ f, λ_S と略記した. 実際, Stark regulator $R_S(\chi, f)$ の定義 $(:= \det(\lambda_S \circ f)_V)$ は次が可換であることを言っている:

$$
\begin{array}{ccc}
\bigwedge_{\mathbb{C}}^{r} e_{\overline{\chi}}\mathbb{C}X_S & \overset{R_S(\chi,f)\text{ 倍写像}}{\cong} & \bigwedge_{\mathbb{C}}^{r} e_{\overline{\chi}}\mathbb{C}X_S \\
f \downarrow & \lambda_S \nearrow & \\
\bigwedge_{\mathbb{C}}^{r} e_{\overline{\chi}}\mathbb{C}U_S. & &
\end{array} \tag{41}
$$

ここで $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(V^*, \mathbb{C}X_S) = e_{\overline{\chi}}\mathbb{C}X_S$ を使った. また, $r = r_S(\chi) = \dim_{\mathbb{C}} e_{\overline{\chi}}\mathbb{C}X_S$ だから $\{\Phi_{i,\overline{\chi}} \mid 1 \leq i \leq r\}$ は $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(e_{\overline{\chi}}\mathbb{C}X_S, \mathbb{C}\cdot e_{\overline{\chi}})$ の $\mathbb{C}$ 上の基底となり, その双対基底は

$$
e_{\overline{\chi}}(w_j - w_0) \in e_{\overline{\chi}}\mathbb{C}X_S \quad (1 \leq j \leq r)
$$

となる. ただし $S - \{v_1, v_2, \ldots, v_r\} \ni v_0$ を一つ取り, その上の素点 w_0 を一つ固定した. つまり

$$
\Phi_{i,\overline{\chi}}\left(e_{\overline{\chi}}(w_j - w_0)\right) = \begin{cases} e_{\overline{\chi}} & i = j \text{ のとき}, \\ 0 & i \neq j \text{ のとき} \end{cases} \tag{42}
$$

が成り立つ. 式 (40) の左下に $\Phi_{1,\overline{\chi}} \wedge \cdots \wedge \Phi_{r,\overline{\chi}}$, 真ん中上に $x := e_{\overline{\chi}}(w_1 - w_0) \wedge \cdots \wedge e_{\overline{\chi}}(w_r - w_0)$ を代入し, 式 (39,41,42) を使って可換図式を追っていくと

$$
\begin{array}{ccccccc}
(& R_S(\chi, f)\cdot \Phi_{1,\overline{\chi}} \wedge \cdots \wedge \Phi_{r,\overline{\chi}} & , & x &) & \mapsto & R_S(\chi, f)\cdot e_{\overline{\chi}}, \\
 & \uparrow \circ f & & \downarrow f & & & \| \\
(& \Phi_{1,\overline{\chi}} \circ \lambda_S \wedge \cdots \wedge \Phi_{r,\overline{\chi}} \circ \lambda_S & , & f(x) &) & \mapsto & (-1)^r \cdot R_{W,\overline{\chi}}(f(x))\cdot e_{\overline{\chi}}, \\
 & \uparrow \circ \lambda_S & & \downarrow \lambda_S & & & \| \\
(& \Phi_{1,\overline{\chi}} \wedge \cdots \wedge \Phi_{r,\overline{\chi}} & , & R_S(\chi, f)\cdot x &) & \mapsto & R_S(\chi, f)\cdot e_{\overline{\chi}}
\end{array}
$$

が言える. よって

$$
R_{W,\overline{\chi}}(f(e_{\overline{\chi}}(w_1 - w_0)) \wedge \cdots \wedge f(e_{\overline{\chi}}(w_r - w_0))) = (-1)^r \cdot R_S(\chi, f) \tag{43}
$$

である. とくに写像 $R_{W,\overline{\chi}}$ は 一次元 $\mathbb{C}$ 線形空間 $\bigwedge_{\mathbb{C}}^{r} e_{\overline{\chi}}\mathbb{C}U_S$, $\mathbb{C}\cdot e_{\overline{\chi}}$ の間の線形写像だから, $R_S(\chi, f) \neq 0$ より同型写像であることも分かる. よってこれらの直和 (38) も同型写像.

補題 47. 代数体の有限次アーベル拡大 K/k に対し, 以下の同値が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
&r_S(\chi) = r \text{ となる全ての指標 } \chi \text{ に対して Stark 予想が成立} \\
&\Leftrightarrow \text{仮定 } (H_r) \text{ のもとで } \varepsilon_{S,T,r} \in e_{S,r}\left(\mathbb{Q}\bigwedge_{\mathbb{Z}[G]}^{r} U_{S,T}\right).
\end{aligned}
$$

練習問題 48. 補題 47 を示せ.

解答. 各記号の定義 ($\varepsilon_{S,T,r} = (\mathrm{id}_{\mathbb{C}} \otimes R_W)^{-1}(\Theta_{S,T}^{(r)}(0))$, $\Theta_{S,T}^{(r)}(0) = \delta_T \Theta_S^{(r)}(0)$, $\delta_T \in \mathbb{Q}[G]^\times$, $e_{S,r}\mathbb{Q}\bigwedge_{\mathbb{Z}[G]}^r U_{S,T} = \bigwedge_{e_{S,r}\mathbb{Q}[G]}^r e_{S,r}\mathbb{Q}U_{S,T}$, $\mathbb{Q}U_{S,T} = \mathbb{Q}U_S$) より

$$
\varepsilon_{S,T,r} \in e_{S,r}\left(\mathbb{Q}\bigwedge_{\mathbb{Z}[G]}^{r} U_{S,T}\right) \Leftrightarrow (\mathrm{id}_{\mathbb{C}} \otimes R_W)^{-1}(\Theta_S^{(r)}(0)) \in \bigwedge_{e_{S,r}\mathbb{Q}[G]}^{r} e_{S,r}\mathbb{Q}U_S
$$

と変形できる. つまり $e_{S,r}\mathbb{Q}[G]$-加群 $\bigwedge_{e_{S,r}\mathbb{Q}[G]}^r e_{S,r}\mathbb{Q}U_S$ の生成元 $\varepsilon_1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon_r$ に対し

$$
\Leftrightarrow \Theta_S^{(r)}(0) \in e_{S,r}\mathbb{Q}[G] \cdot (\mathrm{id}_{\mathbb{C}} \otimes R_W)(\varepsilon_1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon_r) \text{ — } (\sharp).
$$

ここで, 上手く同型 $f\colon \mathbb{Q}X_S \cong \mathbb{Q}U_S$ と元 $\varepsilon_i \in e_{S,r}\mathbb{Q}U_S$ を選べば

$$
(\mathrm{id}_{\mathbb{C}} \otimes R_W)(\varepsilon_1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon_r) = \sum_{\chi \in \widehat{G},\ r_S(\chi)=r} R_S(\chi, f) e_{\overline{\chi}}
$$

となる (素点 $w_0 \in S_K$ で $v_1, v_2, \ldots, v_r$ の上にないものを固定し $\varepsilon_i := -e_{S,r}f(w_i - w_0)$ とおけばよい. 補足 46, 式 (43) 参照). 一方で

$$
\Theta_S^{(r)}(0) = \sum_{\chi \in \widehat{G},\ r_S(\chi)=r} C_S(\chi) e_{\overline{\chi}}
$$

だから, 結局

$$
(\sharp) \Leftrightarrow \sum_{\chi \in \widehat{G},\ r_S(\chi)=r} A_S(\chi, f) e_{\overline{\chi}} \in e_{S,r}\mathbb{Q}[G] \text{ — } (\flat)
$$

が言える. さらに

$$
\sum_{\chi \in \widehat{G},\ r_S(\chi)=r} A_S(\chi, f) e_{\overline{\chi}} = \sum_{\sigma \in G}\left(\sum_{\chi \in \widehat{G},\ r_S(\chi)=r} A_S(\chi, f)\frac{\chi(\sigma)}{|G|}\right)\sigma,
$$
$$
r_S(\chi) = r_S(\chi^\gamma) \quad (\forall \gamma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}))
$$

に注意すれば

$$
\begin{aligned}
(\flat) &\Leftrightarrow \sum_{\chi \in \widehat{G},\ r_S(\chi)=r} A_S(\chi, f)\chi(\sigma) \in \mathbb{Q} \quad (\forall \sigma \in G) \\
&\Leftrightarrow A_S(\chi, f)^\gamma = A_S(\chi^\gamma, f) \quad (\forall \gamma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}),\ \forall \chi \in \widehat{G} \text{ with } r_S(\chi) = r)
\end{aligned}
$$

と変形できる. □

10 Rubin's integral refinement.

Rubin は Stark 予想 ($\overset{\text{補題 47}}{\Leftrightarrow}$ $\varepsilon_{S,T,r} \in e_{S,r}\left(\mathbb{Q}\bigwedge_{\mathbb{Z}[G]}^{r} U_{S,T}\right)$) を精密化し, $\varepsilon_{S,T,r}$ が含まれる格子 $\Lambda_{S,T,r} \subset e_{S,r}\left(\mathbb{Q}\bigwedge_{\mathbb{Z}[G]}^{r} U_{S,T}\right)$ を以下のように予想した (Popescu [BPSS] の表記に従った. これはオリジナルの定義 [Ru] を [Ru, COROLLARY 1.3] を使って言い換えたもの).

定義 49. $U_{S,T}^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(U_{S,T}, \mathbb{Z}[G])$ とおく. 各 $\Phi := (\phi_1, \ldots, \phi_{r-1}) \in (U_{S,T}^*)^{r-1}$ に対して $\mathbb{Q}[G]$-準同型 $\widetilde{\Phi}$ を

$$\widetilde{\Phi}\colon \mathbb{Q}\bigwedge_{\mathbb{Z}[G]}^{r} U_{S,T} \to \mathbb{Q}U_{S,T},\ u_1 \wedge \cdots \wedge u_r \mapsto \sum_{k=1}^{r} (-1)^k \det\left(\phi_i(u_j)\right)_{j \neq k} u_k$$

で定める. ただし行列式のサイズは $r-1$ で, i は $1 \leq i \leq r-1$ を, j は $1 \leq j \leq r$, $j \neq k$ を動く. このとき **Rubin's lattice** $\Lambda_{S,T,r}$ を

$$\Lambda_{S,T,r} := \left\{ \varepsilon \in e_{S,r}\left(\mathbb{Q}\bigwedge_{\mathbb{Z}[G]}^{r} U_{S,T}\right) \mid \widetilde{\Phi}(\varepsilon) \in U_{S,T}\ (\forall \Phi \in (U_{S,T}^*)^{r-1}) \right\}$$

で定める.

次の予想が **Rubin's integral refinement for the abelian Stark conjecture** である.

予想 50 (予想 $\mathbf{RS(K/k, S, T, r)}$). 仮定 (H_r) のもとで $\varepsilon_{S,T,r} \in \Lambda_{S,T,r}$.

注意 51. 以下が成り立つ:

- $(\bigwedge_{\mathbb{Z}[G]}^{r} U_{S,T}) \cap e_{S,r}(\mathbb{Q}\bigwedge_{\mathbb{Z}[G]}^{r} U_{S,T}) \subset \Lambda_{S,T,r} \subset (\mathbb{Z}[\frac{1}{|G|}]\bigwedge_{\mathbb{Z}[G]}^{r} U_{S,T}) \cap e_{S,r}(\mathbb{Q}\bigwedge_{\mathbb{Z}[G]}^{r} U_{S,T})$ ([Ru, PROPOSITION 1.2]).
- 予想 $\mathrm{RS}(K/k, S, T, r)$ の成立は, G-同変 regulator map R_W の定義中の W の取り方にはよらない ([BPSS, Popescu の解説, §2.1, REMARK 2]).
- $T \subset T'$ のとき, 予想 $\mathrm{RS}(K/k, S, T, r) \Rightarrow$ 予想 $\mathrm{RS}(K/k, S, T', r)$ ([Po, PROPOSITION 5.3.1]).
- K/k の中間体 F に対し, 予想 $\mathrm{RS}(K/k, S, T, 1) \Rightarrow$ 予想 $\mathrm{RS}(K/F, S_F, T_F, [F:k])$ ([BPSS, Popescu の解説, Theorem 2.3.2 の下での議論]).
- $r = 0, 1$ の場合は

$$\Lambda_{S,T,r} = \begin{cases} \mathbb{Z}[G] \cap e_{S,0}\mathbb{Q}[G] & r = 0 \text{ のとき}, \\ U_{S,T} \cap e_{S,1}\mathbb{Q}U_{S,T} & r = 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

である. とくに以下が従う.

– $r=0$ の場合は Deligne-Ribet の結果: $\Theta_{S,T}(0)\in\mathbb{Z}[G]$ より ($\Theta_{S,T}(0)$ が $e_{S,0}$ 成分に入るのは自動的なので) 予想 RS$(K/k,S,T,0)$ が成立.

– K/k が代数体のアーベル拡大かつ $r=1$ の場合は以下の同値が成り立つ ([Ru, PROPOSITION 2.5]).

$$\text{予想 RS}(K/k,S,T,1) \text{ が (仮定 } (H_1) \text{ を満たす) 任意の } T \text{ で成立} \\ \Leftrightarrow \text{予想 St}(K/k,S) \text{ が成立.}$$

注意 52. 同値 RS$(K/k,S,T,1)$ $(\forall T)$ $\Leftrightarrow$ St$(K/k,S)$ を示すには

$$\text{“仮定 } (H_1) \text{ を満たす任意の } T\text{”} \Leftrightarrow \text{“}K(\varepsilon^{\frac{1}{e_K}})/k \text{ がアーベル拡大”} \\ \text{“}\varepsilon_{S,T,r}\in\Lambda_{S,T,r}=U_{S,T}\cap e_{S,1}\mathbb{Q}U_{S,T}\text{”} \Leftrightarrow \text{“}\varepsilon\in U_S\text{”}$$

の対応が問題になる. これらは等式 $\Theta_{S,T}^{(1)}(0)=\delta_T\Theta_S^{(1)}(0)$ と次の補題から導かれる. この補題の証明は, 本報告集の三浦氏の解説で与えられる.

補題 53 (Tate)**.** 大域体の有限次アーベル拡大 K/k と k の素点からなる有限集合 S が仮定 (H_0)-1 を満たしているとする. $\alpha\in K^\times$ に対し $\mathrm{supp}(\alpha):=\{k \text{ の有限素点 } \mathfrak{p} \mid \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}N_{K/k}\alpha>0\}$ とおく. $\alpha\in K^\times$ に関して次の 1,2 は同値である.

1. $K(\alpha^{\frac{1}{e_K}})/k$ はアーベル拡大.

2. 仮定 (H_0) 及び $T\cap\mathrm{supp}(\alpha)=\emptyset$ を満たす任意の T に対し

$$\exists\alpha_T\in K^\times \text{ s.t. } \alpha^{\delta_T}=\alpha_T^{e_K},\ \alpha_T\equiv 1 \bmod T_K.$$

11 関連する予想.

大域体 k,K が代数体の場合, 以下の場合に予想 RS$(K/k,S,T,r)$ が示されている.

- $[K:k]=2$ のとき ($\because$ k の類数公式と K の類数公式より. [Ru, THEOREM 3.5]).

- $r=1$ で, 同値な予想 St$(K/k,S)$ が成立しているとき.

- $S=\{v_1,v_2,\dots,v_{r+1}\}$ で, すべての v_i が K/k で完全分解しているとする. このとき $\mathrm{ord}_{s=0}L_S(s,\chi)>r$ $(\forall\chi\in\widehat{G},\ \neq 1_G)$ なので

$$\Theta_{S,T}^{(r)}(0)=\delta_T\Theta_S^{(r)}(0)=\delta_T C_S(1_G)\cdot e_{1_G}$$

である. このとき類数公式より

$$\Theta_{S,T}^{(r)}(0)=-|A_{k,S,T}|R_{k,S,T}\cdot e_{1_G}$$

が得られる. ただし (S,T)-modified イデアル類群を

$$A_{k,S,T}:=\frac{\{\mathcal{O}_{k,S} \text{ の分数イデアル } \mathfrak{a} \mid (\mathfrak{a},T)=1\}}{\{\mathcal{O}_{k,S} \text{ の単項イデアル } (x) \mid x\equiv 1 \bmod T\}}$$

で定め, $U_{k,S,T}$ の (自由 $\mathbb{Z}$-加群としての) 生成元 $\{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ を使って (S,T)-modified 単数基準を

$$R_{k,S,T} := |\det(\log|u_i|_{v_j})_{1\le i,j\le r}|$$

とおいた. よってこの場合

$$\varepsilon_{S,T,r} = \pm\frac{|A_{k,S,T}|}{|G|^r} u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_r$$

となり, 予想 RS$(K/k, S, T, r)$ が成立する ($\pm$ は W の選び方次第). 詳しくは [BPSS, Popescu の解説, §2.1, REMARK 2], または [Ru, PROPOSITION 3.1] 参照.

上記以外の結果は, S に含まれ, 完全分解する素点が全て有限素点での場合 (がほとんど) である. さらに $r = 1$ の場合, 前段階として以下の議論が重要になる. 大まかに言うと

$$\begin{array}{ccc} & & r = 1,\ v_1 < \infty \text{ の場合の予想 RS} \\ & & \Updownarrow \\ \textbf{Strong Brumer-Stark “予想” SBrSt} & \Rightarrow & \textbf{Brumer-Stark 予想 BrSt} \\ & & \Downarrow \\ \textbf{Strong Brumer “予想”} & \Rightarrow & \textbf{Brumer 予想 Br}. \end{array} \tag{44}$$

という図式が成り立つので, Strong Brumer-Stark “予想” や Strong Brumer “予想” を部分的に示すことにより, 対応する結果が得られる. 以下, 各予想の定式を載せるが, より詳しい内容は三浦氏の解説を参照.

予想 54 (Brumer 予想 Br$(K/k, S)$)**.** 仮定 (H_0)-1 のもとで

$$\mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}[G]}(\mu_K)\Theta_S(0) \subset \begin{cases} \mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}[G]}(A_K) & k \text{ の標数が } 0 \text{ のとき}, \\ \mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathrm{Pic}^0(K)) & k \text{ の標数が } p > 0 \text{ のとき}. \end{cases}$$

ただし A_K は $\mathcal{O}_K$ のイデアル類群で, $\mathrm{Pic}^0(K)$ は $\deg 0$ の Picard 群 $:= \{K$ の divisor $\sum_w n_w w \mid \sum_w n_w = 0\}/\{\mathrm{div}(\alpha) := \sum_w (\mathrm{ord}_w \alpha) w \mid \alpha \in K^\times\}$ である.

定義 55.

$$K^\times_{S,0} := \widetilde{K^\times} \cap e_{S,0}\mathbb{Q}K^\times$$

とおく. ただし自然な写像 $K^\times \to \mathbb{Q}K^\times$ の像を $\widetilde{K^\times}$ とおいた.

予想 56 (Brumer-Stark 予想 BrSt$(K/k, S)$)**.** 仮定 (H_0)-1 のもとで

- 標数 0 の場合. 任意の分数イデアル $I \subset K$ に対し, ただ一つ $\alpha_I \in K^\times_{S,0}$ が存在して

  $$e_K \Theta_S(0) I = (\alpha_I), \quad K(\alpha_I^{\frac{1}{e_K}})/k \text{ はアーベル拡大}$$

  を満たす.

- 標数 $p>0$ の場合. 任意の K の divisor $D\neq 0$ に対し, ただ一つ $\alpha_D\in K_{S,0}^\times$, $m_D\in\mathbb{Z}$ が存在して

$$e_K\Theta_S(0)D=\mathrm{div}(\alpha_D)+m_D\sum_{w\in S_K}w,\quad K(\alpha_D^{\frac{1}{e_K}})/k \text{ はアーベル拡大}$$

を満たす.

注意 57. 標数 $p>0$ の場合には Brumer-Stark 予想 $\mathrm{BrSt}(K/k,S)$ の成立が示されている (Deligne-Tate, Hayes).

予想 58 (予想 $\mathrm{BrSt}(K/k,S,T)$)**.** 仮定 (H_0) のもとで

- 標数 0 の場合. 任意の分数イデアル $I\subset K$ で $(I,T_K)=1$ となるものに対し, ただ一つ $\alpha_{I,T}\in K_{S,0}^\times$ が存在して

$$\Theta_{S,T}(0)I=(\alpha_{I,T}),\quad \alpha_{I,T}\equiv 1 \bmod T_K$$

を満たす.

- 標数 $p>0$ の場合. 任意の K の divisor $D\neq 0$ で $(D,T_K)=1$ となるものに対し, ただ一つ $\alpha_{D,T}\in K_{S,0}^\times$, $m_D\in\mathbb{Z}$ が存在して

$$\Theta_{S,T}(0)D=\mathrm{div}(\alpha_{D,T})+m_D\sum_{w\in S_K}w,\quad \alpha_{D,T}\equiv 1 \bmod T_K$$

を満たす.

“図式” (44) の右半分は次の補題としてまとめられる. 証明は三浦氏の解説参照.

補題 59. 大域体のアーベル拡大 K/k と k の素点からなる有限集合 S_0 で, 組 $(K/k,S_0)$ が仮定 (H_0)-1 を満たすものを固定する. また v は K/k で完全分解する k の有限素点, T は k の素点からなる有限集合とする. このとき以下が成り立つ.

$$\begin{gathered}\text{予想 } \mathrm{RS}(K/k,S_0\cup\{v\},T,1) \text{ が成立 } (\forall v,T)\\ \Leftrightarrow \text{予想 } \mathrm{BrSt}(K/k,S_0,T) \text{ が成立 } (\forall T)\\ \Leftrightarrow \text{予想 } \mathrm{BrSt}(K/k,S_0) \text{ が成立}\\ \Rightarrow \text{予想 } \mathrm{Br}(K/k,S_0) \text{ が成立}\end{gathered}$$

定義 60 (Strong Brumer-Stark “予想”)**.** $A_{K,S,T}:=\frac{\{\mathcal{O}_{K,S} \text{ の分数イデアル } \mathfrak{a}|(\mathfrak{a},T_K)=1\}}{\{\mathcal{O}_{K,S} \text{ の単項イデアル } (x)|x\equiv 1 \bmod T_K\}}$ に対し

命題 $\mathrm{SBrSt}(K/k,S,T)$: 仮定 (H_0) のもとで $\Theta_{S,T}(0)\in(\mathbb{Z}[G]\cap e_{S,0}\mathbb{Q}[G])\cdot\mathrm{Fit}_{\mathbb{Z}[G]}(A_{K,S,T})$.

$A_{S,T}$ の $\mathbb{Z}[G]$-加群としての表現 (完全系列)

$$\mathbb{Z}[G]^m\xrightarrow{A}\mathbb{Z}[G]^n\to A_{S,T}\to 0$$

を考えたとき ($m \geq n$, $A \in M_{m\times n}(\mathbb{Z}[G])$),

$$\mathrm{Fit}_{\mathbb{Z}[G]}(A_{S,T}) := \langle A \text{ の } n \text{ 次小行列式 } \rangle_{\mathbb{Z}[G]}$$

である. よって

$$\mathrm{Fit}_{\mathbb{Z}[G]}(A_{S,T}) \subset \mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}[G]}(A_{S,T})$$

が成り立つ. この事実を使って

$$\text{命題 SBrSt}(K/k, S, T) \text{ が成立} \Rightarrow \text{予想 BrSt}(K/k, S, T) \text{ が成立}$$

が示される. 命題 SBrSt$(K/k, S, T)$ を示すことで予想 BS$(K/k, S)$ を導いた結果がいくつかあるが, 命題 SBrSt$(K/k, S, T)$ には反例があることも知られている (栗原, 三浦, Greither, Popescu, etc).

参考文献

[BPSS] Burns, D., Popescu, C., Sands, J., Solomon, D., (eds.), Stark's Conjectures, Recent Work And New Directions, Johns Hopkins Univ., *Contemp. Math.*, **358**, AMS (2004).

[Da] Dasgupta, S., Stark's Conjectures (thesis).

[Gr] Gross, B. H., p-adic L-series at $s = 0$, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, **28 (3)**, 979-994 (1982).

[PRS] Popescu, C., Rubin, K., Silverberg, A. (eds.), Arithmetic of L-Functions, *IAS/Park City Mathematics Series*, **vol. 18**, AMS (2011).

[Ru] Rubin, K., A Stark conjecture "over Z" for abelian L-functions with multiple zeros, *Annales de L'Institut Fourier*, **46**, 33-62 (1996).

[Po] Popescu, C. D., Base change for Stark-type conjectures "over **Z**", *J. Reine Angew. Math.*, **542**, 85-111 (2002).

[St] Stark, H. M., L-functions at $s = 1$, I,II,III,IV, *Advances in Math.*

[Ta1] Tate, J., Les conjectures de Stark sur les fonctions L d'Artin en $s = 0$ (Notes by D. Bernardi et N. Schappacher), *Progress in Math.*, **47**, Birkhäuser (1984).

[Ta2] Tate, J., On Stark's conjectures on the behavior of $L(s, \chi)$ at $s = 0$, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, **28**, 963-978 (1981).

[Yo] Yoshida, H., Absolute CM-Periods, *Mathematical Surveys and Monographs*, **vol. 106**, AMS (2003).