Gross-Stark 予想*

河村 尚明 (Hisa-aki KAWAMURA) †

1 Introduction

F を任意の総実代数体とし, $\overline{F}$ をその代数閉包とする．この時, F の Galois 指標

$$\chi : G_F := \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \to \overline{\mathbb{Q}}^{\times}$$

(但し, $\overline{\mathbb{Q}}\,(\subset \mathbb{C})$ は有理数体 $\mathbb{Q}$ の代数閉包とする) に対して, H を χ によって定まる F の CM abel 拡大とする．また, p を任意の (有理) 素数とし, $\mathfrak{p}$ を F の素 ideal で次の条件を満たすものとする:

- $\mathfrak{p}|p$;
- $\mathfrak{p}$ は H に於いて完全分解する．

更に, ここで $\overline{\mathbb{Q}}$ から p 進体 $\mathbb{Q}_p$ の代数閉包 $\overline{\mathbb{Q}}_p$ への埋め込みを一つ固定しておくことにする．これにより, 以下の全ての議論に於いて, 上で与えた指標 χ は $\mathbb{C}$ に値を持つと同時に $\overline{\mathbb{Q}}_p$ に値を持つものと考えて良い．また, この様な χ は自然な形で F の全ての ideal の上に定義された函数とも見なすことができる．

S を F の素点からなる有限集合として

$$S \supseteq S_\infty \cup S_{\mathrm{ram}(H/F)} \cup S_p$$

であるものとする．但し, S_∞ は F の archimedes 的素点全体, $S_{\mathrm{ram}(H/F)}$(resp. S_p) は H に於いて分岐する (resp. p 上にある) F の非 archimedes 的素点全体のなす集合を表すものとする．この時, χ に付随する L 関数 $L_S(\chi,\, s)$ が次の様に定義される:

$$L_S(\chi,\, s) := \sum_{\substack{\mathfrak{a}\subset\mathcal{O}_F:\,\mathrm{ideal},\\ (\mathfrak{a},S)=1}} \chi(\mathfrak{a})\,\mathrm{Norm}_{F/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a})^{-s} \quad (s \in \mathbb{C},\, \mathrm{Re}(s) > 1)$$

---

[*] 本稿は第 20 回整数論サマースクール『Stark 予想』での講演内容を纏めたものである．

[†] 北海道大学大学院理学研究院数学部門 (Department of Mathematics, Hokkaido University)

$$= \prod_{\substack{\mathfrak{q} \subset \mathcal{O}_F:\text{素 ideal}, \\ \mathfrak{q} \notin S}} (1 - \chi(\mathfrak{q}) \operatorname{Norm}_{F/\mathbb{Q}}(\mathfrak{q})^{-s})^{-1}.$$

この函数についてよく知られた事実として, $L_S(\chi,\, s)$ は $\mathbb{C}$ 全体へ有理型函数として (特に $\chi \neq 1$ である時は正則函数として) 解析接続されること, また, 任意の整数 $n \leq 0$ に対して, その特殊値 $L_S(\chi,\, n)$ は代数的数であることが知られている (cf. [11]). 更に, この様な代数的特殊値を p 進解析的に補完するもの, 所謂, p **進** L **函数**と呼ばれるものが存在することが知られている:

Fact 1 (Cassou-Noguès [2], Deligne-Ribet [5]). $\mathbb{Q}_p$ に指標 χ の取り得る全ての値を添加してできる (有限次) 拡大体を E とする (i.e. $E = \mathbb{Q}_p(\chi)$). また,

$$\omega : \operatorname{Gal}(F(\mu_{2p})/F) \to (\mathbb{Z}/2p\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{Z}_p^\times$$

を Teichmüller 指標とする. この時, 或る有理型函数 $L_{S,p}(\chi\omega, *) : \mathbb{Z}_p \to E$ として次の条件を満たすものが存在する:

(i) $L_{S,p}(\chi\omega, s)$ $(s \in \mathbb{Z}_p)$ は $s = 1$ を除いて正則である. 特に, $\chi\omega \neq 1$ の時, $L_{S,p}(\chi\omega, s)$ は $\mathbb{Z}_p$ 上の到る所で正則である.

(ii) 任意の自然数 k に対して, 等式

$$L_{S,p}(\chi\omega,\, 1-k) = L_S(\chi\omega^{1-k},\, 1-k)$$

が成り立つ. 但し, 上の等式の右辺に於いて指標 $\chi\omega^{1-k}$ の modulus は常に全ての $\mathfrak{q} \in S_p$ で割れるものとする[*1].

上の事実から, 特に, $k = 1$ の時,

$$\begin{aligned} L_{S,p}(\chi\omega, 0) &= L_S(\chi\omega^0, 0) \\ &= (1 - \chi(\mathfrak{p})) \cdot L_{S-\{\mathfrak{p}\}}(\chi, 0) = 0 \quad (\because \chi(\mathfrak{p}) = 1) \end{aligned}$$

となり, 即ち, $L_{S,p}(\chi\omega, s)$ は $s = 0$ に於いて零点を持つことが導かれるのであるが, 更に, 次のことが成り立つと仮定する:

Hypothesis 1. $L_{S-\{\mathfrak{p}\}}(\chi, 0) \neq 0$.

ここで, $U := \mathcal{O}_{H,S}^\times = \{u \in H^\times \mid |u|_w = 1\ (\forall w \in S_H)\}$ とし,

$$U_\chi := (U \otimes E)^{\chi^{-1}} = \{u \in U \otimes E \mid \sigma(u) = u \otimes \chi^{-1}(\sigma)\ (\forall \sigma \in G)\}$$

*1 従って, 特に, $\chi\omega^0(\mathfrak{p}) = 0$ が成り立つとしてよい.

とおくと, Hypothesis 1 は

$$\dim_E U_\chi = 1$$

であることと同値である. (実際, Dirichlet の単数定理から直ちに U_χ は有限次元 E-線型空間であり, 且つ,

$$\dim_E U_\chi = \mathrm{ord}_{s=0} L_S(\chi, s) = \mathrm{ord}_{s=0} L_{S-\{\mathfrak{p}\}}(\chi, s) + 1$$

であることが判る.) そこで, U_χ の生成元 $u_\chi (\neq 0)$ と H の素点 $\mathfrak{P}$ として $\mathfrak{P}|\mathfrak{p}$ であるものを各々一つづつ固定しておく. この時, $F = \mathbb{Q}$ の場合に於ける Greenberg の $\mathcal{L}$-不変量 (cf. [6]) の類似として, 次の様なものを考えることができる:

Definition 1 (代数的 $\mathcal{L}$-不変量).

$$\mathcal{L}_{\mathrm{alg}}(\chi) := -\frac{\log_p(\mathrm{Norm}_{H_{\mathfrak{P}}/\mathbb{Q}_p}(u_\chi))}{\mathrm{ord}_{\mathfrak{P}}(u_\chi)} \in E.$$

但し, $\log_p$ は岩澤の p-進対数函数 (i.e. $\log_p(p) = 0$) とし,

$$\mathrm{ord}_{\mathfrak{P}} : U \otimes E \to E \quad (\text{resp. } \log_p \circ \mathrm{Norm}_{H_{\mathfrak{P}}/\mathbb{Q}_p} : U \otimes E \to E)$$

は $\mathrm{ord}_{\mathfrak{P}} : U \to \mathbb{Z}$ (resp. $\log_p \circ \mathrm{Norm}_{H_{\mathfrak{P}}/\mathbb{Q}_p} : U \to \mathbb{Z}_p$) を E-線型に拡張したものを表すものとする. (上で定義した不変量は, 実際, $(u_\chi, \mathfrak{P})$ の取り方に依らずに定まることが容易に確かめられる. 従って, それを $\mathcal{L}_{\mathrm{alg}}(\chi)$ として自然に表すことができる.)

以上の設定の下, Gross [7] によって次の様な予想が提出されている:

Conjecture 1 (Gross-Stark 予想). (χ, S) は上述の通りとする. この時, 等式

$$L'_{S,p}(\chi\omega, 0) = \mathcal{L}_{\mathrm{alg}}(\chi) \cdot L_{S-\{\mathfrak{p}\}}(\chi, 0)$$

が成り立つ.

この予想は (archimedes 的) Stark 予想の p 進類似と見なすことができるのだが, 実際, $F = \mathbb{Q}$ の場合には正しいことが Gross [7], 栗原 [8] によって既に知られていた.

本稿の目的は, Darmon, Dasgupta, Pollack [4] による最近の結果から, 基礎体 F がより一般の総実代数体である場合に於いても, 或る条件の下では, この予想が肯定的に成立することが明らかとなったこと, また, その結果が如何なる手法を用いて証明されている

のかについて解説を与えることである.

さて, 上述の結果について詳細に述べる前に, 便宜上, 次の様な不変量を導入しておく:

Definition 2 (**解析的 $\mathcal{L}$-不変量**).

$$\mathcal{L}_{\mathrm{an}}(\chi) := -\frac{L'_{S,p}(\chi\omega, 0)}{L_{S-\{\mathfrak{p}\}}(\chi, 0)} = \frac{d}{dk}\mathcal{L}_{\mathrm{an}}(\chi, k)|_{k=1}.$$

但し,

$$\mathcal{L}_{\mathrm{an}}(\chi, k) := -\frac{L_{S,p}(\chi\omega, 1-k)}{L_{S-\{\mathfrak{p}\}}(\chi, 0)}$$

とする.

これを用いることで, Conjecture 1 は直ちに次の様に簡潔に言い換えることができる:

Conjecture 2. 上述の (χ, S) に対して, 等式 $\mathcal{L}_{\mathrm{alg}}(\chi) = \mathcal{L}_{\mathrm{an}}(\chi)$ が成り立つ.

この予想に関連することとして, 次のことが示される:

Theorem 1 (Darmon-Dasgupta-Pollack [4]). 上述の (χ, S) に対して, Hypothesis 1 に加え更に次が成り立つものと仮定する:

Hypothesis 2. F に対して **Leopoldt 予想**が成り立つ. 即ち, $L_{S,p}(\chi\omega, s)$ は $s = 1$ に於いて極を持つ (cf. [3]).

この時, 次のことが成り立つ:

(1) $\#S_p \geq 2$ である時, (χ, S) に対して Conjecture 2 は正しい.
(2) $\#S_p = 1$ (i.e. $S_p = \{\mathfrak{p}\}$) であり, 更に, 次の仮定が成り立つとする:

Hypothesis 3. $\mathrm{ord}_{k=1}(\mathcal{L}_{\mathrm{an}}(\chi, k) + \mathcal{L}_{\mathrm{an}}(\chi^{-1}, k)) = \mathrm{ord}_{k=1}(\mathcal{L}_{\mathrm{an}}(\chi^{-1}, k))$.

この時, (χ, S) 及び (χ^{-1}, S) に対して Conjecture 2 は正しい.

この定理を証明する為に, まずは Ribet [10] の手法に基づいて次の様に Conjecture 2 に対して cohomology 的解釈を与えることが重要である: $E(\chi^{-1})$ を 1 次元 E-線型空間であって, その上に G_F が χ^{-1} として連続的に作用するものとする. また, (大域的) cohomology 群 $H^1(F, E(\chi^{-1}))$ の部分群 $H^1_{\mathfrak{p}}(F, E(\chi^{-1}))$ を全ての F の非 archimedes 的素点 $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$ に対して, その惰性群 $I_{\mathfrak{q}} \subset G_F$ への制限が不分岐である様な cohomology 類全体から成るものとする. ここで, Hypothesis 1 及び $\chi(\mathfrak{p}) = 1$ であることから,

$$\dim_E H^1_{\mathfrak{p}}(F, E(\chi^{-1})) = [F_{\mathfrak{p}} : \mathbb{Q}_p], \quad \dim_E H^1(F_{\mathfrak{p}}, E(\chi^{-1})) = [F_{\mathfrak{p}} : \mathbb{Q}_p] + 1$$

であること, 更に, 自然な制限写像

$$\mathrm{res}_{\mathfrak{p}} : H^1_{\mathfrak{p}}(F, E(\chi^{-1})) \to H^1(F_{\mathfrak{p}}, E(\chi^{-1}))$$

が単射であることが導かれる. ここで, $\chi(\mathfrak{p}) = 1$ であることから,

$$H^1(F_{\mathfrak{p}}, E(\chi^{-1})) = H^1(F_{\mathfrak{p}}, E) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(G_{F_{\mathfrak{p}}}, E)$$

であることに注意すると, この中には次の 2 つの相異なる類が含まれていることが判る:

- (unramified cocycle) $F_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{nr}}$ を $F_{\mathfrak{p}}$ の最大不分岐拡大とし, $\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}} \in \mathrm{Gal}(F_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{nr}}/F_{\mathfrak{p}})$ を Frobenius 元と表すものとする. この時, 準同型

$$\kappa_{\mathrm{nr}} \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(F_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{nr}}/F_{\mathfrak{p}}), \mathcal{O}_E)$$

  であって, $\kappa_{\mathrm{nr}}(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}}) = 1$ となるものが一意に存在する. この準同型によって得られる $H^1(F_{\mathfrak{p}}, E)$ の元を, 記号の乱用により, κ_{nr} と表す.
- (cyclotomic cocycle) 円分指標 $\varepsilon_{\mathrm{cyc}} : G_F \to \mathbb{Z}_p^{\times}$ に対して,

$$\kappa_{\mathrm{cyc}} := \log_p \circ \varepsilon_{\mathrm{cyc}} \in \mathrm{Hom}(G_F, E) = H^1(F, E).$$

  を $G_{F_{\mathfrak{p}}}$ へ制限することによって $H^1(F_{\mathfrak{p}}, E)$ の元が得られる. この様な元を同じく κ_{cyc} と表す.

そこで, $H^1(F_{\mathfrak{p}}, E)^{\mathrm{cyc}} \subset H^1(F_{\mathfrak{p}}, E)$ を κ_{nr} 及び κ_{cyc} によって張られる 2 次元部分空間とし, $H^1_{\mathfrak{p}}(F, E(\chi^{-1}))^{\mathrm{cyc}}$ を $H^1(F_{\mathfrak{p}}, E(\chi^{-1}))^{\mathrm{cyc}}$ の $\mathfrak{p}$ での制限に於ける逆像とする. これらの記法の下で Conjecture 2 が成り立つことを示すには, 実際, 次の主張が正しいことを示せば十分である:

Claim 1. 或る cohomology 類 $[\kappa] \in H^1_{\mathfrak{p}}(F, E(\chi^{-1}))^{\mathrm{cyc}}$ が存在して, その $\mathfrak{p}$ での制限 $[\kappa]_{\mathfrak{p}} := \mathrm{res}_{\mathfrak{p}}[\kappa] \in H^1(F_{\mathfrak{p}}, E(\chi^{-1}))$ に対して, 等式

$$[\kappa]_{\mathfrak{p}} = -\mathcal{L}_{\mathrm{an}}(\chi) \cdot \kappa_{\mathrm{nr}} + \kappa_{\mathrm{cyc}}$$

が成り立つ.

Remark. 実際に上の様な $[\kappa]$ が存在するならば, Kummer 理論及び Poitou-Tate 双対性から, 等式

$$\mathcal{L}_{\mathrm{alg}}(\chi) = \mathcal{L}_{\mathrm{an}}(\chi)$$

が導かれる. 尚, この事実に関する詳細な解説については [4] の §1.3, あるいは, 栗原氏の報告集原稿 (cf. [8]) を見よ.

実際にこの様な cohomology 類 $[\kappa]$ を構成する為に, [4] に於いては次の様な方針がとられている: まず p 進 L 函数の局所的情報を良く反映した或る特殊な Λ 進 Hilbert 保型形式 $\mathcal{F}^o$ を具体的に構成し (**Step 1**), 更に肥田, Wiles [14] の結果に基づいて, それに付随する巨大な像を持つ或る Galois 表現 $\boldsymbol{\rho}$ を構成する (**Step 2**). 最終的には, この $\boldsymbol{\rho}$ を用いて上述の様な cohomology 類 $[\kappa]$ が構成される (**Step 3**). この様な Ribet [10] の視点に基づく cohomology 類 (Selmer cocycle) の構成については, 次節に於いて詳しく解説する.

2 Proof ($F = \mathbb{Q}$)

本節に於いて, 基礎体 F が最も簡単な場合, 即ち, $F = \mathbb{Q}$ の場合に於ける Theorem 1 の証明を概説する. そこで, まず, 以下の議論に於いて用いる記号を纏めておく:

Notation. N を p と互いに素な自然数, $\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to \overline{\mathbb{Q}}^\times$ を Dirichlet 指標として $\chi(-1) = -1$ であるものとする. 任意の自然数 k に対して,

$$M_k(N, \chi) = M_k(\Gamma_0(N), \chi) \quad (\text{resp. } S_k(N, \chi) = S_k(\Gamma_0(N), \chi))$$

を weight k, level N, Nebentypus χ である $\mathrm{GL}_{2/\mathbb{Q}}$ の正則保型形式 (resp. 尖点的保型形式) 全体のなす $\mathbb{C}$-線型空間とする (cf. [9]). また, $E = \mathbb{Q}_p(\chi)$ として, $\mathcal{O}_E$ をその整数環を表すものとする. 更に, 有理素点の有限集合 S として $S = S_\infty \cup \{p\}$ とする.

本節に於ける目的は, 次の主張を証明することである:

Claim 1'. 或る cohomology 類 $[\kappa] \in H^1_p(G_\mathbb{Q}, E(\chi^{-1}))$ であって, $G_\mathbb{Q}$ の分解群 G_p への制限 $[\kappa]_p \in H^1(G_p, E(\chi^{-1}))$ に対して, 等式

$$[\kappa]_\mathfrak{p} = \mathcal{L}_{\mathrm{an}}(\chi) \cdot \mathrm{ord}_p + \log_p$$

を満たすものが存在する.

(Step 1) 或る尖点的 Λ 進保型形式 $\mathcal{F}^o$ の構成

まず始めに, Eisenstein 級数と呼ばれる最も良く知られた正則保型形式, 及び, それ等を p 進的に補完する Λ 進 Eisenstein 級数と呼ばれるものについて復習する.

Definition 3 (Eisenstein 級数). η, ψ を Dirichlet 指標として $\eta\psi = \chi$ となるものと

する. この時, 任意の自然数 k に対して,

$$E_k(\eta,\,\psi) := a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{0<d|n}\eta\Bigl(\frac{n}{d}\Bigr)\psi(d)d^{k-1}\right)q^n \in M_k(N,\,\chi)$$

とする. 但し,

$$a_0 = \begin{cases} \dfrac{L(\chi, 1-k)}{2} & \text{if } \eta = 1, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

であるものとする.

更に, $E_k(\eta,\,\psi)$ は全て素数 l に於ける Hecke 作用素に対して同時固有函数 (i.e. Hecke 固有形式) であることが知られており, その固有値は q 展開の l 番目の係数

$$\lambda_l = \eta(l) + \psi(l)l^{k-1}$$

によって与えられることが判る. 特に, $k = 1$ の時, $E_1(\eta,\,\psi) = E_1(\psi,\,\eta)$ が成り立つことに注意する. この時, 以下のことが成り立つ:

Fact 2 (Λ **進 Eisenstein 級数**). $\Lambda = \mathcal{O}_E[[T]]$ を $\mathcal{O}_E$ 係数 1 変数形式的冪級数環とする. 任意の自然数 k に対して, $1 + T \mapsto (1+p)^k$ によって与えられる特殊化写像 $\nu_k : \Lambda \to \overline{\mathbb{Q}}_p$ を考える. この時, 或る $\mathcal{E}(\eta,\,\psi) = \sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{A}_n(\eta,\,\psi)q^n \in \Lambda[[q]]$ が存在して, 任意の自然数 k に対して,

$$\nu_k(\mathcal{E}(\eta,\,\psi)) = E_k(\eta,\,\psi\omega^{1-k}) \in M_k(Np,\,\chi\omega^{1-k})$$

が成り立つ. 但し, ここでも指標 ω^{1-k} は, たとえ $k \equiv 1 \pmod{p-1}$ であったとしても modulus p を持つものと見なすこととする[*2].

上の様な性質を持つ $\Lambda[[q]]$ の元は (tame) level N, Nebentypus $\chi\omega$ の Λ **進保型形式**と呼ばれるものであり, 以下ではその全体の成す空間を $M_\Lambda(N, \chi\omega)$ と書くことにする. 即ち,

$$M_\Lambda(N, \chi\omega) := \left\{ \mathcal{F} \in \Lambda[[q]] \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{任意の自然数 } k \text{ に対して,} \\ \qquad \mathcal{F}_k := \nu_k(\mathcal{F}) \in M_k(Np,\,\chi\omega^{1-k}) \\ \text{が成り立つ.} \end{array} \right\}$$

[*2] この様な取り決めが煩わしければ, $k \equiv 1 \pmod{p-1}$ である時, $E_k(\eta,\,\psi)$ に対して p**-安定化** (p-stabilization) と呼ばれる p 進正規化を導入した上で $\mathcal{E}(\eta,\,\psi)$ の特殊化を論じればよい.

(特に, $\mathcal{F} \in M_\Lambda(N, \chi\omega)$ が有限個の k を除いて $\mathcal{F}_k \in S_k(Np,\, \chi\omega^{1-k})$ である時, $\mathcal{F}$ は**尖点的** (cuspidal) であるといい, その様な元全体の成す部分空間を $S_\lambda(N, \chi\omega)$ と表す.)
従って, 上述の事実は Eisenstein 級数 $E_k(\eta,\, \psi\omega^{1-k})$ $(k \geq 1)$ 達を p 進解析的に補完する $\mathcal{E}(\eta,\, \psi) \in M_\Lambda(N, \chi\omega)$ が存在することを意味する.

さて, 次に

$$\mathcal{G} := \frac{\mathcal{E}(1,\, \omega^{-1})}{\mathcal{A}_0(1,\, \omega^{-1})}$$

とおく. これについては, 任意の自然数 k に対して

$$\mathcal{G}_k = 1 + \frac{2}{\zeta_p(1-k)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{0<d|n} \omega^{-k}(d) d^{k-1} \right) q^n$$

(ここで, $\zeta_p(s) = L_p(1, s)$ は Kubota-Leopoldt の p 進 ζ 函数とする) となることが容易に確かめられる. そこで, $\mathcal{H} \in M_\Lambda(N, \chi\omega)$ として

$$\mathcal{H}_k = \mathcal{E}_k(1,\, \chi) - E_1(1,\, \chi) \cdot \mathcal{G}_{k-1} \cdot \frac{L_p(\chi\omega, 1-k)}{L(\chi, 0)} \quad (k \geq 1) \tag{1}$$

となるものを考える. これについては, 簡単な計算から $\mathcal{H}$ の q 展開の定数項は 0 であることが判る. また, 特に $k = 1$ については $\mathcal{H}_1 = \mathcal{E}_1(1,\, \chi)$ であり, 即ち, Hecke 固有形式となっていることが, その定義より導かれる. 一方, $k \geq 2$ ならば, 保型形式の一般論から

$$\mathcal{H}_k = \sum_{\substack{(\eta,\psi), \\ \eta\psi=\chi}} c_k(\eta,\, \psi) \cdot \mathcal{E}_k(\eta,\, \psi) + (\text{尖点的保型形式})$$

と表されることが判るのだが, 上で述べた通り, $\mathcal{H}_k$ の q 展開の定数項が 0 であることから $c_k(1,\, \chi) = 0$ であることが判るので, 実際には

$$\mathcal{H}_k = \sum_{\substack{(\eta,\psi)\neq(1,\chi), \\ \eta\psi=\chi}} c_k(\eta,\, \psi) \cdot \mathcal{E}_k(\eta,\, \psi) + (\text{尖点的保型形式})$$

の形として表されていることになる. ここで, 整数 $k \geq 2$ に対して

$$c_k(\chi,\, 1) = -\frac{L(0,\, \chi^{-1})}{L_p(1-k,\, \chi^{-1}\omega)} \cdot \frac{L_p(1-k,\, \chi\omega)}{L(0,\, \chi)} \cdot \langle N \rangle^{k-1}$$

(但し, $\langle * \rangle : \mathbb{Z}_p^\times \to 1 + p\mathbb{Z}_p$ は $\langle x \rangle := x/\omega(x)$ $(x \in \mathbb{Z}_p^\times)$ によって定義されるものとする) が成り立つことに注意する. (実際, このことについては, 等式 (1) の両辺に $\left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ p & N \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ を作用させ, それ等の q 展開の定数項を比較することで容易に確かめら

れる．）従って，このことから直ちに，或る $c(\chi,\,1)\in\Lambda$ であって，任意の整数 $k\geq 2$ に対して $\nu_k(c(\chi,\,1))=c_k(\chi,\,1)$ であるものが存在することが導かれる．そこで，

$$\mathcal{F}:=\mathcal{H}-c(\chi,\,1)\cdot\mathcal{E}(\chi,\,1) \tag{2}$$

とおく．これについては，先の議論から $\mathcal{F}\in M_\Lambda(N,\,\chi\omega)$ であり，且つ，

$$\mathcal{F}=\sum_{\substack{(\eta,\psi)\neq(1,\chi),(\chi,1),\\ \eta\psi=\chi}} c(\eta,\,\psi)\cdot\mathcal{E}(\eta,\,\psi)+(\text{尖点的 }\Lambda\text{ 進保型形式}) \tag{3}$$

と表されることが容易に判る．また，$\mathcal{F}_1=\mathcal{E}_1(1,\chi)$ が Hecke 固有形式であることも直ちに判る．しかし，残念ながら $\mathcal{F}$ 自体は (Λ 進保型形式としての) Hecke 固有形式ではない．

そこで，$I=\mathrm{Ker}(\nu_1)\subset\Lambda$ とし，Λ_I を I での局所化とした時，自然な同型

$$\begin{array}{ccc}\Lambda_I/I^2 & \overset{\sim}{\rightrightarrows} & E[X]/X^2,\\ \lambda & \mapsto & \lambda(1)+\lambda'(1)\cdot X\end{array}$$

が得られることに注意する．(但し，上に於ける λ は $\mathbb{Z}_p$ 上の函数と見なしているものとする.) これにより，$\mathcal{F}$ の代わりに $\mathcal{F}\pmod{I^2}$ を考えることで，次の様な “mod I^2” Hecke 固有形式と呼ぶべきものが得られる:

Proposition 1. 各素数 l に対して，T_l ($l\nmid Np$) 及び U_l ($l\,|\,Np$) を $M_\Lambda(N,\,\chi\omega)$ に作用する Hecke 作用素とする．この時，或る $\lambda_l\in\Lambda_I/I^2$ が存在して，

$$\begin{cases} T_l\cdot\mathcal{F}\equiv\lambda_l\cdot\mathcal{F}\pmod{I^2} & \text{if } l\nmid Np,\\ U_l\cdot\mathcal{F}\equiv\lambda_l\cdot\mathcal{F}\pmod{I^2} & \text{if } l\,|\,Np\end{cases}$$

が成り立つ．更に，

$$\lambda_l=\begin{cases}1+\chi(l)+\log_p(l)\cdot(\alpha+\chi(l)\beta)\cdot X & \text{if } l\nmid Np,\\ 1+\beta\cdot\mathcal{L}_{\mathrm{an}}(\chi)\cdot X & \text{if } l\,|\,Np\end{cases} \tag{4}$$

である．但し，

$$\alpha:=\frac{\mathcal{L}_{\mathrm{an}}(\chi)}{\mathcal{L}_{\mathrm{an}}(\chi)+\mathcal{L}_{\mathrm{an}}(\chi^{-1})},\quad \beta:=1-\alpha=\frac{\mathcal{L}_{\mathrm{an}}(\chi^{-1})}{\mathcal{L}_{\mathrm{an}}(\chi)+\mathcal{L}_{\mathrm{an}}(\chi^{-1})}$$

とする[*3].

[*3] ここで Hypothesis 3 が使われている．

Proof. 各素数 l に対して,

$$\begin{cases} \psi_1(l) = 1 + \alpha \log_p(l) \cdot X, \\ \psi_2(l) = \chi(l)(1 + \beta \log_p(l) \cdot X) \end{cases}$$

とし, 更に, それ等を乗法的に自然数全体へ拡張したものを $\psi_1, \psi_2 : \mathbb{Z}_{>0} \to E[X]/X^2$ とする. この時, 自然数 m が $m = p^r u$ $(p \nmid u)$ と表されるとすると, $\mathcal{F}$ の q 展開の m 番目の係数 $\mathcal{A}_m(\mathcal{F})$ は

$$\mathcal{A}_m(\mathcal{F}) \equiv \left\{ \sum_{d|u} \psi_1\Big(\frac{u}{d}\Big)\, \psi_2(d) \right\} \cdot (1 + \beta \mathcal{L}_{\mathrm{an}}(\chi) X)^r \pmod{I^2}$$

を満たすことが判る. 従って, $\mathcal{A}_1(\mathcal{F}) \equiv 1 \pmod{I^2}$ であることから, 任意の素数 l に対して, 等式 $\lambda_l = \mathcal{A}_l(\mathcal{F}) \pmod{I^2}$ が成り立つことが示される. □

Lemma 2. 上述の $\mathcal{F}$ に対して, 或る Hecke 作用素 $t \in \mathrm{End}(M_\Lambda(N,\, \chi\omega))$ が存在して,

$$\mathcal{F}' := t \cdot \mathcal{F} \in S_\Lambda(N,\, \chi\omega)$$

となる. 更に, 任意の素数 l に対して, $\mathcal{F}' \pmod{I^2}$ は $\mathcal{F} \pmod{I^2}$ と同じ固有値 λ_l を持つ mod I^2 Hecke 固有形式である.

Proof. 任意の $(\eta', \psi') \neq (1, \chi), (\chi, 1)$ に対し, 或る素数 l として $\eta'(l) + \psi'(l) \neq 1 + \chi(l)$ であるものを取る. ここで, $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{cyc}} : G_{\mathbb{Q}} \to \Lambda^\times$ を Λ 進円分指標, 即ち, p と互いに素な素数 l に対して

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{cyc}}(\mathrm{Frob}_l)(k) = \langle l \rangle^{k-1} \quad (\forall k \geq 1)$$

となるものとし, $t := \eta'(l) + \psi'(l) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{cyc}}(\mathrm{Frob}_l) - T_l \in \mathrm{End}(M_\Lambda(N,\, \chi\omega))$ とおく. この時, Hecke 作用の簡単な計算から, $t \cdot \mathcal{E}(\eta', \psi') = 0$ となることが判る. 従って,

$$\mathcal{F}' := \frac{t \cdot \mathcal{F}}{\mathcal{A}_1(t \cdot \mathcal{F})}$$

とおくことで,

$$\mathcal{F}' = \sum_{(\eta,\psi) \neq (1,\chi),(\chi,1),(\eta',\psi')} c(\eta,\, \psi) \cdot \mathcal{E}(\eta,\, \psi) + (\text{尖点的保型形式})$$

と表される Λ_I 進保型形式であり, 且つ, $\mathcal{F} \pmod{I^2}$ と同じ mod I^2 Hecke 固有値を持つものが得られる. これと同様な議論を他の全ての (η, ψ) に対して適用することで, 最終的に $\mathcal{F}'$ として我々の望むものが得られる. □

最後に, $S_\Lambda(N,\, \chi\omega)^o$ を通常的 (ordinary) な尖点的 Λ 進保型形式 (i.e. U_p-作用素の固有値の p 進付値が 0 となるもの) のなす空間とし, $e^o := \lim_{n\to\infty} U_p^{n!}$ を肥田の ordinary projector とする (i.e. $e^o : S_\Lambda(N,\,\chi\omega) \twoheadrightarrow S_\Lambda(N,\,\chi\omega)^o$). この時,

$$\mathcal{F}^o := e^o \cdot \mathcal{F}' \in S_\Lambda(N,\,\chi\omega)^o$$

とおく. これまでの議論から, $\mathcal{F}^o$ は通常的な Λ_I 進保型形式であり, 且つ, $\mathcal{F}^o \pmod{I^2}$ は mod I^2 Hecke 固有形式であり, また, その mod I^2 Hecke 固有値は $\mathcal{F} \pmod{I^2}$ のものと等しいことが判る (cf. 等式 (4)). 特に, $k=1$ に於いて

$$\mathcal{F}_1^o = \mathcal{E}_1(1,\,\chi)$$

であることに注意する.

(Step 2) $\mathcal{F}^o$ に付随する Galois 表現 $\boldsymbol{\rho}$ の構成

$\mathbb{T} \subset \mathrm{End}(S_\Lambda(N,\,\chi\omega)^o)$ を肥田の通常的 Λ 進 Hecke 環とし, $\xi : \mathbb{T} \to E$ を各 Hecke 作用素に対して $\mathcal{E}_1(1,\chi)$ の Hecke 固有値を対応させることによって得られる準同型とする. 即ち, 任意の素数 l に対して

$$\begin{array}{ccll} T_l & \mapsto & 1+\chi(l) & \text{if } l \not| Np, \\ U_l & \mapsto & 1 & \text{if } l \,|\, Np. \end{array}$$

また, $\mathfrak{P} = \mathrm{Ker}(\xi)$ とおく.

一方, 前の Step 1 に於いて構成した $\mathcal{F}^o$ に対して, その mod I^2 Hecke 固有値を対応させることで得られる Λ_I-代数の準同型

$$\phi : \mathbb{T}_\mathfrak{P} \to \Lambda_I/I^2 \simeq E[X]/X^2$$

を考える. ここで, $(\mathcal{F}_i)_{1\le i\le n}$ を尖点的 Λ 進保型形式で $\nu_1(\mathcal{F}_i) = \mathcal{E}_1(1,\,\chi)$ となるものからなる基底とし, 各 i について $\Lambda_i := \Lambda[\{\mathcal{F}_i \text{ の Hecke 固有値 }\}]_I$, $L_i := \mathrm{Frac}(\Lambda_i)$ とおく. この時, 自然な埋め込み

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}_\mathfrak{P} & \hookrightarrow & L_1 \times \cdots \times L_n \\ T_l & \mapsto & (\lambda_l(\mathcal{F}_1), \cdots, \lambda_l(\mathcal{F}_n)) \end{array}$$

が考えられることに注意すると, 次のことが判る:

Fact 3 (Hida)**.** 或る連続な既約表現

$$\boldsymbol{\rho} : G_\mathbb{Q} \to \mathrm{GL}_2(\prod_i L_i)$$

として次の性質を満たすものが存在する:

(1) $\boldsymbol{\rho}$ は Np の外不分岐である;

(2) Np と互いに素な任意の素数 l に対して,

$$\begin{cases} \mathrm{tr}(\boldsymbol{\rho}(\mathrm{Frob}_l)) = T_l, \\ \det(\boldsymbol{\rho}(\mathrm{Frob}_l)) = \chi\varepsilon_{\mathrm{cyc}}(l) \end{cases}$$

が成り立つ;

(3) G_p を G の p での分解群とする時, 同型

$$\boldsymbol{\rho}|_{G_p} \simeq \begin{pmatrix} \chi\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{cyc}}\eta^{-1} & * \\ 0 & \eta \end{pmatrix}$$

が成り立つ. 但し, $\eta : G_p \to \mathbb{T}_{\mathfrak{P}}^{\times}$ は

$$\eta(\mathrm{Frob}_p) = U_p$$

によって定まる不分岐指標とする.

Proof. この事実は, F がより一般の総実代数体の場合に於いても同様に成立することが Wiles [14] によって示されている. その詳細な解説については, 山上氏の報告集原稿 (cf. [13]) を見よ. □

複素共役 $\delta \in G_{\mathbb{Q}}$ に対して

$$\boldsymbol{\rho}(\delta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となる様に基底を選んでおく. ここで, 以後, 任意の $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ に対して

$$\boldsymbol{\rho}(\sigma) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}(\sigma) & \mathbf{b}(\sigma) \\ \mathbf{c}(\sigma) & \mathbf{d}(\sigma) \end{pmatrix}$$

と書くことにする. この時, 次のことが示される:

Key Lemma. 上述の $\boldsymbol{\rho}$ に対して, 次が成り立つ:

(1) $\mathbf{a}(\sigma), \mathbf{d}(\sigma) \in \mathbb{T}_{\mathfrak{P}}^{\times}$. 更に, $\phi \circ \mathbf{a} = \psi_1$, $\phi \circ \mathbf{d} = \psi_2$.

(2) 各 $1 \leq i \leq n$ に対して, $\mathrm{proj}_{L_i} : \prod_i L_i \to L_i$ とおく. この時, 任意の $\sigma \in G_p$ に対して,

$$\mathrm{proj}_{L_i}(\mathbf{b}(\sigma)) \neq 0$$

である.

Proof. (1) Fact 3 (2) より, Np と互いに素な素数 l に対して,

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{\rho}(\mathrm{Frob}_l)) = T_l \in \mathbb{T}^o$$

であることから, Chebotarev の密度定理により, 任意の $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ に対して,

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{\rho}(\sigma)) \in \mathbb{T}$$

となることが判る. ここで,

$$\mathbf{a}(\sigma) = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}(\boldsymbol{\rho}(\sigma)) + \mathrm{tr}(\boldsymbol{\rho}(\sigma\delta))), \quad \mathbf{d}(\sigma) = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}(\boldsymbol{\rho}(\sigma)) - \mathrm{tr}(\boldsymbol{\rho}(\sigma\delta))),$$

であることに注意すると,

$$\phi(\mathrm{tr}(\boldsymbol{\rho}(\sigma))) = \psi_1(\sigma) + \psi_2(\sigma)$$

である. 従って, $\boldsymbol{\rho}(\delta) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ であることから, $\psi_1(\delta) = 1$, $\psi_2(\delta) = -1$ より,

$$\phi \circ \mathbf{a} = \psi_1, \quad \phi \circ \mathbf{d} = \psi_2$$

であることが導かれる.

(2) 各 $1 \leq i \leq n$ に対して, $B_i \subset L_i$ を $\mathrm{proj}_{L_i}(\mathbf{b}(\sigma))$ $(\forall \sigma \in G_{\mathbb{Q}})$ によって生成される有限生成 Λ_i-部分代数とする. また, $\mathfrak{m}_i \subset \Lambda_i$ を極大 ideal とすると,

$$\mathrm{proj}_{L_i}(\mathbf{d}(\sigma)) \pmod{\mathfrak{m}_i} \equiv \psi_2(\sigma) \pmod{I}$$

であることが判る. ここで, 任意の $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ に対して,

$$K(\sigma) := \mathrm{proj}_{L_i}\left(\frac{\mathbf{b}(\sigma)}{\mathbf{d}(\sigma)}\right) \in B_i$$

とおく時,

$$\overline{K} : G_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{K} B_i \twoheadrightarrow \overline{B}_i := B_i/\mathfrak{m}_i B_i$$

は $Z^1(G_{\mathbb{Q}}, \overline{B}_i(\chi^{-1}))$ の連続 1-cocycle を与える. 実際, $\mathrm{proj}_{L_i}(\mathbf{b}(\sigma)) = 0$ $(\forall \sigma \in G_p)$ であると仮定すると, 定義より $[\overline{K}]_p = 0\,(\in H^1(G_p, \overline{B}_i(\chi^{-1}))\,)$ であることが直ちに導かれる. この時,

$$[\overline{K}] = 0$$

が成り立つことに注意する. (実際, Np と互いに素な素数 l に対して, $\boldsymbol{\rho}$ の不分岐性より $[\overline{K}]_l = 0$ であることが判る. また, $l|N$ である素数 l に対しては $H^1(G_l, \overline{B}_i(\chi^{-1})) = 0$ であることから, $[\overline{K}]_l = 0$ であることが導かれる.) 従って, $\overline{K}$ は boundary の元として

$$\overline{K}(\sigma) = (\chi^{-1}(\sigma) - 1) \cdot y \quad (\forall \sigma \in G_{\mathbb{Q}})$$

の形で表される．ここで, 特に, $\sigma = \delta$ について $\overline{K}(\delta) = -2y = 0$ であることから, $y = 0$ であることが従う．即ち, $\overline{K}$ は $G_{\mathbb{Q}}$ 上で恒等的に零である．これにより, 中山の補題から $K(\sigma) = 0$ $(\forall \sigma \in G_{\mathbb{Q}})$ であることが導かれる．即ち, $\mathrm{proj}_{L_i}(\mathbf{d}(\sigma)) = 0$ $(\forall \sigma \in G_{\mathbb{Q}})$ であることになるのだが, これは $\boldsymbol{\rho}$ の既約性に反する．以上により, 題意は示された． $\square$

(Step 3) Galois cohomology 類の構成

Fact 3 (3) より, 或る基底変換行列 $\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\prod_i L_i)$ として

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}(\sigma) & \mathbf{b}(\sigma) \\ \mathbf{c}(\sigma) & \mathbf{d}(\sigma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \varepsilon_{\mathrm{cyc}} \eta^{-1} & * \\ 0 & \eta \end{pmatrix}$$

となるものを取っておく．ここで, 両辺の行列の $(1,1)$ 成分を比較することで

$$C \cdot \mathbf{b}(\sigma) = A \cdot [\varepsilon_{\mathrm{cyc}} \eta^{-1}(\sigma) - \mathbf{a}(\sigma)]$$

であることが判る．この時, Key Lemma (2) により, 各 L_i に於いて $A \neq 0$ であることが従う．そこで, 任意の $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ に対して

$$\widetilde{\mathbf{b}}(\sigma) := \mathbf{b}(\sigma) \cdot \frac{C}{A} \in \prod_i L_i$$

とおく．ここで,

$$K(\sigma) := \frac{\widetilde{\mathbf{b}}(\sigma)}{\mathbf{d}(\sigma)}$$

とおく時, 任意の $\sigma \in G_p$ に対して,

$$K(\sigma) = \frac{\varepsilon_{\mathrm{cyc}} \eta^{-1}(\sigma) - \mathbf{a}(\sigma)}{\mathbf{d}(\sigma)}$$

が成り立つことが判る．また, 上述の $\widetilde{\mathbf{b}}(\sigma)$ に対して次が成り立つことに注意する:

Lemma 3. $\mathcal{B} \subset \prod_i L_i$ を $\widetilde{\mathbf{b}}(\sigma)$ $(\forall \sigma \in G_{\mathbb{Q}})$ によって生成される $\mathbb{T}_{\mathfrak{P}}$-部分代数とする．この時, $\mathcal{B} \subset \mathfrak{P} (\subset \mathbb{T}_{\mathfrak{P}})$ である．

Proof. $\mathcal{B}^{\#} := (\mathcal{B} + \mathfrak{P})/\mathfrak{P}$ とおき,

$$K^{\#} : G_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{K} \mathcal{B} \twoheadrightarrow \overline{\mathcal{B}^{\#}} := \mathcal{B}^{\#}/\mathfrak{P}\mathcal{B}^{\#}$$

に対して, Key Lemma (2) の証明と同様の議論を行えばよい． $\square$

さて, 上の Lemma 3 により,

$$K : G_{\mathbb{Q}} \to \mathfrak{P}$$

であることが判った．このことから, 或る $\kappa : G_{\mathbb{Q}} \to E$ が存在して

$$\phi(K(\sigma)) = \kappa(\sigma) \cdot X \in E[X]/X^2$$

となることが導かれる．この κ によって得られる cohomology 類 $[\kappa] \in H^1(G_{\mathbb{Q}}, E(\chi^{-1}))$ は我々の望む性質を満たすことが容易に確かめられる．(実際, これまでの議論から

$$\begin{cases} \varepsilon_{\mathrm{cyc}}(\sigma) \equiv 1 + \log_p(\varepsilon_{\mathrm{cyc}}(\sigma)) \cdot X \quad (\forall \sigma \in G_{\mathbb{Q}}), \\ \phi \circ \eta(\mathrm{Frob}_p) \equiv 1 + \beta \mathcal{L}_{\mathrm{an}}(\chi) \cdot X, \\ \phi \circ \mathbf{a} = \psi_1, \\ \phi \circ \mathbf{d} = \psi_2 \end{cases}$$

であることが判る．これにより,

$$[\kappa]_p = \beta \cdot (\mathcal{L}_{\mathrm{an}}(\chi) \cdot \mathrm{ord}_p + \log_p)$$

であることが従う．従って, $\beta \neq 0$ であることから, $[\kappa] \in H^1(G_{\mathbb{Q}}, E(\chi^{-1}))$ が Claim 1' の性質を満たすことが判る．) 以上により, 題意は示された． □

3 Comments

前節に於いては, 簡単の為, $F = \mathbb{Q}$ の場合にのみ解説したが, 基礎体 F が高次の総実代数体である場合に於いても, 議論の出発点を $\mathrm{GL}_{2/F}$ の Eisenstein 級数に置き換え, Λ 進保型形式に付随する Galois 表現に関する肥田の定理 (cf. Fact 3) を Wiles のもの (cf. [13]) へと拡張することで, ほぼ同様にして Conjecture 2 を証明することができる．

また, これまでの議論に於いて仮定してきた Hypothesises 2, 3 については詳細な説明を省いてきたが, $F = \mathbb{Q}$ の場合に於ける Gross [7], 栗原 [8] の結果が示唆する通り, これ等の条件は本質的には除去可能なものであると推察される．更に, Hypothesis 1 についても, これを取り除いた形で Gross-Stark 予想 (Conjecture 1) を定式化することが可能であり, 実際, 次のことが示されている:

Theorem 2 (cf. [4] and [1, 12])**.** (χ, S) 及び p に対して岩澤主予想 (cf. [15]) が成り立つならば, 不等式

$$\mathrm{ord}_{s=0} L_{S,p}(\chi\omega,\, s) \geq \mathrm{ord}_{s=0} L_S(\chi,\, s)$$

が成り立つ．特に, $L_{S-\{\mathfrak{p}\}}(\chi, s) = 0$ ならば $L'_{S,p}(\chi\omega, 0) = 0$ である．

Proof. これについては, [4] の Lemma 1.2 に於いて証明が与えられている．但し, そこで用いられている指標 χ が "type S" であるという条件は不要であることに注意する．また, 同様の不等式は [1, 12] に於いても全く別の手法を用いて証明されている． □

References

[1] P. Charollois and S. Dasgupta, *Integral Eisenstein cocycles on GL_n, I : Sczech's cocycle and p-adic L-functions of totally real fields*, http://arxiv.org/abs/1206.3050.

[2] P. Cassou-Noguès, *Valeurs aux entiéres negatif des fonctions zeta et fonctions zeta p-adique*, Invent. Math. **51** (1979), 29–59.

[3] P. Colmez, *Rŕesidue en $s = 1$ des functions zêta p-adiques*, Invent. Math. **91** (1988), 371–389.

[4] H. Darmon, S. Dasgupta and R. Pollack, *Hilbert modular forms and the Gross-Stark conjecture*, Ann. of Math. **174** (2011), 439–484.

[5] P. Deligne and K. Ribet, *Values of abelian L-functions at negative integers over totally real fields*, Invent. Math. **59** (1980), 227–286.

[6] R. Greenberg, *Trivial zeros of p-adic L-functions*, in *p-adic Monodromy and the Birch and Swinnerton-Dyer Conjecture* (Boston, MA, 1991), Contemp. Math. **165**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, pp. 149–174.

[7] B. Gross, *p-adic L-series at $s = 0$*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **28** (1981), 979–994.

[8] 栗原将人, *Brumer-Stark* 予想と *Gross* 予想について, 本報告集.

[9] T. Miyake, *Modular forms*, Springer Monographs in Math., Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[10] K. Ribet, *A modular construction of unramified p-extensions of* $\mathbf{Q}(\mu_p)$, Invent. Math. **34** (1976), 151–162.

[11] C. L. Siegel, *Über die Fourierschen Keffizienten von Modulformen*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II **1970** (1970), 15–56.

[12] M. Speiss, *Shintani cocycles and vanishing order of p-adic Hecke L-series at $s = 0$*, http://arxiv.org/abs/1203.6689.

[13] 山上敦士, *Wiles* の *big Galois representation*, 本報告集.

[14] A. Wiles, *On ordinary λ-adic representations associated to modular forms*, Invent. Math. **94** (1988), 527–573.

[15] A. Wiles, *The Iwasawa conjecture for totally real fields*, Ann. of Math. **131** (1990), no.3, 493–540.