Brumer-Stark 予想と Gross 予想について

慶應義塾大学・理工学部
栗原　将人 (Masato Kurihara)

この稿では、§1 で Brumer-Stark 予想に関連したイデアル類群の指標成分の位数に関する予想について述べる。§2 では Gross 予想について述べ、§1 で述べた予想の非自明な場合が、Gross 予想を仮定すると成立することの証明を与える。§3 では基礎体が有理数体のときの Gross 予想が、今まで知られている方法とは別の方法でも証明できることについての概略を述べる。この稿の内容は、すべてサマースクールの講演どおりの内容である。

1　イデアル類群の指標成分の位数について

この節では、Brumer-Stark 予想に関連した、有名な予想について述べる (Conjecture 1.1)。k を総実代数体、K/k を有限次 abel 拡大とし、K は CM 体であるとする。K/k の Stickelberger 元 $\theta_{K/k}$ を

$$\theta_{K/k} = \sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(K/k)} \zeta(0,\sigma)\sigma^{-1} \in \mathbf{Q}[\mathrm{Gal}(K/k)]$$

と定義する。S_0 を k の無限素点と K/k で分岐する k の素点全体の集合とすると、三浦氏の稿の記号で、$\theta_{K/k} = \Theta_{K/k,S_0}(0)$ である。§1 では $\#S_0 \geq 2$ と仮定する。v を K/k で完全分解する k の有限素点として、$S_v = S_0 \cup \{v\}$ とおく。また、v_K を v の上の K の素イデアルとする。e を K に含まれる 1 の冪根の数とする。K/k, S_v, v, v_K についての rank 1 abelian Stark 予想が成立することを、加塩氏の稿にある通り $\mathrm{St}(K/k, S_v, v, v_K)$ と書くことにする。加塩氏の稿にあるように、この予想は、$e\theta_{K/k}v_K = (\varepsilon)$ (イデアルとして), $|\varepsilon|_w = 1$ for all $w|\infty$, $K(\varepsilon^{1/e})/k$ が abel 拡大, となるような $\varepsilon \in K^\times$ の存在と同値である。K/k で完全分解するすべての v に対して、$\mathrm{St}(K/k, S_v, v, v_K)$ が成り立つことを Brumer Stark 予想と呼び、$\mathrm{BrSt}(K/k)$ と書くことにする。Deligne Ribet, Cassou-Noguès により、

$e\theta_{K/k} \in \mathbf{Z}[\mathrm{Gal}(K/k)]$ となることが知られている。$\mathrm{BrSt}(K/k)$ が成り立てば、特に K のイデアル類群 Cl_K に対して

$$e\theta_{K/k} \in \mathrm{Ann}_{\mathbf{Z}[\mathrm{Gal}(K/k)]}(Cl_K) \tag{1.1}$$

($\mathrm{Ann}_R(M)$ は R 加群 M の零化域) が成り立つ。この (1.1) は $\mathrm{BrSt}(K/k)$ より弱いが、 (1.1) を Brumer 予想と呼び、$\mathrm{Br}(K/k)$ で表す。(1.1) は、$k = \mathbf{Q}$ のときには、古典的な Stickelberger の定理の述べるところである。

$\mathrm{BrSt}(K/k)$ も斜類群の零化域を使って言い換えることができる。また、$\mathrm{BrSt}(K/k)$ も $\mathrm{Br}(K/k)$ も各素数ごとの予想に分けることができる (以上については三浦氏の稿参照)。各素数 p に対して、e_p を K に含まれる 1 の p 冪乗根の数として、

$$e_p\theta_{K/k} \in \mathrm{Ann}_{\mathbf{Z}_p[\mathrm{Gal}(K/k)]}(Cl_K \otimes \mathbf{Z}_p)$$

を $\mathrm{Br}_p(K/k)$ と書くことにする。$\mathrm{Br}(K/k)$ が成立することは、すべての素数 p に対して $\mathrm{Br}_p(K/k)$ が成立することと同値である。

以下では、素数 p を固定することにする。$A_K = Cl_K \otimes \mathbf{Z}_p$ で K のイデアル類群 Cl_K の p 成分を表すとする。簡単のため、K が 1 の原始 p 乗根を含まないと仮定すると、$\mathrm{Br}_p(K/k)$ は

$$\theta_{K/k} \in \mathrm{Ann}_{\mathbf{Z}_p[\mathrm{Gal}(K/k)]}(A_K) \tag{1.2}$$

と書ける。

簡単のため、p を奇素数とすると、j を複素共役として、$A_K = A_K^+ \oplus A_K^-$ と分解する。ここに、$A_K^\pm = \{x \in A_K \mid j(x) = \pm x\}$ である。$\mathbf{Z}_p[\mathrm{Gal}(K/k)]$ の分解にしたがって、$\theta_{K/k} = \theta_{K/k}^+ + \theta_{K/k}^-$ と分解するが、$\theta_{K/k}^+ = 0$ なので、(1.2) は $\theta_{K/k}^- \in \mathrm{Ann}_{\mathbf{Z}_p[\mathrm{Gal}(K/k)]^-}(A_K^-)$ と同値である。

さらに簡単のために、 p が拡大次数 $[K : k]$ を割らないと仮定する。$\mathrm{Gal}(K/k)$ の指標 $\chi : \mathrm{Gal}(K/k) \longrightarrow \overline{\mathbf{Q}}_p^\times$ に対して、$O_\chi = \mathbf{Z}_p[\mathrm{Image}\,\chi]$ とおく。$\chi : \mathbf{Z}_p[\mathrm{Gal}(K/k)] \longrightarrow O_\chi$ を $\Sigma a_\sigma \sigma \mapsto \Sigma a_\sigma \chi(\sigma)$ と定義すると、これは環準同型写像であるが、この写像のことも χ と表すことにする。$O\chi \simeq \mathbf{Z}_p[\mathrm{Gal}(K/k)]/\operatorname{Ker}\chi$ により、O_χ を $\mathbf{Z}_p[\mathrm{Gal}(K/k)]$ 加群とみなし、任意の $\mathbf{Z}_p[\mathrm{Gal}(K/k)]$ 加群 M に対して、$M^\chi = M \otimes_{\mathbf{Z}_p[\mathrm{Gal}(K/k)]} O_\chi$ とおく。$\overline{\mathbf{Q}}_p^\times$ に値を持つ 2 つの指標 χ_1, χ_2 が同値であるとは、ある $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ があって、$\sigma\chi_1 = \chi_2$ が成り立つこととする。このとき、M は $\mathbf{Z}_p[\mathrm{Gal}(K/k)]$ 加群として、

$$M = \bigoplus_\chi M^\chi$$

と分解する。ここに、χ は $\mathrm{Gal}(K/k)$ の指標の同値類全体を走る (各同値類から指標 χ を取って、M^χ を考えることにする)。A_K に上に述べたことを適用して、分解

$$A_K = \bigoplus_\chi A_K^\chi$$

が得られる。この分解により、($[K:k]$ が p と素なときには) $\mathbf{Z}_p[\mathrm{Gal}(K/k)]$ 加群 A_K の構造を知ることは、各 χ に対して O_χ 加群 A_K^χ の構造を知ることと同値である。$\chi(j)=1$ のとき χ を偶指標、$\chi(j)=-1$ のとき χ を奇指標と呼ぶ。最初に述べた複素共役による分解と、上の分解との関係は、$A_K^+=\bigoplus_{\chi:\mathrm{even}} A_K^\chi$, $A_K^-=\bigoplus_{\chi:\mathrm{odd}} A_K^\chi$ である (それぞれ χ は偶指標、奇指標を走る)。

$\theta_{K/k}^\chi \in O_\chi$ を $\theta_{K/k}\in\mathbf{Z}_p[\mathrm{Gal}(K/k)]$ の χ 成分とする。上に述べたことから、$\mathrm{Br}_p(K/k)$ が成り立つことと、すべての奇指標 χ に対して、

$$\theta_{K/k}^\chi A_K^\chi = 0$$

が成立することは同値であることがわかる。χ の導手が K/k の導手に等しいとき、$\theta_{K/k}^\chi = L(0,\chi^{-1})$ である。また、一般の場合にも $\theta_{K/k}^\chi$ は $L(0,\chi^{-1})$ の倍元になっているので、すべての奇指標 χ に対して、

$$L(0,\chi^{-1})A_K^\chi = 0 \tag{1.3}$$

が成立すれば、$\mathrm{Br}_p(K/k)$ が成立することになる。

K_χ を χ の核に対応する体とする。χ は $\mathrm{Gal}(K_\chi/k)$ の指標ともみなせる。$[K:K_\chi]$ は p と素なので、$A_K^\chi = A_{K_\chi}^\chi$ が成立する。したがって、(1.3) を証明するためには、χ が $\mathrm{Gal}(K/k)$ の忠実な指標 ($\chi:\mathrm{Gal}(K/k)\longrightarrow O_\chi^\times$ が単射) であるとしてよい。(1.3) より強く、次が成り立つと予想されている。

Conjecture 1.1 K は 1 の p 冪根を含まず、p は $[K:k]$ を割らないと仮定する。χ を $\mathrm{Gal}(K/k)$ の忠実な奇指標であるとすると、

$$\mathrm{length}_{O_\chi} A_K^\chi = \mathrm{ord}_p(L(0,\chi^{-1}))$$

が成立する。ここに、ord_p は O_χ の加法的正規離散付値であり、$\mathrm{ord}_p(p)=1$ なるものである (今の仮定の下では O_χ は p を素元とする離散付値環であることに注意する)。

μ_p を 1 の p 乗根全体のなす群とする。$k=\mathbf{Q}$, $K=\mathbf{Q}(\mu_p)$, $\omega:\mathrm{Gal}(K/k)\longrightarrow \mathbf{F}_p^\times \subset \mathbf{Z}_p^\times$ を Teichmüller 指標とする。$1<i<p$ をみたす奇数 i に対して、ω^i を考えると、$\mathrm{length}_{\mathbf{Z}_p} A_{\mathbf{Q}(\mu_p)}^{\omega^i} = \mathrm{ord}_{\mathbf{Z}_p}(L(0,\omega^{-i}))$ が成立することは Mazur Wiles によって証明された有名な事実である (後で詳しく述べる)。しかしながらここで特筆したいのは、$[K:k]$ が p と素という簡単な条件の下でも、Conjecture 1.1 は一般には証明されていない、ということである。

一般に、$[K:k]$ が p と素、K が 1 の原始 p 乗根を含まない、という両仮定がなくても、χ が k の Teichmüller 指標 ω (μ_p への作用で決まる k 上の指標) とは異なる忠実な奇指標のときは、A_K^χ の位数について上と同じ式が成り立つことが予想される。

上の予想は、岩澤主予想と深く結びついていることを次に説明しよう。K/k は Conjecture 1.1 の通りとする。K_∞/K を円分 $\mathbf{Z}_p$ 拡大とし、K_∞ の最大不分岐 abel pro-p 拡大の Galois 群を X_{K_∞} で表すことにする (岩澤加群とよばれる)。X_{K_∞} は $\mathbf{Z}_p[[\mathrm{Gal}(K_\infty/k)]]$ 加群であるが、$\mathrm{Gal}(K/k)$ が作用するので、その χ 成分を取って、$X_{K_\infty}^\chi$ を $\Lambda_\chi := \mathbf{Z}_p[[\mathrm{Gal}(K_\infty/k)]]^\chi = O_\chi[[\mathrm{Gal}(K_\infty/K)]]$ 加群とみる。Iwasawa の定理により、$X_{K_\infty}^\chi$ は 0 以外の有限 Λ_χ 部分加群を持たない。このことから、$X_{K_\infty}^\chi$ の Λ_χ 加群としての関係行列として、正方行列がとれる；つまり、

$$0 \longrightarrow \Lambda_\chi^a \xrightarrow{f} \Lambda_\chi^a \longrightarrow X_{K_\infty}^\chi \longrightarrow 0 \tag{1.4}$$

の型の完全系列が作れる (生成元と関係式の数が同じ)。Λ_χ 加群の準同型写像 f に対応する正方行列を $A \in M_a(\Lambda_\chi)$ とする。$\det A$ は単数のずれを除けば、上の完全系列の取り方によらず、$X_{K_\infty}^\chi$ だけから決まる。

次に、岩澤主予想を述べるために、p 進解析的方面 (p 進ゼータ関数) を準備する。K_n を K_∞/K の中間体で $[K_n : K] = p^n$ をみたすものとする。$\theta_{K_n/k} \in \mathbf{Z}_p[\mathrm{Gal}(K_n/k)]$ を考えると、$n \gg 0$ に対してこれらは射影系をなす。そこで $\theta_{K_\infty/k} \in \varprojlim \mathbf{Z}_p[\mathrm{Gal}(K_n/k)] = \mathbf{Z}_p[[\mathrm{Gal}(K_\infty/k)]]$ が定義される。この χ 成分 $\theta_{K_\infty/k}^\chi \in \Lambda_\chi = O_\chi[[\mathrm{Gal}(K_\infty/K)]]$ を考えると、これが Deligne Ribet の p 進 L 関数 である。§2, §3 で必要となるので、普通 $L_p(s, \chi^{-1}\omega)$ と書かれる関数との関係を書いておく。$\kappa : \mathrm{Gal}(K_\infty/K) \longrightarrow \mathbf{Z}_p^\times$ を円分指標とする。すなわち、任意の 1 の p 幂乗根 ζ に対して、$\sigma(\zeta) = \zeta^{\kappa(\sigma)}$ となるような指標とする。$\mathrm{Gal}(K_\infty/K) \simeq \mathbf{Z}_p$ の生成元 γ を取る。$O_\chi[[\mathrm{Gal}(K_\infty/K)]]$ の元 μ に対して、γ に $\kappa(\gamma)^s$ を代入することによって得られる p 進関数を $\kappa^s(\mu)$ と書くことにすると、$\kappa^s(\theta_{K_\infty/k}^\chi) = L_p(s, \chi^{-1}\omega)$ である。特に $s = 0$ を代入することにより、

$$L_p(0, \chi^{-1}\omega) = \prod_{\mathfrak{p}|p} (1 - \chi^{-1}(\mathfrak{p})) L(0, \chi^{-1}) \tag{1.5}$$

が得られる。

以上の準備のもとに、<u>岩澤主予想</u> は Λ_χ の 2 つのイデアルの間の等式

$$(\det A) = (\theta_{K_\infty/k}^\chi) \tag{IMC}$$

として表される。

条件

(NTZ) p の上の k のすべての素イデアル $\mathfrak{p}$ が $\chi(\mathfrak{p}) \neq 1$ をみたしている

を仮定すると、γ を $\mathrm{Gal}(K_\infty/K)$ の生成元とするとき、

$$X^{\chi}_{K_\infty}/(\gamma-1) \simeq A^{\chi}_K \tag{1.6}$$

が成立する。また、$c:\Lambda_\chi = O_\chi[[\mathrm{Gal}(K_\infty/K)]] \longrightarrow O_\chi$ を $\gamma \mapsto 1$ で定義される自然な写像とすると、単数 $u \in O_\chi^\times$ があって

$$c(\theta^{\chi}_{K_\infty/k}) = uL(0,\chi^{-1}) \tag{1.7}$$

が成立する。したがって、(NTZ) を仮定すれば、上に述べた完全系列 (1.4) を mod $\gamma - 1$ したものと岩澤主予想 (IMC) とから Conjecture 1.1 は直ちに導かれる。岩澤主予想は (少なくとも $\mu = 0$ の仮定のもとに) Wiles によって証明されているので (cf. [12])、次が得られることになる (以下 $\mu = 0$ は仮定する)。

Theorem 1.2 (Wiles) (NTZ) の仮定の下、Conjecture 1.1 は正しい。特に、(1.3) も成立する。

$\mu_p \subset K^\times$ であっても、$[K:k]$ が p と素であり $\chi \neq \omega$ であれば、上とまったく同じ方法で Conjecture 1.1 にあたる等式は証明される。したがって、Conjecture 1.1 の後に述べた $k = \mathbf{Q}$, $K = \mathbf{Q}(\mu_p)$, $\chi = \omega^i$ のときの式が得られるのである。

一方、(NTZ) の仮定がみたされないとき、つまり $\chi(\mathfrak{p}) = 1$ をみたす p の上の k の素イデアル $\mathfrak{p}$ が存在しているときには、(1.6) も (1.7) も成立しない。もう少し正確に言うと、(NTZ) の仮定がみたされないときには、(1.6) の左辺は位数無限であり右辺は当然位数有限であるから、同型は絶対に成立しない。また、(1.7) の左辺は 0 であり右辺は 0 でないから、この等号も絶対に成立しない。このように、上の方法は (NTZ) の仮定がみたされないときには、適用不能なのである。

以上により、Conjecture 1.1 を証明しようとすると、さらにはまた Stark 予想 $\mathrm{St}(K/k, S_v, v, v_K)$ を証明しようとすると、$\chi(\mathfrak{p}) = 1$ をみたす p の上の k の素イデアル $\mathfrak{p}$ が存在しているときが問題である。この方面に関して、2 つの結果を述べておく。

$k = \mathbf{Q}$ のときの岩澤主予想を証明した後に、位数が p と素な指標 χ で $\chi(p) = 1$ となるような場合に関する長い議論を経て、Mazur と Wiles は次を得た。

Theorem 1.3 (Mazur Wiles) ([8] p. 216 Theorem 2)
$k = \mathbf{Q}$ のとき、Conjecture 1.1 は正しい。

Remark 1.4 $k = \mathbf{Q}$ のときは、$[K:\mathbf{Q}]$ が p と素という仮定をつけず任意の虚 abel 体 K に対して、円分体に対して定義されていた Iwasawa の Stickelberger イデアルの類似の Stickelberger イデアル $\Theta_K \subset$

$\mathbf{Z}[\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})]$ が定義され、イデアル類群の Fitting イデアル (cf. [9]) に関して、

$$\mathrm{Fitt}_{\mathbf{Z}_p[\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})]^-}(A_K^-) = (\Theta_K \otimes \mathbf{Z}_p)^-$$

が Kurihara Miura [7] で証明されている。したがって、イデアル類群と $\theta_{K/\mathbf{Q}}$ の間に Conjecture 1.1 より強い関係が存在するのである。特に、この Fitting イデアルについての等式から、$[K:\mathbf{Q}]$ の位数が p で割れていても Conjecture 1.1 の等式が成立していることもわかる (これは D. Solomon の定理 [10])。なお、$[K:k]$ が p で割れる場合も考えると、$\theta_{K/k} \in \mathrm{Fitt}_{\mathbf{Z}_p[\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})]}(A_K)$ という関係は、一般の総実代数体上では成立しない (cf. [4])。

次に Wiles による結果を述べる。

Theorem 1.5 (Wiles) K^{cl} を K の $\mathbf{Q}$ 上の Galois closure とする。$K^{cl} \not\subset (K^{cl})^+(\mu_p)$ を仮定すると、Conjecture 1.1 は正しい。

これは Wiles [13] の方法で証明できる。今、$[K:k]$ が p と素と仮定していることに注意しておく。(論文 [13] の Brumer 予想についての $[K:k]$ が p で割れるときの議論は正しくない。)

2 Gross 予想

K/k を §1 の最初のように、k を総実代数体、K/k を有限次 abel 拡大、K を CM 体であるとする。K/k で完全分解する p 上の k の素イデアル $\mathfrak{p}$ が存在するとする。$\mathfrak{p}$ の上の K の素イデアル $\mathfrak{P}$ をひとつ取る。このとき、χ を奇指標とすると、当然 $\chi(\mathfrak{p}) = 1$ となり、§1 の条件 (NTZ) はみたされていない。

$O_K[1/\mathfrak{p}]^\times$ を K の $\mathfrak{p}$ の外単数全体とする。$(O_K[1/\mathfrak{p}]^\times) \otimes \mathbf{Q}$ を考える。$\mathbf{Q}[\mathrm{Gal}(K/k)]$ がこの上に作用するので、$((O_K[1/\mathfrak{p}]^\times) \otimes \mathbf{Q})^-$ や $\mathrm{Gal}(K/k)$ の奇指標 χ に対して $((O_K[1/\mathfrak{p}]^\times) \otimes \mathbf{Q})^\chi$ を考えることができる。$\mathfrak{p}$ は K/k で完全分解すると仮定したので、$((O_K[1/\mathfrak{p}]^\times) \otimes \mathbf{Q})^\chi$ は $\mathbf{Q}(\mathrm{Image}\,\chi)$ 上 1 次元 vector 空間である。

Gross 予想は、$u \in ((O_K[1/\mathfrak{p}]^\times) \otimes \mathbf{Q})^-$ であって、

1) $\zeta_p'(0,\sigma) = -\log_p N_{K_{\mathfrak{P}}/\mathbf{Q}_p}(u^\sigma)$ for all $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/k)$,
2) $\zeta_{S_p \setminus \{\mathfrak{p}\}}(0,\sigma) = \mathrm{ord}_{\mathfrak{P}}(u^\sigma)$ for all $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/k)$,

をみたすものが存在する、と定式化される。ここに、$\zeta_p'(0,\sigma)$ は p 進部分 zeta 関数 $\zeta_p(s,\sigma)$ の 1 次微分の $s=0$ での値、S_p は p の上の k の素点全体である。

これを部分 zeta 関数でなく、L 関数で定式化する。$L_p(s,\chi^{-1}\omega)$ を p 進 L 関数とすると、$\chi^{-1}(\mathfrak{p}) = 1$ より、p 進 L 関数の補間公式 (1.5) か

ら $L_p(0,\chi^{-1}\omega)=0$ であることに注意する。上の条件を L 関数で書くと、任意の奇指標 χ に対して、$u^\chi \in ((O_K[1/\mathfrak{p}]^\times)\otimes \mathbf{Q})^\chi$ であって、

1) $L_p'(0,\chi^{-1}\omega)=-\log_p N_{K_{\mathfrak{P}}/\mathbf{Q}_p}(u^\chi)$,
2) $L_{S_p\setminus\{\mathfrak{p}\}}(0,\chi^{-1})=\mathrm{ord}_{\mathfrak{P}}(u^\chi)$,
をみたすものが存在する

と書ける。

ここで、

$$\mathcal{L}_\chi=-\frac{\log_p N_{K_{\mathfrak{P}}/\mathbf{Q}_p}(u^\chi)}{\mathrm{ord}_{\mathfrak{P}}(u^\chi)}\in \mathbf{Q}_p(\mathrm{Image}\,\chi)$$

とおくと、$\mathcal{L}_\chi$ は $u^\chi \in ((O_K[1/\mathfrak{p}]^\times)\otimes\mathbf{Q})^\chi$ の取り方によらない ($((O_K[1/\mathfrak{p}]^\times)\otimes \mathbf{Q})^\chi$ は 1 次元 $\mathbf{Q}(\mathrm{Image}\,\chi)$ vector 空間であることに注意する)。そこで、Gross 予想を

$$L_p'(0,\chi^{-1}\omega)=\mathcal{L}_\chi L_{S_p\setminus\{\mathfrak{p}\}}(0,\chi^{-1}) \tag{2.1}$$

と定式化することもできる。なお、Darmon Dasgupta Pollack [2] では上の $\mathcal{L}_\chi$ を $\mathcal{L}_{\chi^{-1}}$ と定義している。こう定義すれば、Gross 予想は

$$L_p'(0,\chi\omega)=\mathcal{L}_\chi L_{S_p\setminus\{\mathfrak{p}\}}(0,\chi)$$

と書けることになる。しかし、$\mathcal{L}_\chi$ は u の χ 成分 u^χ を使って定義されていること、§1 の記号とあわせるために $\mathcal{L}_\chi$ と書く方が自然であることから、ここでは $\mathcal{L}_\chi$ と書くことにする。

$\kappa : G_k=\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)\longrightarrow \mathbf{Z}_p^\times$ を円分指標、つまり任意の 1 の p 冪乗根 ζ に対して、$\sigma(\zeta)=\zeta^{\kappa(\sigma)}$ となるような指標とする。κ を $G_{k_\mathfrak{p}}=\mathrm{Gal}(\overline{k_\mathfrak{p}}/k_\mathfrak{p})$ の指標ともみなし、$\kappa : G_{k_\mathfrak{p}}\longrightarrow \mathbf{Z}_p^\times$ と $\log_p : \mathbf{Z}_p^\times \longrightarrow \mathbf{Z}_p$ の合成を χ_c と書くことにする。また、$\chi_{nr} : G_{k_\mathfrak{p}}\longrightarrow \mathbf{Z}_p$ を $G_{k_\mathfrak{p}}$ の Frobenius を 1 に送る不分岐指標とする。$E=\mathbf{Q}_p(\mathrm{Image}\,\chi)$ とおく。$O_\chi=\mathbf{Z}_p[\mathrm{Image}\,\chi]$ は E の整数環である。§1 で O_χ を $O_\chi=\mathbf{Z}_p[\mathrm{Gal}(K/k)]/\mathrm{Ker}\,\chi$ とみたのと同じ方法で、E を $\mathrm{Gal}(K/k)$ が χ を通じて作用する $\mathbf{Q}_p[\mathrm{Gal}(K/k)]$ 加群とみる。χ_c,χ_{nr} を $H^1(k_\mathfrak{p},E)$ の元とみなし、χ_c,χ_{nr} で生成される 2 次元 E 部分空間を $H^1(k_\mathfrak{p},E)^{cyc}$ と書く。$k_\mathfrak{p}=\mathbf{Q}_p$ のときは、$H^1(k_\mathfrak{p},E)^{cyc}=H^1(k_\mathfrak{p},E)$ である。

E に $\mathrm{Gal}(K/k)$ は χ で作用することを思い出そう。global Galois cohomology $H^1(k,E)$ を考える。$H^1(k,E)$ の元で $H^1(k_\mathfrak{p},E)$ での像が $H^1(k_\mathfrak{p},E)^{cyc}$ に入り、他の素イデアル v に対して $H^1(k_v,E)$ での像が $\mathrm{Ker}(H^1(k_v,E)\longrightarrow H^1(k_{v,nr},E))$ に入る ($k_{v,nr}$ は k_v の最大不分岐拡大) もの全体を $H^1_\mathfrak{p}(k,E)$ と書くことにする。次の命題は、それほどの困難はなく証明することができる。

Proposition 2.1 (Darmon Dasgupta Pollack [2]; Lemma 1.5, Proposition 1.6) K/k で完全分解する p の上の k の素イデアルは $\mathfrak{p}$ だけであるとする。このとき、
(1) $\dim_E H^1_{\mathfrak{p}}(k,E)=1$.
(2) $H^1_{\mathfrak{p}}(k,E)\longrightarrow H^1(k_{\mathfrak{p}},E)^{cyc}$ の像は $-\mathcal{L}_\chi\chi_{nr}+\chi_c$ で生成される。

この命題の意味を、もう少しわかりやすく述べておく。$H^1(K,\mathbf{Q}_p)$ には $\mathrm{Gal}(K/k)$ が作用するので、その χ^{-1} 成分 $H^1(K,\mathbf{Q}_p)^{\chi^{-1}}$ が考えられる。$H^1(k,E)=H^1(K,\mathbf{Q}_p)^{\chi^{-1}}$ であることに注意する。K_∞/K を円分 $\mathbf{Z}_p$ 拡大とする。K の $\mathbf{Z}_p$ 拡大 F/K であって、$\mathfrak{p}$ の外不分岐であり、FK_∞/K_∞ が $\mathfrak{p}$ の上のすべての素イデアルで不分岐であるものを考える。このような F 全体の合成を K' とおくと、$\mathrm{Gal}(K'/K)$ は $\mathbf{Z}_p[\mathrm{Gal}(K/k)]$ 加群である。$\mathrm{Gal}(K'/K)$ の χ 成分 $\mathrm{Gal}(K'/K)^\chi$ を考えるとき、Proposition 2.1 (1) は $\mathrm{Gal}(K'/K)^\chi\otimes\mathbf{Q}_p$ が E と同型であることを述べている。同様に、局所 cohomology についても $H^1(k_{\mathfrak{p}},E)=(\bigoplus_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}}H^1(K_{\mathfrak{P}},\mathbf{Q}_p))^{\chi^{-1}}$ である。(1) により、K'/K の中間体 K'_χ で $\mathrm{Gal}(K'_\chi/K)\simeq O_\chi$ ($\mathrm{Gal}(K/k)$ 加群として) となるものが存在するが、(2) はこの $\mathrm{Gal}(K'_\chi/K)$ の指標が、$(\bigoplus_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}}H^1(K_{\mathfrak{P}},\mathbf{Q}_p))^{\chi^{-1}}$ の中で $\mathcal{L}_\chi$ を使って書けることについて述べている。

$\mathcal{L}$ 不変量 $\mathcal{L}_\chi$ は Proposition 2.1 の性質によって特徴づけられると考えてもよい。

Gross 予想についての Darmon Dasgupta Pollack の仕事 [2] については河村氏の稿で詳しく解説されるので、ここではこれ以上詳しくは述べない。

以下 §1 と同じく、$[K:k]$ は p と素であり、K は 1 の原始 p 乗根を含まず、χ は $\mathrm{Gal}(K/k)$ の忠実な指標であると仮定する。§1 では K/k で完全分解する p の上の k の素イデアルが存在しないとき、Conjecture 1.1 が成立することを説明した (Theorem 1.2)。この節では、K/k で完全分解する p の上の k の素イデアルがただひとつ存在するときを考える。

Theorem 2.2 K/k は Conjecture 1.1 の仮定をみたし、また K/k で完全分解する p の上の k の素イデアルは $\mathfrak{p}$ だけであるとする。

$$\mathrm{ord}_p(\mathcal{L}_\chi)=\mathrm{ord}_p\left(\frac{L_p'(0,\chi^{-1}\omega)}{L_{S_p\setminus\{\mathfrak{p}\}}(0,\chi^{-1})}\right)$$

が成立すれば、Conjecture 1.1 は正しい。したがって、Gross 予想が正しければ Conjecture 1.1 は正しい。

D. Burns は論文 [1] において、もっと一般の状況で Gross 予想が Brumer-Stark 予想を導くことを証明している。[1] の証明は同変玉川数

予想とかかわる複体を用いる複雑なものなのだが、ここではもっと単純な方法でこの定理を証明する。

Theorem 2.2 の証明. §1 の記号をそのまま使う。K_∞/K を円分 $\mathbf{Z}_p$ 拡大とし、X_{K_∞} をその岩澤加群、L_∞ を $X_{K_\infty} = \mathrm{Gal}(L_\infty/K_\infty)$ なる体とする。L' を L_∞ の中の k の最大 abel 拡大とする。すなわち、L' は L_∞/K_∞ の中間体であり、$\mathrm{Gal}(L'/K_\infty) = X_{K_\infty}/(\gamma - 1)$ となる体である。w を $\mathfrak{p}$ の上にある K_∞ の素点とし、$D_w(L'/K_\infty)$ を $\mathrm{Gal}(L'/K_\infty)$ の中の w の分解群とする。$D_w(L'/K_\infty)$ は w の下にある K の素イデアル $\mathfrak{P}$ にしかよらないので、$D_{\mathfrak{P}}(L'/K_\infty)$ と書くことにする。$D_{\mathfrak{P}}(L'/K_\infty)$ は $\mathbf{Z}_p$ と同型である。$\mathrm{Gal}(L'/K_\infty)$ にも $\mathrm{Gal}(K/k)$ が作用するので、$\mathrm{Gal}(L'/K_\infty)^-$ や $\mathrm{Gal}(L'/K_\infty)^\chi$ を考える。$D = (\bigoplus_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} D_{\mathfrak{P}}(L'/K_\infty))^\chi$ とおく。$\mu_p \not\subset K^\times$ を使って、自然な写像 $D \longrightarrow \mathrm{Gal}(L'/K_\infty)^\chi$ は単射であり、D をこの像と同一視すると、D は $\mathrm{Gal}(L'/K_\infty)^\chi$ の中の指数有限部分群であることが示せる。したがって、D は $\mathrm{Gal}(L'/K_\infty)^\chi$ の中の階数 1 の自由 O_χ 部分加群である。

次に、$\mathfrak{p}$ の上の K の素イデアル $\mathfrak{P}$ に対して、$I_{\mathfrak{P}}(L'/K)$ を $\mathrm{Gal}(L'/K)$ の惰性群とする。$\mathrm{Gal}(K_\infty/K)$ には $\mathrm{Gal}(K/k)$ が自明に作用することから、$\mathrm{Gal}(L'/K)^- = \mathrm{Gal}(L'/K_\infty)^-$ である。また、$\mu_p \not\subset K^\times$ を使うと、

$$(\bigoplus_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} I_{\mathfrak{P}}(L'/K))^- \subset \mathrm{Gal}(L'/K)^- = \mathrm{Gal}(L'/K_\infty)^-$$

がわかる ([6] Proposition 5.2)。$I = (\bigoplus_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} I_{\mathfrak{P}}(L'/K))^\chi$ とおき、$\mathrm{Gal}(L'/K_\infty)^\chi$ の部分群とみなす。I は階数 1 の自由 O_χ 加群であり、$\mathrm{Gal}(L'/K_\infty)^\chi$ の中で指数有限である ([6] Proposition 5.2)。

$$(D : I) = \frac{(\mathrm{Gal}(L'/K_\infty) : I)}{(\mathrm{Gal}(L'/K_\infty) : D)}$$

とおく。

k_∞/k を円分 $\mathbf{Z}_p$ 拡大とし、k_n を $[k_n : k] = p^n$ なる中間体とする。$\mathfrak{p}$ は k_c において分解し、$\mathfrak{p}$ の上の k_c の素イデアルは k_∞/k で分解しない、となるように $c \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ をとる。まず、次の命題を証明する。

Proposition 2.3 $\mathrm{ord}_p(\log_p \kappa(\gamma)) = k$ とする。また、$\#(O_\chi/pO_\chi) = q$ とおく。このとき、

$$(D : I) = q^{c+k-\mathrm{ord}_p(\mathcal{L}_\chi)}$$

が成立する。

Remark 2.4 $c \geq 0$, $k \geq 1$ であることに注意する。$\mathcal{L}_\chi$ は必ずしも O_χ の元ではないので、$\mathrm{ord}_p(\mathcal{L}_\chi)$ の正負はわからない。実際に、$(D:I) > 1$ のときも $(D:I) < 1$ のときも実例として存在する。

Proposition 2.3 の証明. Proposition 2.1 (1) で存在することがわかった K の O_χ 拡大 K'_χ/K を考える。$\psi : \mathrm{Gal}(K'_\chi/K) \xrightarrow{\simeq} O_\chi$ をこの拡大に対応する指標とすると、$\psi \in H^1_{\mathfrak{p}}(k,E) \subset H^1(K,\mathbf{Q}_p)^{\chi^{-1}}$ であり、Proposition 2.1 (2) により $H^1(k_{\mathfrak{p}},E)$ の中で $\psi = a(-\mathcal{L}_\chi\chi_{nr} + \chi_c)$ ($a \in E$, $a \neq 0$) と書ける。

$K'_\chi \subset L'$ であるから、自然な全射 $\mathrm{Gal}(L'/K) \longrightarrow \mathrm{Gal}(K'_\chi/K)$ が存在するが、この χ 成分を取って、全射 $\epsilon : \mathrm{Gal}(L'/K_\infty)^\chi \longrightarrow \mathrm{Gal}(K'_\chi/K)$ が存在する。一般に、指数の記号 $(M:N)$ を M, N が共に L の指数有限部分群のとき、$(M:N) = (L:N)/(L:M)$ という意味で使うことにする。D, I が共に $\mathrm{Gal}(L'/K_\infty)^\chi$ の指数有限自由 O_χ 加群であることから、

$$(D:I) = (\epsilon(D):\epsilon(I))$$

となる。

k_∞/k における $\mathfrak{p}$ の分岐を、k_c で分解、$k_{c'}/k_c$ で惰性、$k_\infty/k_{c'}$ で完全分岐となるように $c' \in \mathbf{Z}_{\geq c}$ を定める。定義により、$\chi_{nr}(D) = p^{c'-c}O_\chi$, $\chi_c(I) = p^{c'+k}O_\chi$ である。したがって、

$$\begin{aligned}(D:I) &= (\epsilon(D):\epsilon(I)) \\ &= (ap^{c'-c}\mathcal{L}_\chi O_\chi : ap^{c'+k}O_\chi) = (O_\chi : p^{c+k}\mathcal{L}_\chi^{-1}O_\chi)\end{aligned}$$

が得られる。したがって、Proposition 2.3 が証明された。

Theorem 2.2 の証明に戻る。$\Gamma = \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$ とおく。$X^\chi_{K_\infty}$ の Γ 不変部分 $(X^\chi_{K_\infty})^\Gamma$ を考える。K_n を K_∞/K の n-th layer とする。c'' を $K_\infty/K_{c''}$ で p の上のすべての素イデアルが完全分岐するような整数とする。K_∞ に 1 の原始 p 乗根が含まれていないことから、$n > c''$ に対して、$A^{\mathrm{Gal}(K_n/K_{c''})}_{K_n}$ は $K_n/K_{c''}$ で分岐する素イデアルの類、つまり p の上の素イデアルの類で生成される。さらに、K/k で完全分解する p の上の素イデアルは $\mathfrak{p}$ のみであるという仮定から、$(A^\chi_{K_n})^{\mathrm{Gal}(K_n/K_{c''})}$ は $\mathfrak{p}$ の上の素イデアルの類で生成される。c を Proposition 2.3 の前に定義した通りの数とすると、$\mathfrak{p}$ の上の K の素イデアルはすべて K_c で完全分解し、K_∞/K_c では分解しない。したがって、$(X^\chi_{K_\infty})^{\mathrm{Gal}(K_\infty/K_c)}$ は $\mathfrak{p}$ の上の素点の類 (K_n の素イデアルの類の射影系の意味) で生成される。また、$N_c = \Sigma_{i=0}^{p^c-1}\gamma^i$ とおくとき、$(X^\chi_{K_\infty})^\Gamma$ は w が $\mathfrak{p}$ の上の K_∞ の素点を走るときに、$N_c w$ の類で生成される。$(X^\chi_{K_\infty})^\Gamma$ は階数 1 の自由 O_χ 加群である。

以上のことから、D を Proposition 2.3 の前に定義した $(X_{K_\infty}^\chi)/(\gamma-1)=\mathrm{Gal}(L'/K_\infty)^\chi$ の部分群とするとき、自然な写像 $(X_{K_\infty}^\chi)^\Gamma \longrightarrow (X_{K_\infty}^\chi)/(\gamma-1)=\mathrm{Gal}(L'/K_\infty)^\chi$ の像は p^cD と一致する。p 進 L 関数 $\theta_{K_\infty/k}^\chi$ を

$$\theta_{K_\infty/k}^\chi=\alpha(\gamma-1)+\beta(\gamma-1)^2 \qquad \alpha\in O_\chi,\ \beta\in O_\chi[[\mathrm{Gal}(K_\infty/K)]]$$

と書く。岩澤主予想 (IMC) と $(X_{K_\infty}^\chi)^\Gamma$ の $\mathrm{Gal}(L'/K_\infty)^\chi$ の像が p^cD であることから、

$$\begin{aligned}(O_\chi:\alpha O_\chi) &= \#\,\mathrm{Coker}((X_{K_\infty}^\chi)^\Gamma \longrightarrow (X_{K_\infty}^\chi)/(\gamma-1)) \\ &= (\mathrm{Gal}(L'/K_\infty)^\chi : p^cD) \qquad (2.2)\end{aligned}$$

がわかる。一方、A_K^χ は $\mathrm{Gal}(L'/K_\infty)^\chi$ の最大不分岐商であるから、

$$(\mathrm{Gal}(L'/K_\infty)^\chi : I)=\#A_K^\chi \qquad (2.3)$$

となる。(2.3) と Proposition 2.3 を使うと、

$$\begin{aligned}(\mathrm{Gal}(L'/K_\infty)^\chi : p^cD) &= (\mathrm{Gal}(L'/K_\infty)^\chi : I)(I:p^cD) \\ &= \#A_K^\chi q^{\mathrm{ord}_p(\mathcal{L}_\chi)-c-k+c} \\ &= \#A_K^\chi q^{\mathrm{ord}_p(\mathcal{L}_\chi)-k} \qquad (2.4)\end{aligned}$$

となる。一方、Gross 予想 (2.1) を認めると、

$$\begin{aligned}\mathrm{ord}_p(\alpha) &= \mathrm{ord}_p(L_p'(0,\chi^{-1}\omega))-k \\ &= \mathrm{ord}_p(\mathcal{L}_\chi)+\mathrm{ord}_p(L_{S_p\setminus\{\mathfrak{p}\}}(0,\chi^{-1}))-k \\ &= \mathrm{ord}_p(\mathcal{L}_\chi)-k+\mathrm{ord}_p(L(0,\chi^{-1})) \qquad (2.5)\end{aligned}$$

が得られる。(2.4), (2.5) を (2.2) に代入すると、

$$\#A_K^\chi = q^{\mathrm{ord}_p(L(0,\chi^{-1}))}$$

が得られる。 **Q.E.D.**

ひとりごととして：Conjecture 1.1 を証明しようとするとき、Wiles の Theorem 1.5 のようにテクニックを駆使して証明する方法もあるけれど ([6], [7] では自分でも同じ方法を使ったけれど)、本当に Conjecture 1.1 を証明しようとするなら、Theorem 2.2 で述べたようなやり方で本格的に真正面からぶつからないといけないんじゃないか。

3　有理数体上の Gross 予想

§3 では、基礎体 k が有理数体のときの Gross 予想は、円単数を使っても証明できることを述べる。(河村氏の稿では [2] の方法が説明されている。また $k=\mathbf{Q}$ のときに最初に証明された方法は、Ferrero Greenberg の公式と Gross Koblitz の公式を使う、というものであった。) ここに述べる証明の方法は、保型形式の p 進 L 関数の微分の値と Fontaine の $\mathcal{L}$ 不変量との関係 (Mazur Tate Teitelbaum の予想) に関する、1990 年代の加藤和也氏、辻雄氏と筆者との共同研究の方法を使うものである。この円単数を使った Gross 予想の証明については、15 年ほど前に Johns Hopkins 大学での研究集会で述べたが、発表したものはないので、ここでその概略を述べることにする。なお最近、D. Benois が Euler 系と $\mathcal{L}$ 不変量との関係を Perrin-Riou 理論を使って一般的に研究している。

Dirichlet 指標 $\chi:(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times \longrightarrow \overline{\mathbf{Q}}_p^\times$ は $\chi(p)=1$ をみたす奇指標であるとする。K を $\operatorname{Ker}\chi$ に対応する虚 abel 体とする。証明のポイントは、$H^1(O_K[1/p],\mathbf{Q}_p)^{\chi^{-1}}$ に L 関数、p 進 L 関数両方と結びつく元を構成することである。

以下で元の構成について述べる。任意の正の整数 n に対して、1 の原始 n 乗根 ζ_n を任意の n の約数 d に対して、$(\zeta_n)^d=\zeta_{n/d}$ となるように取っておく。整数 $n\in\mathbf{Z}_{>0}$ に対して、$L_n=\mathbf{Q}(\mu_{Np^n})$, $L=L_0$ とおく。K の導手は N だから、$K\subset L$ である。$1-\zeta_{Np^n}$ を $O_{L_n}[1/p]^\times\otimes\mathbf{Z}/p^n\subset H^1(O_{L_n}[1/p],\mathbf{Z}/p^n(1))$ の元とみる。$\xi_n=(1-\zeta_{Np^n})\otimes\zeta_{p^n}^{\otimes(-1)}$ を $H^1(O_{L_n}[1/p],\mathbf{Z}/p^n)$ の元とみる。$\operatorname{Cor}_{L_n/L}$ を Corestriction map とすると、$\operatorname{Cor}_{L_n/L}(\xi_n)\in H^1(O_L[1/p],\mathbf{Z}/p^n)$ は n に関して射影系をなすので、$z=(\operatorname{Cor}_{L_n/L}(\xi_n))\in H^1(O_L[1/p],\mathbf{Z}_p)$ が定義される。z の χ^{-1} 成分を取ることによって、$z^{\chi^{-1}}\in H^1(O_K[1/p],\mathbf{Z}_p)^{\chi^{-1}}$ が定義される。

この $z^{\chi^{-1}}$ は L 関数、p 進 L 関数両方と結びつく。簡単のため、以下では $\ell\equiv 1 \pmod p$ と仮定する。したがって、p は $L=\mathbf{Q}(\mu_N)$ で完全分解する。$\mathfrak{P}$ を p の上にある L の素イデアルとする。$H^1(L_\mathfrak{P},\mathbf{Q}_p)$ の中の $z^{\chi^{-1}}$ の像を計算する。$L_\mathfrak{P}=\mathbf{Q}_p$ であるから、$H^1(L_\mathfrak{P},\mathbf{Q}_p)=H^1(\mathbf{Q}_p,\mathbf{Q}_p)$ は χ_{nr}, χ_c で生成される 2 次元 $\mathbf{Q}_p$ vector 空間である (χ_{nr}, χ_c の定義は §2 の通り)。Proposition 2.1 (2) により、

$$z^{\chi^{-1}}=a(-\mathcal{L}_\chi\chi_{nr}+\chi_c),\quad a\in\mathbf{Q}_p \tag{3.1}$$

と書ける。a を求めよう。そのために Hilbert symbol に対する古典的な explicit reciprocity law を使う。今の場合、たとえば Iwasawa の公式 [5] を使えば十分である。$F=K_\mathfrak{P}(\mu_{p^n})=\mathbf{Q}_p(\mu_{p^n})$ とおく。$1-\zeta_{p^nN}\in F^\times$ と $\exp(px)\in F^\times$ $(x\in\mathbf{Z}_p)$ との Hilbert symbol $(1-\zeta_{p^nN},\exp(px))\in\mu_{p^n}$

を計算すると、

$$(1-\zeta_{p^nN}, \exp(px)) = \zeta_{p^n}^{\alpha}, \quad \alpha = \frac{px}{N^2}(1-\frac{1}{p})\sum_{c=1}^{N} c\zeta_N^c$$

と計算できる。一方、$\rho : \mathbf{Q}_p^{\times} \longrightarrow G_{\mathbf{Q}_p}^{ab}$ を局所類体論の相互写像とすると、$z^{\chi^{-1}}(\rho(\exp(px))) = a\chi_c(\rho(\exp(px))) = -apx$ となる。以上により、

$$a = \frac{1}{N}(1-\frac{1}{p})L(0,\chi^{-1})\tau(\chi^{-1}) \tag{3.2}$$

と計算できる。ここに、$\tau(\chi^{-1}) = \sum_{c=1}^{N}\chi^{-1}(c)\zeta_N^c$ は Gauss 和である。

次に、$p \in \mathbf{Q}_p^{\times}$ の $H^1(\mathbf{Q}_p, \mathbf{Q}_p(1))$ での像と $z^{\chi^{-1}} \in H^1(\mathbf{Q}_p, \mathbf{Q}_p)$ との cup 積を計算すると、p 進 L 関数の微分の値が出てくる。円単数 $1-\zeta_{p^nN}$ から p 進 L 関数 $L_p(s,\chi^{-1}\omega)$ が Iwasawa Coleman の方法で構成されること、円単数 $1-\zeta_{p^n}$ からこの方法で自明な指標に関する p 進 L 関数 $L_p(s,1)$ が構成されること、$p = N_{\mathbf{Q}_p(\mu_{p^n})/\mathbf{Q}}(1-\zeta_{p^n})$ であることを用いて、

$$z^{\chi^{-1}}(\rho(p)) = -\frac{1}{N}(1-\frac{1}{p})\tau(\chi^{-1})L_p'(0,\chi^{-1}\omega) \tag{3.3}$$

が証明できる。

一方、(3.1) と (3.2) により、

$$z^{\chi^{-1}}(\rho(p)) = -\frac{1}{N}(1-\frac{1}{p})\tau(\chi^{-1})\mathcal{L}_{\chi}L(0,\chi^{-1}) \tag{3.4}$$

である。(3.3) と (3.4) を比較して、

$$L_p(0,\chi^{-1}\omega) = \mathcal{L}_{\chi}L(0,\chi^{-1})$$

が示せるのである。

参考文献

[1] Burns, D., On derivatives of p-adic L-series at $s = 0$, preprint (2012).

[2] Darmon, H. Dasgupta S. and Pollack, R., Hilbert modular forms and the Gross-Stark conjecture, Ann. Math. 174 (2011) 439-484.

[3] Deligne, P. and Ribet, K., Values of abelian L-functions at negative integers over totally real fields, Invent. math. 59 (1980), 227-286.

[4] Greither, C. and Kurihara, M., Stickelberger elements, Fitting ideals of class groups of CM fields, and dualisation, Math. Zeitschrift **260** (2008), 905-930.

[5] Iwasawa, K., On explicit formulas for the norm residue symbols, J. Math. Soc. Japan 20 (1968), 151-165.

[6] Kurihara, M., Iwasawa theory and Fitting ideals, Crelle's Journal 561 (2003), 39-86.

[7] Kurihara, M. and Miura, T., Stickelberger ideals and Fitting ideals of class groups for abelian number fields, Math. Annalen **350** (2011), 549-575.

[8] Mazur, B. and Wiles, A., Class fields of abelian extensions of $\mathbf{Q}$, Invent. math. 76 (1984), 179-330.

[9] Northcott, D. G., *Finite free resolutions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge New York (1976).

[10] Solomon, D., On the classgroups of imaginary abelian fields, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 40-3 (1990), 467-492.

[11] Washington, L., *Introduction to cyclotomic fields*, Graduate Texts in Math. 83, Springer-Verlag 1982.

[12] Wiles, A., The Iwasawa conjecture for totally real fields, Ann. of Math. 131 (1990), 493-540.

[13] Wiles, A., On a conjecture of Brumer, Ann. of Math. 131 (1990), p. 555-565.