Brumer-Stark 予想

三浦 崇 (慶應義塾大学)

概 要

本稿は Brumer-Stark 予想の survey である．第 1 節では Brumer-Stark 予想を定式化し，いくつかの同値な言い換えを与える．これによって Brumer-Stark 予想が 1 次元の Rubin-Stark 予想と同値であることが，従って階数 1 の abelian Stark 予想 (加塩氏の稿で $\mathrm{St}(K/k,\, S, \mathfrak{p}, \mathfrak{P})$) と同値であることが示される．別の同値な言い換えを用いると，Brumer-Stark 予想を多くの場合に同変岩澤主予想に帰着することができる．第 2 節では Greither-Popescu の最近の論文 [11] に従って，同変岩澤主予想の定式化とその証明を紹介する．

1 Brumer-Stark 予想

この節ではいくつかの準備の後, Brumer 予想と Brumer-Stark 予想を定式化する．さらに，Brumer-Stark 予想が，Stickelberger 元によるある ray class group の族の annihilation と同値であること，さらに一次元の Rubin-Stark 予想と同値であることを示す．その後，Brumer-Stark 予想の強い版を定式化し，これに関して知られている結果及び Greither-Popescu によって得られた最近の結果を紹介する．

1.1 予想の定式化

記号と設定

k : 総実代数体
K : k 上アーベルな CM 体
$G := \mathrm{Gal}(K/k)$: K/k の Galois 群
$j \in G$: 複素共役写像
$\mu(K)$: K に属する 1 のベキ根のなす群
$e := |\mu(K)|$
$E_K := O_K^\times$ (K の単数群)
Cl_K : K のイデアル類群

S_∞ を k の無限素点の集合, $S_{\mathrm{ram}}(K/k)$ を K で分岐する k の有限素点の集合とし，S を k の素点の有限集合で $S_\infty \cup S_{\mathrm{ram}}(K/k)$ を含むものとする．また，S に含まれる有限素点のなす集合を S_f と書く．この時, $\mathbb{C}[G]$ に値を持つ G-同変な S-imprimitive L-関数を次のように定義する．

$$\Theta_{K/k,S}(s) := \sum_{\chi \in \widehat{G}} L_{k,\,S}(s,\, \chi^{-1}) e_\chi = \sum_{\sigma \in G} \zeta_{k,\,S}(s,\, \sigma)\sigma^{-1}.$$

ここで, $L_{k,\,S}(s,\, \chi)$ は S に属する素点以外の Euler 因子の積によって定義される k 上の L-関数であり, e_χ は

G の指標 χ に対応する idempotent である．また $\zeta_{k,\,S}(s,\,\sigma)$ は

$$\zeta_{k,\,S}(s,\,\sigma) := \sum_{\substack{(\frac{K/k}{\mathfrak{a}})=\sigma \\ (\mathfrak{a},\,S)=1}} \frac{1}{N\mathfrak{a}^s}$$

で定義される部分ゼータ関数である ($\mathfrak{a}$ は k の整イデアル，$(\frac{K/k}{\cdot})$ はアルティン記号である)．Siegel-Klingen の結果より，$\Theta_{K/k,S}(s)$ は $s=0$ で $\mathbb{Q}$ 係数の G 上の群環に値を持つことが分かる．そこで，

$$\theta_{K/k,\,S} := \Theta_{K/k,\,S}(0) \in \mathbb{Q}[G]$$

とおき，これを K/k の S-imprimitive Stickelberger 元と呼ぶ．S が最小，つまり $S = S_\infty \cup S_{\mathrm{ram}}(K/k)$ の時は単に $\theta_{K/k}$ と書き，原始的 Stickelberger 元と呼ぶ．定義より Stickelberger 元は，次の性質を満たす $\mathbb{Q}[G]$ の元として一意に特徴付けられる; 任意の (奇) 指標 $\chi \in \widehat{G}$ に対して，

$$\chi(\theta_{K/k,\,S}) = L_{k,\,S}(0,\,\chi^{-1}) = \prod_{v \in S_f \setminus S_{\mathrm{ram}}(K_\chi/k)} (1-\chi^{-1}(\mathrm{Frob}_v))L_k(0,\,\chi^{-1}).$$

ここで K_χ は $\mathrm{Ker}(\chi)$ に対応する K の部分体，$L_k(s,\,\chi) := L_{k,\,S_{\mathrm{ram}}(K_\chi/k)}(s,\,\chi)$ は χ に対応する (原始的な)L-関数である．この特徴づけより次の Lemma が直ちに従う．

Lemma 1.1. 中間体 $k \subset E \subset K$ に対して $c_{K/E} : \mathbb{Z}[\mathrm{Gal}(K/k)] \longrightarrow \mathbb{Z}[\mathrm{Gal}(E/k)]$ を制限写像から誘導される群環の間の写像とする．この時，

$$c_{K/k}(\theta_{K/k,\,S}) = \theta_{E/k,\,S} = \prod_{v \in S_f \setminus S_{\mathrm{ram}}(E/k)} (1-\mathrm{Frob}_v^{-1})\theta_{E/k}$$

が成り立つ．

Stickelberger 元は一般に $\mathbb{Q}$ 係数の群環の元であるが，次の定理が示すように適当なイデアルを掛けることによって $\mathbb{Z}$ 係数の群環に含まれるようにすることができる．

Theorem 1.2 (Deligne-Ribet [3])**.**

$$\mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}[G]}(\mu(K))\theta_{K/k,\,S} \subset \mathbb{Z}[G].$$

こうして $\mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}[G]}(\mu(K))\theta_{K/k,\,S}$ の任意の元は K のイデアル類に作用できるが，この作用によって K の任意のイデアル類が単項イデアルになるであろうというのが Bruemr 予想である．

Conjecture 1.3 (Brumer 予想，$\mathrm{Br}(K/k,\,S)$)**.**

$$\mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}[G]}(\mu(K))\theta_{K/k,\,S} \subset \mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathrm{Cl}_K).$$

Brumer 予想は $k=\mathbb{Q}$ の場合は Stickelberger の定理として知られている古典的結果である ([30] 参照)．Stickelberger の定理は Gauss 和の素イデアル分解を用いて証明される．特に，Stickelberger 元によって単項化された分数イデアルの生成元も Gauss 和によって具体的に記述することができ，単項化された分数イデアルの生成元の $e = \#\mu(K)$ 乗根を K に添加した体もまた円分体に含まれることが確かめられる．詳細は [32] や [6] を参照されたい．

基礎体が一般の総実代数体の場合も，この文脈に沿って Brumer 予想の精密化が定式化されている．

Conjecture 1.4 (Brumer-Stark 予想，$\mathrm{BrSt}(K/k,S)$)**.** K の任意の分数イデアル $\mathfrak{a}$ に対して，次の 3 条件を満たす $\alpha \in K^\times$ が存在する．

(1) $\mathfrak{a}^{e\theta_{K/k,\,S}} = (\alpha)$.

(2) $K(\alpha^{\frac{1}{e}})/k$ はアーベル拡大.

(3) $\alpha \cdot j(\alpha) = 1$.

Remark 1.5. 条件 (1) は Brumer 予想よりも弱い形の主張であるが，条件 (2) の同値な言い換えと組み合わせることで Brumer 予想を導くことができる (Proposition 1.13 の証明 参照)．Kummer 理論より $K(\alpha^{\frac{1}{e}})/K$ はアーベル拡大であるが，条件 (2) は $K(\alpha^{\frac{1}{e}})/k$ がアーベル拡大であることを主張しており，類体の構成問題に部分的な解答を与えるものである．条件 (3) を満たす α は anti-unit と呼ばれ，このような α は $\mu(K)$ の曖昧さを許し一意に決まる．$S' \supset S$ の時 $\mathrm{Br}(K/k,\,S)$ (resp. $\mathrm{BrSt}(K/k,\,S,\,T)$) は $\mathrm{Br}(K/k,\,S')$ (resp. $\mathrm{BrSt}(K/k,\,S',\,T)$) を導く．従って S が最小，すなわち $S = S_\infty \cup S_{\mathrm{ram}}(K/k)$ に対する Brumer 予想や Brumer-Stark 予想が最も強い場合である．

Proposition 1.6 (Tate [31]，Dasgupta [1])**.** K の単項イデアル $\mathfrak{a} = (\alpha)$ に対して $\mathrm{BrSt}(K/k,\,S)$ は正しい．

この Proposition により，$\mathrm{BrSt}(K/k,\,S)$ を証明するためには K の各イデアル類 $\mathcal{C}$ に対して，少なくとも一つの分数イデアル $\mathfrak{a} \in \mathcal{C}$ が $\mathrm{BrSt}(K/k,\,S)$ を満たすことを示せば十分である．

次に述べる Lemma 1.7 はアーベル拡大の特徴づけを与えるもので，この Lemma 1.7 によって Brumer-Stark 予想の別の定式化が得られ，また一次元 Rubin-Stark 予想との同値性を示すことができる．その準備として S とは異なる新しい素点の集合を用意する．T を k の素点の有限集合とする．k の素点の有限集合の組 $(S,\,T)$ が仮定 (H_0) を満たすとは次の 3 条件が成り立つことをいう．

仮定 (H_0)

1. S は $S_\infty \cup S_{\mathrm{ram}}(K/k)$ を含む.
2. $S \cap T = \emptyset$.
3. $E_K^T \cap \mu(K)$=$\{1\}$

ただし，$E_K^T := \{x \in E_K \mid x \equiv 1 \pmod{w} \text{ for all } w \in T_K\}$，$T_K$ は T の素点の上にある K の素点のなす集合である．

Lemma 1.7 (Tate [31])**.** $\alpha \in K^\times$ に対して，

$$\mathrm{supp}(\alpha) := \{v : \text{primes in } k \text{ such that } v(N_{K/k}(\alpha)) = 0\}$$

とおく．仮定 (H_0)-1 を満たす素点の集合 S を一つ固定する．$\alpha \in K^\times$ に対して次は同値である．

(1) $K(\alpha^{\frac{1}{e}})/k$ はアーベル拡大である．

(2) 仮定 (H_0) と $T \cap \mathrm{supp}(\alpha) = \emptyset$ 満たす任意の T に対して，次の条件を満たす $\alpha_T \in K^\times$ が存在する．

$$\alpha^{\delta_T} = \alpha_T^e,\ \alpha_T \equiv 1 \bmod T_K.$$

ここで，$\delta_T := \prod_{v\in T}\delta_v := \prod_{v\in T}\left(1-\phi_v^{-1}Nv\right)$ であり，ϕ_v は $G=\mathrm{Gal}(K/k)$ における v の Frobenius，Nv は v の絶対ノルムである．また，"mod T_K" は "mod w for all w in T_K" を意味する．

Proof . $\eta=\alpha^{\frac{1}{e}}$ とおく．

(1) ⇒ (2) であること：$\mathrm{Gal}(K(\eta)/k)$ への ϕ_v の延長を一つ固定し，$\alpha_T := \eta^{\delta_T}\in K(\eta)$ とおく．任意の $\tau\in\mathrm{Gal}(K(\eta)/k)$ に対して，$\eta^{\tau-1}\in\mu(K)$ かつ $\left(\eta^{\tau-1}\right)^{\delta_T}\equiv 1 \bmod T_K$ であるから，$\left(\eta^{\tau-1}\right)^{\delta_T}=1$ である．ゆえに $\alpha_T^{\tau-1}=1$，従って $\alpha_T\in K^\times$ を得る．α_T の定義より，残りの 2 条件が成り立つこともすぐに確かめられる．

(2) ⇒ (1) であること：まず $K(\eta)/k$ が Galois 拡大であることを示す．任意の $\tau\in\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ を固定する．Chebotarev の密度定理より，次の条件を満たすような k の素点 v が存在する．

$$\tau|_K=\phi_v,\quad Nv>e,\quad v\notin\mathrm{supp}(\alpha) \tag{1.1}$$

二つ目の条件より $(S,\{v\})$ は仮定 (H_0) を満たすので，ある $\alpha_v\in K^\times$ が存在して，

$$\alpha_v\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ \ v),\quad \alpha_v^e=\alpha^{\delta_v} \tag{1.2}$$

を満たす．従って，

$$(\eta^\tau)^e=\alpha^{\tau|_K}=\alpha^{\phi_v}=(\alpha^{\delta_v})^{\phi_v}\cdot\alpha^{Nv}=(\alpha_v^e)^{\phi_v}\cdot\eta^{eNv}=\left(\alpha_v^{\phi_v}\cdot\eta^{Nv}\right)^e$$

ゆえに，ある $\zeta\in\mu(K)$ $(\zeta^e=1)$ を用いて，

$$\eta^\tau=\alpha_v^{\phi_v}\cdot\eta^{Nv}\cdot\zeta \tag{1.3}$$

と書くことができる．ゆえに $\eta^\tau\in K(\eta)$ を得る．

次に $K(\eta)/k$ がアーベル拡大であることを示す．$\tau,\tau'\in\mathrm{Gal}(K(\eta)/k)$ に対して，上で述べた (1.1) と同様の条件を満たす k の素点 v, v' が存在する．従って，上の (1.2) と同様の条件を満たす $\alpha_v,\alpha_{v'}\in K^\times$ が存在する．$(\alpha_v^{\delta_{v'}})^e=\alpha^{\delta_v\delta_{v'}}=(\alpha_{v'}^{\delta_v})^e$ より，ある $\zeta\in\mu(K)$ を用いて $\alpha_v^{\delta_{v'}}=\alpha_{v'}^{\delta_v}\zeta$ と書くことができるが，$\alpha_v^{\delta_{v'}}\equiv\alpha_{v'}^{\delta_v}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ v)$ であるから $\zeta=1$，すなわち $\alpha_v^{\delta_{v'}}=\alpha_{v'}^{\delta_v}$ を得る．この式と (1.3) を用いて

$$\eta^{(\tau-Nv)(\tau'-Nv')}=(\alpha_v^{\delta_{v'}})^{\phi_v\phi_{v'}}=(\alpha_{v'}^{\delta_v})^{\phi_v\phi_{v'}}=\eta^{(\tau'-Nv')(\tau-Nv)}$$

が従うので，$\tau\tau'=\tau'\tau$ を得る． □

仮定 (H_0) を満たす素点の集合 (S,T) に対して T-modified S-imprimitive L-関数を次のように定義する．

$$\Theta_{K/k,S,T}(s):=\prod_{v\in T}\left(1-\phi_v^{-1}Nv^{1-s}\right)\Theta_{K/k,S}(s)$$

また，

$$\theta_{K/k,S,T}:=\Theta_{K/k,S,T}(0)\in\mathbb{Z}[G]$$

と定義し，K/k の T-modified S-imprimitive Stickelberger 元と呼ぶ ($\delta_T\in\mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}[G]}(\mu(K))$ であるから，$\theta_{K/k,S,T}\in\mathbb{Z}[G]$ である)．

次に，Brumer-Stark 予想の "T-modified" 版 $\mathrm{BrSt}(K/k,S,T)$ を定義し $\mathrm{BrSt}(K/k,S)$ との同値性を示す．

Conjecture 1.8 ($\mathrm{BrSt}(K/k,S,T)$)**.** T_K に含まれる素点と互いに素であるような K の任意の分数イデアル

$\mathfrak{a}$ に対して，次を満たすような anti-unit $\alpha_T \in (K^\times)_{S,\,0}$ が存在する；

$$\mathfrak{a}^{\theta_{K/k,\,S,\,T}} = (\alpha_T), \quad \alpha_T \equiv 1 \pmod{T_K}. \tag{1.4}$$

ただし $(K^\times)_{S,\,0} := \{x \in K^\times \,|\, e_{S,\,0}x = x \text{ in } K^\times \otimes \mathbb{Q}\}$ である ($e_{S,\,0}$ については次の Remark 参照).

Remark 1.9. (1). $r_S(\chi) := \mathrm{ord}_{s=0} L_{k,\,S}(s,\,\chi) = \#\{v \in S \,|\, G_v \subset \mathrm{Ker}(\chi)\}$ であり，$e_{S,\,r} = \sum_{r_S(\chi)=r} e_\chi \in \mathbb{Q}[G]$ であった (加塩氏の稿参照). Stickelberger 元の定義より $e_{S,\,0}\theta_{K/k,\,S} = \theta_{K/k,\,S}$，$e_{S,\,0}\theta_{K/k,\,S,\,T} = \theta_{K/k,\,S,\,T}$ が従う．$r_S(\chi) = 0$ を満たす指標 χ は奇指標であるから $(1+j)e_{S,\,0} = 0$，$(1+j)\theta_{K/k,\,S} = 0$ である．

(2). 次の形の単項イデアル $\mathfrak{a} = (\alpha)$ ($\alpha \in K^\times$, $\alpha \equiv 1 \bmod T_K$) に対しては，$\mathrm{BrSt}(K/k,\,S,\,T)$ が正しいことが (1) より直ちに確かめられる．

(3). Cl_K^T を modulus $\prod_{w \in T_K} w$ に対応する K の ray class group とするとき，

$$\mathrm{BrSt}(K/k,\,S,\,T) \Longrightarrow \theta_{K/k,\,S,\,T} \in \mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathrm{Cl}_K^T)$$

が成り立つ．(2) より逆向きの矢印も成り立ちそうであるが，$\alpha_T \in (K^\times)_{S,\,0}$ を示すには，一般には 2-part を無視する，つまり群環 $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}][G]$ 上で考える必要がある (Proposition 1.18 参照).

$\mathrm{BrSt}(K/k,\,S)$ と $\mathrm{BrSt}(K/k,\,S,\,T)$ の同値性を示すのに，一次元 Rubin-Stark 予想を考えると都合が良い．そこで一次元の場合のみを簡単に復習しておく．$v \notin S$ を K/k で完全分解する k の素点とし $S_v = S \cup \{v\}$ とおく (加塩氏の稿も参照)．v の上にある K の素点 w を一つ固定し，regulator map を次で定義する

$$R_w : K^\times \longrightarrow \mathbb{C}[G]\,;\, x \longmapsto -\sum_{\sigma \in G} \log |x|_{\sigma w}\sigma.$$

ここで $|\cdot|_{\sigma w} = Nv^{-\mathrm{ord}_{\sigma w}(\cdot)}$ である．定義より R_w は w の取り方に依らないことが分かる．

$E_{K,\,S_v} := O_{K,\,S_v}^\times$ (K の S_v-単数群) とし，$E_{K,\,S_v}^T := \{x \in E_{K,\,S_v} \,|\, x \equiv 1 \bmod T_K\}$ とおく．一次元 Rubin-Stark 予想は次のように述べられる．

Conjecture 1.10 ($\mathrm{RS}(K/k,\,S_v,\,T,\,1)$)**.** $(S_v,\,T)$ は仮定 (H_0) を満たすとする．ある $\varepsilon = \varepsilon_{S_v,\,T} \in (E_{K,\,S_v}^T)_{S_v,\,1} := \{x \in E_{K,\,S_v}^T \,|\, e_{S_v,\,1}x = x \text{ in } E_{K,\,S_v}^T \otimes \mathbb{Q}\}$ が存在して，

$$R_w(\varepsilon) = \Theta^{(1)}_{K/k,\,S_v,\,T}(0) \left(:= \lim_{s \to 0} \frac{\Theta_{K/k,\,S_v,\,T}(s)}{s} \right) \tag{1.5}$$

が成り立つ．

Remark 1.11. (1). 上の式 (1.5) の両辺は，

$$\begin{aligned} R_w(\varepsilon) &= \log Nv \cdot \sum_{\sigma} \mathrm{ord}_{\sigma w}(\varepsilon)\sigma \\ \Theta^{(1)}_{K/k,\,S_v,\,T}(0) &= \lim_{s \to 0} \frac{1 - Nv^{-s}}{s} \Theta_{K/k,\,S,\,T}(s) = \log Nv \cdot \theta_{K/k,\,S,\,T} \end{aligned}$$

と計算できる．よって，

$$(1.5) \Longleftrightarrow \sum_{\sigma \in G} \mathrm{ord}_{\sigma w}(\varepsilon)\sigma = \theta_{K/k,\,S,\,T}.$$

(2). $e_{S_v,1} = e_{S,0}$ より $(E^T_{K,S_v})_{S_v,1} = (E^T_{K,S_v})_{S,0}$ である．さらに $(E^T_{K,S_v})_{S,0}$ の元は $\{v\}$-単数であることが次のように確かめられる．$\varepsilon \in (E^T_{K,S_v})_{S,0}$ の生成する単項イデアルの素イデアル分解を $(\varepsilon) = \prod_{w\,|\,v} w^{n_w} \prod_{w\in S_{K,f}} w^{n_w}$ と書く．$e_{S,0}\varepsilon = \varepsilon$ であるから，$w \in S_{K,f}$ に対して $e_{S,0}w = (1) = O_K$ であることを示せばよい．$r_S(\chi) = 0$ であることは，すべての $w \in S_{K,f}$ に対して $G_w \not\subset \mathrm{Ker}(\chi)$ であることと同値であった．従ってそのような χ に対して，指標の直交性より $e_\chi w = \prod_{\sigma\in G/G_w} (\sigma^{-1}w)^{\frac{\chi(\sigma)}{\#G}\sum_{\tau\in G_w}\chi(\tau)} = (1)$.

Lemma 1.12. (S_v, T) は仮定 (H_0) を満たすとする．この時，上で定義した $R_w : (E^T_{K,S_v})_{S,0} \longrightarrow \mathbb{C}[G]$ は単射である．

Proof . $\varepsilon \in (E^T_{K,S_v})_{S,0}$ が $R_w(\varepsilon) = 0$ を満たすとする．$\mathrm{ord}_w(\varepsilon) = 0$ $(\forall w\,|\,v)$ であり，ε は $\{v\}$-単数であるから (Remark 1.11 (2))，$\varepsilon \in E_K$ である．さらに $\varepsilon = e_{S,0}\varepsilon$ より $(1+j)\varepsilon = 1$，従って $\varepsilon \in \mu(K)$ である．$\varepsilon \in E^T_{K,S_v} \cap \mu(K)$ より $\varepsilon = 1$ である． □

Proposition 1.13. k の素点の有限集合 S をこれまでと同じように取り固定する．

$$\mathcal{T}_{(H_0)}(S) := \{T : k \text{ の素点の有限集合で } (S,T) \text{ は仮定 } (H_0) \text{ を満たす.}\}$$

とおく．このとき次の 3 つは同値である．

(1) $\mathrm{BrSt}(K/k,\, S)$ が成り立つ．

(2) $\mathrm{BrSt}(K/k,\, S,\, T)$ が任意の $T \in \mathcal{T}_{(H_0)}(S)$ に対して成り立つ．

(3) $\mathrm{RS}(K/k,\, S_v,\, T,\, 1)$ が K/k で完全分解する任意の $v \notin S$ と，任意の $T \in \mathcal{T}_{(H_0)}(S_v)$ に対して成り立つ．

Proof . (1) $\Rightarrow$ (2) であること：$T \in \mathcal{T}_{(H_0)}(S)$ と，T_K の素点と互いに素な K の分数イデアル $\mathfrak{a}$ を任意に選ぶ．(1) より $\mathfrak{a}^{e\theta_{K/k,S}} = (\alpha)$ かつ $K(\alpha^{\frac{1}{e}})/k$ がアーベル拡大となるような $\alpha \in K^\times$ が存在する．$T \cap \mathrm{supp}(\alpha) = \emptyset$ であることに注して Lemma 1.7 より，ある $\alpha_T \in K^\times$ が存在して，$\alpha^{\delta_T} = \alpha_T^e$ かつ $\alpha_T \equiv 1 \pmod{T_K}$ を満たす．ゆえに，$\mathfrak{a}^{e\theta_{K/k,S,T}} = (\alpha^{\delta_T}) = (\alpha_T)^e$，従って，$\mathfrak{a}^{\theta_{K/k,S,T}} = (\alpha_T)$ を得る．

$\alpha^{(1+j)} = 1$ より $\alpha_T^{e(1+j)} = 1$，従って $\alpha_T^{1+j} \in \mu(K)$ であるが，$\alpha_T^{1+j} \equiv 1 \pmod{T_K}$ より $\alpha_T^{1+j} = 1$．従って α_T は anti-unit である．

自然数 m を $me_{S,0} \in \mathbb{Z}[G]$ となるように取る．$\alpha_T^{m(e_{S,0}-1)} \in (E^T_K)^- = \{1\}$ より $\alpha_T^{e_{S,0}-1} = 1$ in $K^\times \otimes \mathbb{Q}$，すなわち $\alpha_T \in (K^\times)_{S,0}$ である．

(2) $\Rightarrow$ (3) であること：K/k で完全分解する k の素点 $v \notin S$ と v の上にある K の素点 w，$T \in \mathcal{T}_{(H_0)}(S_v)$ を任意に選ぶ．(2) より，ある $\alpha_T \in (K^\times)_{S,0}$ が存在して，$w^{\theta_{K/k,S,T}} = (\alpha_T)$ かつ $\alpha_T \equiv 1 \pmod{T_K}$ を満たす．よって α_T は $\{v\}$-単数，特に S_v-単数である．さらに $e_{S,0} = e_{S_v,1}$ より $\alpha_T \in (E^T_{K,S_v})_{S_v,1}$ であることが分かる．α_T は $\{v\}$-単数であるから，$w^{\sum_{\sigma\in G}\mathrm{ord}_{\sigma w}(\alpha_T)\sigma} = (\alpha_T) = w^{\theta_{K/k,S,T}}$ であり，v は完全分解する素点であるから，$\sum_{\sigma\in G}\mathrm{ord}_{\sigma w}(\alpha_T)\sigma = \theta_{K/k,S,T}$ を得る．これは Remark 1.11 (1) より $\mathrm{RS}(K/k,\, S_v,\, T,\, 1)$ に他ならない．

(3) $\Rightarrow$ (1) であること：K の任意のイデアル類に対して，代表元として K/k で完全分解する w を選ぶ (i.e. w は K の素点で，w の下にある k の素点 v は K/k で完全分解する)．(3) より任意の $T \in \mathcal{T}_{(H_0)}(S_v)$ に対して，ある $\varepsilon_T \in (E^T_{K,S_v})_{S_v,1}$ が存在し，$\theta_{K/k,S,T} = \sum_{\sigma\in G}\mathrm{ord}_{\sigma w}(\varepsilon_T)\sigma$ が成り立つ．δ_T は $\mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}[G]}(\mu(K))$ を生成するから（Lemma 1.1, Chapt. IV in [31]），仮定 (H_0) を満たす T の集合 $\mathbb{T}$ を次の式を満たすようにとる；$e = \sum_{T\in\mathbb{T}} x_T\delta_T$, $x_T \in \mathbb{Z}[G]$. そこで，$\alpha := \prod_{T\in\mathbb{T}} \varepsilon_T^{x_T}$ とおくと，これが $\mathrm{BrSt}(K/k,\, S)$ で主張されている α である．実際，Remark 1.11 (2) より各 ε_T が $\{v\}$-単数であることに注意すると，

$$w^{e\theta_{K/k,S}} = w^{\sum_{T\in\mathbb{T}} x_T\theta_{K/k,S,T}} = \prod_{T\in\mathbb{T}} (\varepsilon_T)^{x_T} = (\alpha). \tag{1.6}$$

$(\alpha^{\delta_T}) = w^{e\theta_{K/k,\,S,\,T}} = (\varepsilon_T^e)$ より $\alpha^{\delta_T} = u\varepsilon_T^e\,(u \in E_K)$ と書くことが出来る．明らかに $u \in (E_{K,\,S_v}^T)_{S_v,\,1}$ でもあり，$R_w(u) = 0$ であるから Lemma 1.12 より $u = 1$ である．従って $\alpha^{\delta_T} = \varepsilon_T^e$．ゆえに Lemma 1.7 より $K(\alpha^{\frac{1}{e}})/k$ はアーベル拡大である．上式 (1.6) より $\alpha^{1+j} \in E_K$ であるが，今行った議論と同様にして $\alpha^{1+j} = 1$ であることが分かる． □

各素数 p ごとに $\mathrm{Br}(K/k,\,S)$ や $\mathrm{BrSt}(K/k,\,S)$，$\mathrm{BrSt}(K/k,\,S,\,T)$ の "p-part" を考えることができる．以下，$\mathrm{Cl}_K\{p\}$ でイデアル類群の p-Sylow 群を表し，$\mathrm{Cl}_K \otimes \mathbb{Z}_p$ と同一視する．さらにこれらを $\mathbb{Z}_p[G]$-加群とみなす．Theorem 1.2 より

$$\mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}_p[G]}(\mu_{p^\infty}(K))\theta_{K/k,\,S} \subset \mathbb{Z}_p[G]$$

が成り立つ．ここで $\mu_{p^\infty}(K)$ は K に含まれる 1 の p-ベキ乗根である．

Conjecture 1.14 ($\mathrm{Br}_p(K/k,\,S)$)**.**

$$\mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}_p[G]}(\mu_{p^\infty}(K))\theta_{K/k,\,S} \subset \mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}_p[G]}(\mathrm{Cl}_K \otimes \mathbb{Z}_p).$$

Conjecture 1.15 ($\mathrm{BrSt}_p(K/k,\,S)$)**.** $\mathfrak{a}$ を K の分数イデアルで Cl_K における類が $\mathrm{Cl}_K\{p\}$ に属するものとする．このとき次の 3 条件を満たす $\alpha \in K^\times$ が存在する．

(1) $\mathfrak{a}^{e\theta_{K/k,\,S}} = (\alpha)$

(2) $K(\alpha^{\frac{1}{e_p}})/k$ はアーベル拡大 (ただし $e_p := |\mu_{p^\infty}(K)|$).

(3) $\alpha \cdot j(\alpha) = 1$.

Conjecture 1.16 ($\mathrm{BrSt}_p(K/k,\,S,\,T)$)**.** $\mathfrak{a}$ を T_K に含まれる素点と互いに素な K の分数イデアルで，Cl_K^T における類が $\mathrm{Cl}_K^T\{p\}$ に属するものとする．次を満たすような anti-unit $\alpha_T \in (K^\times)_{S,\,0}$ が存在する；

$$\mathfrak{a}^{\theta_{K/k,\,S,\,T}} = (\alpha_T), \quad \alpha_T \equiv 1 \pmod{T_K}.$$

次の命題は直ちに確かめられる．

Proposition 1.17. $\mathrm{Br}(K/k,\,S)$ (resp. $\mathrm{BrSt}(K/k,\,S)$, $\mathrm{BrSt}(K/k,\,S,\,T)$) が成り立つことは，任意の素数 p に対して $\mathrm{Br}_p(K/k,\,S)$ (resp. $\mathrm{BrSt}_p(K/k,\,S)$, $\mathrm{BrSt}_p(K/k,\,S,\,T)$) が成り立つことと同値である．

$\mathbb{Z}' := \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ とし，任意の $\mathbb{Z}$-加群 M に対して $M' = M \otimes \mathbb{Z}'$ と置く．M を $\mathbb{Z}[G]$-加群とするとき，M' は $\mathbb{Z}'[G]$-加群として次のように分解する．

$$M' \simeq M'^{+} \oplus M'^{-}.$$

ここで $M'^{\pm}$ は複素共役 $j \in G$ の固有値 ± 1 に対応する固有空間である．すなわち $M'^{\pm} = \{x \in M' \mid j(x) = \pm x\}$．また，上の同型は $M' \ni x \mapsto (\frac{1+j}{2}x,\, \frac{1-j}{2}x) \in M'^{+} \oplus M'^{-}$ で与えられる．以後 $x^+ = \frac{1+j}{2}x$, $x^- = \frac{1-j}{2}x$ と記す．

Proposition 1.18. $\mathrm{BrSt}_p(K/k,\,S,\,T)$ がすべての $p \neq 2$ に対して成り立つことを $\mathrm{BrSt}_{\mathbb{Z}'}(K/k,\,S,\,T)$ と記す．次の 4 条件は同値である．

(1) $\mathrm{BrSt}_{\mathbb{Z}'}(K/k, S, T)$.

(2) $\theta_{K/k,S,T} \in \mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}'[G]}((\mathrm{Cl}_K^T)')$.

(3) $\theta^-_{K/k,S,T} \in \mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}'[G]^-}((\mathrm{Cl}_K^T)'^-)$.

(4) 任意の素数 $p \neq 2$ に対して $\theta^-_{K/k,S,T} \in \mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}_p[G]^-}(\mathrm{Cl}_K^T\{p\}^-)$.

Proof . $\theta^+_{K/k,S,T} = 0$, $\theta^-_{K/k,S,T} = \theta_{K/k,S,T}$ より (2), (3) の同値性は明らかである．また (3), (4) の同値性も直ちに従う．そこで (1), (2) の同値性のみを示す．(1) $\Rightarrow$ (2) であることは明らかである．(2) を仮定する．$\mathcal{C} \in (\mathrm{Cl}_K^T)'$ を任意の類とする．Remark 1.9 (2) より，少なくとも一つの K の分数イデアル $\mathfrak{a} \in \mathcal{C}$ に対して $\mathrm{BrSt}_{\mathbb{Z}'}(K/k, S, T)$ が成り立つことを示せばよい．T_K と互いに素な K の分数イデアル $\mathfrak{b}$ を $\mathfrak{b}^2 = \mathfrak{a}$ in $(\mathrm{Cl}_K^T)'$ となるように取る．ある $\beta \in K^\times$, $\beta \equiv 1 \pmod{T_K}$ に対して $\mathfrak{b}^2(\beta) = \mathfrak{a}$ と書くことができる．仮定より $\alpha_T \in K^\times$ が存在して $\mathfrak{b}^{\theta_{K/kS,T}} = (\alpha_T)$, $\alpha_T \equiv 1 \pmod{T_K}$ を満たす．この両辺に $1-j$ を作用させて $\mathfrak{a}^{\theta_{K/k,S,T}} = (\beta^{\theta_{K/kS,T}}\alpha_T^{1-j})$ を得る．さらに両辺に $e_{S,0}$ を作用させて，$\alpha_T^{(1-j)e_{S,0}} = u\alpha_T^{1-j}$, $u \in E_K$ を得るが，$u^{1+j} = 1$ かつ $u \equiv 1 \pmod{T_K}$ より $u = 1$ である．従って，$\beta^{\theta_{K/kS,T}}\alpha_T^{1-j} \in (K^\times)_{S,0}$ である． □

1.2 Fitting イデアルと Brumer-Stark 予想の強い版

現在 $\mathrm{BrSt}(K/k, S)$ に関して知られている結果の多くはイデアル類群の annihilator を調べるのではなく，岩澤主予想を経由しイデアル類群の Fitting イデアルを調べるという手法によるものである．この節では Fitting イデアルを定義し，Brumer-Stark 予想の強い版を定式化する (岩澤理論を用いない結果としては $[K:k] = 2$ の場合の Tate [31] による結果や，$G = \mathrm{Gal}(K/k) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus m}$ かつ K/k が tame な拡大の場合の Sands [28] による結果，$G = \mathrm{Gal}(K/k) \simeq \mathbb{Z}/2p\mathbb{Z}$ でいくつかの条件を仮定した場合の Greither-Roblot-Tangedal [12] による結果等が知られている).

R を任意の (単位的) 可換環とし，M を次のような有限表示をもつ R-加群とする；

$$R^m \xrightarrow{A} R^n \longrightarrow 0.$$

このとき，M の R 上の (initial) Fitting イデアル $\mathrm{Fitt}_R(M)$ は，行列 A の $n \times n$ 次小行列式全体によって生成される R のイデアルとして定義される；

$$\mathrm{Fitt}_R(M) := \langle \{ A \text{ の } n \times n \text{ 小行列式 } \} \rangle_R \subset R.$$

次の性質は Fitting イデアルの基本的性質である ([25] 参照).

- $\mathrm{Fitt}_R(M) \subset \mathrm{Ann}_R(M)$.
- $M \twoheadrightarrow M'$ を全射 R-準同型とするとき $\mathrm{Fitt}_R(M) \subset \mathrm{Fitt}_R(M')$,
- $\rho : R \to R'$ を環準同型とするとき $\rho(\mathrm{Fitt}_R(M))R' = \mathrm{Fitt}_{R'}(M \otimes_R R')$ (Base change property).

Examples (Fitting イデアルの例). (1) $R = \mathbb{Z}$ とし M を有限生成アーベル群とする．このとき，$\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}(M) > 0 \Leftrightarrow \mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}}(M) = 0$ が成り立つ．さらに $\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}(M) = 0$ のとき，$\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}}(M) = (\#M)$ である．

(2) より一般に R を PID とし M を有限生成ねじれ R-加群とするとき，構造定理より $M \simeq R/(a_1) \oplus \cdots \oplus R/(a_n)$ だから，$\mathrm{Fitt}_R(M) = (a_1 \cdots a_n)$ である．

(3) $R=\mathbb{Z}_p[[T]]$ とし M を有限生成ねじれ R-加群とする．構造定理より M の特性イデアル $\mathrm{Char}_R(M)$ が定義できる ([32] 参照)．M が非自明な有限 R-加群を持たないとき，M の R 上の射影次元は 1 以下であるから (Proposition 2.1 [35] 参照)，(M が射影 R-加群でなければ) 次の有限表示が存在する；$0 \to R^n \xrightarrow{A} R^n \to M \to 0$. ゆえに $\mathrm{Fitt}_R(M) = \det_R(A) = \mathrm{Char}_R(M)$ が成り立つ．

以下 p を奇素数とし，$A_K := \mathrm{Cl}_K\{p\}$, $A_K^T := \mathrm{Cl}_K^T\{p\}$ とおく．次のように 2 通りの Brumer 予想の p-part の強い版を考える．

$$\text{(SBr)} \qquad \mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}_p[G]}(\mu_{p^\infty}(K))\theta_{K/k\,S} \subset \mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[G]}(A_K)$$

$$\text{(DSBr)} \qquad \mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}_p[G]}(\mu_{p^\infty}(K))\theta_{K/k\,S} \subset \mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[G]}((A_K)^\vee)$$

ここで，$(A_K)^\vee$ は A_L の Pontryagin 双対で G の $(A_K)^\vee$ への作用は covariant なものを考える (すなわち，$\sigma \in G$, $f \in (A_K)^\vee$, $x \in A_K$ に対して $(\sigma f)(x) := f(\sigma x)$ と定義する)．このとき $\mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}_p[G]}((A_K)^\vee) = \mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}_p[G]}(A_K)$ が成り立つから，(SBr)，(DSBr) のいずれも Brumer 予想の p-part を導く．次のように Brumer-Stark 予想の p-part の強い版も考える．

$$\text{(SBrSt)} \qquad \mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}_p[G]}(\mu_{p^\infty}(K))\theta_{K/k\,S} \subset \mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[G]}(A_K^T)$$

$$\text{(DSBrSt)} \qquad \mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}_p[G]}(\mu_{p^\infty}(K))\theta_{K/k\,S} \subset \mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[G]}((A_K^T)^\vee)$$

Proposition 1.18 より (SBrSt) または (DSBrSt) は $\mathrm{BrSt}(K/k, S, T)$ の p-part を導く．従って，仮定 (H_0) を満たす任意の T に対して (SBrSt) または (DSBrSt) が成り立てば $\mathrm{BrSt}(K/k, S)$ の p-part が成り立つ．

任意の p の上の k の素点 $\mathfrak{p}$ に対して，複素共役 j が $\mathfrak{p}$ の G での分解群 $G_\mathfrak{p}$ に含まれるとき，(NTZ) 条件 (no trivial zeros) が満たされると言う．$p \nmid [K:k]$ かつ (NTZ) の下では，(SBr) は岩澤主予想 (Wiles [33] 参照) の直接の帰結である．$k=\mathbb{Q}$ の場合は (NTZ) を仮定せずとも $p \nmid [K:k]$ は (SBr) を導く (Theorem 2, §10, Chap. 1 in [21])．さらに $k=\mathbb{Q}$ の場合には任意の奇素数 p に対して $\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[G]^-}(A_K^-)$ が決定されており，特に (SBr) は無条件で成立することが知られている ([19] 参照)．k が一般の総実代数体で $p \mid [K:k]$ なる場合にも (NTZ) を仮定すれば，Nickel [22] により (SBr) は正しい (実際は [22] においては (NTZ) の下 (SBrSt) が証明されている．A_K^T から A_K への自然な写像は全射であるから (SBrSt) は (SBr) を導く)．さらに [22] においては (NTZ) の代わりに，p の上の素点の K/k における分岐は高々tame かつ $K^{\mathrm{cl}} \not\subset K^{+,\mathrm{cl}}(\mu_p)$ という条件のもと (SBrSt) が，従って (SBr) が証明されている (K^{cl} は K の $\mathbb{Q}$ 上の Galois 閉包である．証明方法は岩澤主予想を経由して同変玉河数予想に (SBrSt) を帰着するものであり，主予想から有限次元への reduction の際に (NTZ) 条件の有無が大きな問題となる．$K^{\mathrm{cl}} \not\subset K^{+,\mathrm{cl}}(\mu_p)$ という条件は trivial zero を回避するための Wiles のトリック [34] ([4]，[17]，[19] も参照) を適用するための技術的な条件である)．しかしながら，(SBr) については反例があることが知られている (Greither-Kurihara [8] 参照)．(SBr) の反例は同時に (SBrSt) の反例でもあるので，(SBrSt) にも反例があることになる．

同変玉河数予想と $\mu_{p^\infty}(K)$ が G-cohomolocally trivial という仮定のもと Greither [7] により $\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[G]^-}((A_K^-)^\vee)$ が決定されている．特に (DSB) が成り立つことが示されている．しかしながら，(DSB) に関しても $\mu_{p^\infty}(K)$ が G-cohomologically trivial という仮定を外すと反例があり，(SBr) と (DSBr) が両方同時に成立しない例すら存在する (Kurihara[18] 参照. 反例の具体的構成や実例については [20] 参照).

次小節で紹介する Greither-Popescu の結果により非常に多くの場合に (DSBrSt) が成立することが分かる．上で述べたように (SBr)，(DSBr)，(SBrSt) には反例があることが分かっているが，今のところ (DSBrSt) の反例は見つかっていない．

1.3 同変岩澤主予想と Brumer-Stark 予想

この小節では Greither-Popescu による Brumer-Stark 予想に関する最近の結果と, その証明方法の概略について述べる. 記号や設定はこれまで通りとする. $\mathcal{K}$ で K の円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大を表す.

Theorem 1.19. p を奇素数とし, $\mathcal{K}/K$ の岩澤 μ-不変量が 0 であると仮定する. 仮定 (H_0) を満たす (S, T) で $S \supset S_p$ なるものに対して

$$\theta_{K/k,\,S,\,T} \in \mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[G]^-}\left((A_K^{T,\,-})^\vee\right)$$

が成り立つ. 特に $\mathrm{BrSt}_p(K/k,\,S)$ が成り立つ.

この定理は次に述べる同変岩澤主予想 (Equvariant Iwasawa Main Conjecture) から導くことができる. Greither-Popescu は [11] において Deligne による 1-motive ([2] 参照) の代数体の岩澤理論における類似物 $\mathcal{M}$ (Iwasawa theoretic 1-motive, 定義は次節参照) を構成し, その p-進 Tate 加群として次の 3 つの性質をもつ $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(\mathcal{K}/k)]]$-加群 $T_p(\mathcal{M})$ を構成した (以下の記号の正確な定義は次節で与える).

(M1)
$$0 \to T_p(A_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T}}) \to T_p(\mathcal{M}) \to \mathrm{Div}_{\mathcal{K}}(\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_p) \otimes \mathbb{Z}_p \to 0$$

(M2)
$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_p(1) \longrightarrow T_p(\Delta_{\mathcal{K},\,\mathcal{T}} \otimes \mathbb{Z}_p)^- \longrightarrow T_p(\mathcal{M})^- \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathfrak{X}_{\mathcal{S}}^+,\,\mathbb{Z}_p(1)) \longrightarrow 0$$

(M3)
$$\mathrm{pd}_{\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(\mathcal{K}/k)]]}(T_p(\mathcal{M})^-) \leq 1$$

完全系列 (M1) において $A_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T}} \simeq \varinjlim_n A_{K_n}^T$ であり, $T_p(A_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T}})$ は $A_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T}}$ の p-進 Tate 加群である. (M1) は 1-motive の構成から自然に従うものであり, 左の単射は同変岩澤主予想から Theorem 1.19 を導く際に用いられる. 完全系列 (M2) は 1-motive と calssical な岩澤加群 ($\mathcal{S}$ は S の上の $\mathcal{K}$ の素点の集合, $\mathfrak{X}_{\mathcal{S}}$ は $\mathcal{K}$ 上の $\mathcal{S}$ 外不分岐最大アーベル p-拡大である) を繋ぐもので, 同変岩澤主予想を岩澤主予想に帰着する際に重要である. 性質 (M3) における "pd" は射影次元を意味する. 性質 (M3) は岩澤理論で通常考察の対象になる加群は一般には持ちえない性質である ($\mathfrak{X}_{\mathcal{S}}^+$ や $\mathcal{K}$ 上の最大不分岐アーベル p-拡大の Galois 群等は $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(\mathcal{K}/k)]]$-加群としての Fitting イデアルは一般に単項イデアルにはならず, これを決定するのは困難である. 詳しくは [5], [17], [18] を参照). 性質 $(M3)$ により $T_p(\mathcal{M})$ の Fitting イデアルが単項イデアルであることが従い (次節 Proposition 2.18), 岩澤主予想によってその生成元が T-modified S-imprimitive p-進 L 関数 $\theta_{S,\,T}^{(\infty)}$(定義は次節参照) であることが証明される. これが Greither-Popescu による同変岩澤主予想である.

Theorem 1.20 (同変岩澤主予想)**.** 上の定理と同じ条件を仮定する. このとき,

$$\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(\mathcal{K}/k)]]^-}\left(T_p(\mathcal{M}_{\mathcal{S},\,\mathcal{T}}^{\mathcal{K}})^-\right) = (\theta_{S,\,T}^{(\infty)})$$

が成り立つ.

$\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(\mathcal{K}/k)]]$-加群 M に対して $M^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(M,\,\mathbb{Z}_p)$ と定義し, $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathcal{K}/k)$, $f \in M^*$, $x \in M$ に対して, $(\sigma f)(x) = f(\sigma x)$ と Galois 群の作用を定義すると,

$$\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(\mathcal{K}/k)]]^-}\left((T_p(\mathcal{M}_{\mathcal{S},\,\mathcal{T}}^{\mathcal{K}})^-)^*\right) = \mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(\mathcal{K}/k)]]^-}\left(T_p(\mathcal{M}_{\mathcal{S},\,\mathcal{T}}^{\mathcal{K}})^-\right)$$

が成り立つ (次節 Remark 2.23 参照). このことに注意すると，Thorem 1.20 から Theorem 1.19 が直ちに導かれることが分かる．実際，十部大きい n に対して，次の全射が存在する．

$$(T_p(\mathcal{M})^-)^* \twoheadrightarrow T_p(A_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T},-})^* \twoheadrightarrow A_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T},-}[p^n]^\vee \twoheadrightarrow (A_K^{T,-})^\vee$$

(M1) は $\mathbb{Z}_p$-加群としての分解完全系列であるから $\mathbb{Z}_p$-双対は完全性を保つので左の射の全射性が従う．真ん中の射の全射性は同型 $T_p(A_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T},-})^* \simeq \varinjlim_n A_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T},-}[p^n]$ から従う．右の射の全射性は，単射 $A_K^{T,-} \hookrightarrow A_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T},-}[p^n]$ により従う．この単射は次の補題と $A_K^{T,-}$ が有限であることより従う．

Lemma 1.21. 任意の $n \geq 0$ に対して自然な写像

$$A_{K_n}^{T,-} \longrightarrow A_{K_{n+1}}^{T,-}$$

は単射である．

Proof . $T = \emptyset$ の場合は良く知られている結果である (Proposition 13.26 in [32]). $T \neq \emptyset$ のときは，任意の代数体 K に対して成り立つ次の完全系列

$$0 \to E_K/E_K^T \otimes \mathbb{Z}_p \to \Delta_K^T \otimes \mathbb{Z}_p \to A_K^T \to A_K \to 0$$

のマイナスパートを考えて，蛇の補題により結論が従う (あるいは $\mathrm{Ker}(A_{K_n}^T \to A_{K_{n+1}}^T)$ は $H^1(\mathrm{Gal}(K_{n+1}/K_n),\, E_{K_{n+1}}^T)$ の部分群であるという事実からも従う). □

全射 $(T_p(\mathcal{M})^-)^* \twoheadrightarrow (A_K^{T,-})^\vee$ と Theorem 1.20 より

$$\theta_{S,T}^{(\infty)} \in \mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(\mathcal{K}/k)]]^-}((T_p(\mathcal{M})^-)^*) \subset \mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(\mathcal{K}/k)]]^-}((A_K^{T,-})^\vee)$$

を得る．$S_p \subset S$ に注意して，$c_{\mathcal{K}/K}$ による像を考えることで，$\theta_{K/k,S,T} \in \mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[G]^-}((A_K^{T,-})^\vee)$ が得られる．

2 Greither-Popescu による同変岩澤主予想の証明

この節では Greither-Popescu の論文 [11] で与えられた同変岩澤主予想 (Theorem 1.20) の定式化とその証明を紹介する．

2.1 Abstract 1-motives

Definition 2.1. abstract 1-motive $\mathcal{M}$ を以下の条件を満たす 3 つ組 $(L,\, J,\, \delta)$ として定義し，$\mathcal{M} = [L \xrightarrow{\delta} J]$ と記す.

- L は有限生成自由 $\mathbb{Z}$-加群
- J は可除アーベル群で finite local corank を持つ．(すなわち，任意の素数 p に対して，ある $r_p(J) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在して $J[p^\infty] \simeq (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^{r_p(J)}$ が成り立つということ．)
- $\delta : L \to J$ は群準同型

Remark 2.2. (1). J の Tate 加群を $T_p(J) := \varprojlim J[p^n]$(射影系は p 倍写像で定める) を定義する．J が finite local corank を持つ可除アーベル群のとき，以下の 3 つの同型は容易に確かめることができる．

$$T_p(J) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p,\, J[p^\infty]),\quad T_p(J) \simeq \mathbb{Z}_p^{r_p(J)},\quad T_p(J)/p^nT_p(J) \simeq J[p^n].$$

(2). J を p-torsion 可除アーベル群とするとき次の構造定理が成り立つ．

$$J \simeq \bigoplus_I \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p.$$

(ただし I の濃度は有限とは限らない．)

Definition 2.3. $\mathcal{M}' = [L' \overset{\delta'}{\to} J']$，$\mathcal{M} = [L \overset{\delta}{\to} J]$ を abstract 1-motive とする．abstract 1-motive の間の射 $f : \mathcal{M}' \to \mathcal{M}$ を，以下の図式を可換にする群準同型の組 $f := (\lambda, \iota)$ と定義する．

$$\begin{tikzcd} L' \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\delta'"] & L \arrow[d, "\delta"] \\ J' \arrow[r, "\iota"] & J \end{tikzcd}$$

$\mathscr{M}^1$ を abstract 1-motive の圏，${}_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}\mathscr{M}$, ${}_{\mathbb{Z}_p}\mathscr{M}$ をそれぞれ $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-加群，$\mathbb{Z}_p$-加群の圏とする．二つの関手

$$[n] : \mathscr{M}^1 \to {}_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}\mathscr{M},\quad T_p : \mathscr{M}^1 \to {}_{\mathbb{Z}_p}\mathscr{M}$$

を次のように定義する．

$\mathcal{M} = [L \overset{\delta}{\to} J] \in \mathscr{M}^1$ に対して，ファイバー積 $J \times_J^n L$ を次の図式で定義する．

(2.1)
$$\begin{tikzcd} J \times_J^n L \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[d, "\delta"] \\ J \arrow[r, "\times n"] & J. \end{tikzcd}$$

定義より，$J \times_J^n L = \{(j, \lambda) \in J \times L \mid nj = \delta(\lambda)\}$ である．

Definition 2.4. 関手 $[n] : \mathscr{M}^1 \to {}_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}\mathscr{M}$ を

$$\mathcal{M}[n] := (J \times_J^n L) \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

で定義する．

図式 (2.1) の上の段の射影の核は $J[n]$ であるから次の完全系列を得る．

$$0 \longrightarrow J[n] \longrightarrow J \times_J^n L \longrightarrow L \longrightarrow 0.$$

L は自由 $\mathbb{Z}$-加群であったからこの完全系列は分解する．(実際，同型 $J[n] \times L \simeq J \times_J^n L$ は $(j, \lambda) \mapsto (j + \frac{\delta(\lambda)}{n}, \lambda)$ で与えられる．) 従って，$\otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ で完全性は保たれる．

$n|m$ なる自然数に対して $\mathcal{M}[m] \longrightarrow \mathcal{M}[n]$ を $(j,\lambda)\otimes 1 \mapsto (\frac{m}{n}j,\lambda)\otimes 1$ で定義すると次の可換図式を得る．

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & J[m] & \longrightarrow & \mathcal{M}[m] & \longrightarrow & L\otimes\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle \frac{m}{n}} & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & J[n] & \longrightarrow & \mathcal{M}[n] & \longrightarrow & L\otimes\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \longrightarrow & 0.
\end{array} \tag{2.2}$$

Definition 2.5. 関手 $T_p : \mathscr{M}^1 \to {}_{\mathbb{Z}_p}\mathscr{M}$ を

$$T_p(\mathcal{M}) := \varprojlim \mathcal{M}[p^n]$$

で定義する．

図式 (2.2) の左側の縦の射は全射なので次の完全系列が従う．

$$0 \longrightarrow T_p(J) \longrightarrow T_p(\mathcal{M}) \longrightarrow L\otimes\mathbb{Z}_p \longrightarrow 0.$$

Examples . (1-motive の例)

1. E を $\mathbb{C}$ 上の楕円曲線とし対応する格子を $\Lambda = \mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau$ とする (必要ならばこの形に正規化する)．$q = e^{2\pi i\tau}$ と置くと $E(\mathbb{C}) = \mathbb{C}/\Lambda$ と $\mathbb{C}^\times/q^{\mathbb{Z}}$ との間には同型 $E(\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^\times/q^{\mathbb{Z}}$; $z \mapsto e^{2\pi iz}$ が存在する．

$L = \mathbb{Z}$, $J = \mathbb{C}^\times$ とする．$\mathbb{C}[p^\infty] \simeq \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ であるから $J = \mathbb{C}^\times$ は finite local corank を持つ．そこで $\delta : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}^\times$; $n \mapsto q^n$ と置くと $\mathcal{M} = [\mathbb{Z} \xrightarrow{\delta} \mathbb{C}^\times]$ は 1-motive である．定義より $\mathcal{M}[n] = (\mathbb{C}^\times/q^{\mathbb{Z}})[n] \simeq E(\mathbb{C})[n]$ が成り立つ．今の場合，分解完全系列 (2.2) は

$$0 \to \mu_n \to E(\mathbb{C})[n] \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0$$

と書けるから，良く知られているアーベル群としての同型 $E(\mathbb{C})[n] \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ が得られる．よって，$T_p(\mathcal{M})$ は楕円曲線の Tate 加群 $T_p(E) \simeq \mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_p$ と一致する．

2. Ω を代数閉体とし A を Ω 上の半アーベル多様体とする．L を有限生成自由 $\mathbb{Z}$-加群とし $\delta : L \to A(\Omega)$ とするとき $\mathcal{M} = [L \xrightarrow{\delta} A(\Omega)]$ は 1-motive である．これは Deligne によって最初に与えられた 1-motive の定義である ([2] 参照)．

$\Omega = \overline{\mathbb{F}_p}$ とし，X を $\overline{\mathbb{F}_p}$ 上定義された滑らかで連結な射影曲線とする．S, T を X の閉点の有限集合で互いに交わらないものとし J_T を (X, T) に対する一般ヤコビ多様体とする．$J_T(\overline{\mathbb{F}_p})$ は $\overline{\mathbb{F}_p}$ 上の半アーベル多様体となる．$\mathrm{Div}^0(S)$ を S を support に持つ X の次数 0 の因子群とし $\delta : \mathrm{Div}^0(S) \to J_T(\overline{\mathbb{F}_p})$ を divisor-class map とするとき 1-motive $\mathcal{M} = [\mathrm{Div}^0(S) \xrightarrow{\delta} J_T(\overline{\mathbb{F}_p})]$ は Picard 1-motive と呼ばれる．Deligne は Picard 1-motive を用いて関数体の Brumer-Stark 予想を証明した ([31] 参照)．ちなみに関数体の Brumer-Stark 予想については Hayes による別証明 [13] も知られている．Greither-Popescu は [9], [10] において Picard 1-motive の (l-adic realization の) Galois module structure を詳しく研究し関数体の Brumer-Stark 予想の refinement を定式化しこれを証明している．

2.2 Iwasawa theoretic 1-motives

F を任意の代数体，v を F の有限素点とし，v に属する加法付値の一つを ord_v，その値群を X_v と書く．以下 ord_v は $X_v = \mathbb{Z}$ となるように正規化する．$\mathcal{F}$ を $\mathbb{Q}$ の (有限次とは限らない) 代数拡大とする．$\mathcal{F}$ の有限

素点 v に対して，$\mathcal{F}$ に含まれる (有限次) 代数体 F の素点で v の下にあるものを v_F 書く．v の値群を

$$X_v := \varinjlim_F X_{v_F}$$

で定義する．ここで F は $\mathcal{F}$ に含まれる任意の代数体を走り，代数拡大 $F \subset F'$ $(\subset \mathcal{F})$ に対して，$X_{v_F} \stackrel{\times e_v(F'/F)}{\longrightarrow} X_{v_{F'}}$ により帰納系を定める．(X_v は $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ のある加法部分群と同型 (non-canonical) である) さらに，v に属する離散付値 ord_v を

$$\mathrm{ord}_v \, : \, \mathcal{F} \longrightarrow X_v \quad ; \quad x \mapsto (\mathrm{ord}_{v_F}(x))_{F \ni x}$$

と定義する．

以下 p を奇素数とし，G_p を G の p-Sylow 部分群，K の中の G_p の固定体を L とする．$\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$, k_∞ をそれぞれ K, L, k の円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大とする．簡単のため $K \cap k_\infty = k$ を仮定する (従って $\mathrm{Gal}(\mathcal{K}/\mathcal{L}) \simeq G_p$ である)．また K_n (resp. L_n, k_n) を $\mathcal{K}/K$ (resp. $\mathcal{L}/L$, k_∞/k) の n-th layer とする．十分大きい N に対して $\mathcal{K}/K_N$ は，p の上のすべての素点が完全分岐するような拡大であるから (p の上にない素点はもちろん不分岐である)，$\mathcal{K}$ の素点 v に対して次の (non-canonical な) 同型が従う．

- $v \mid p$ のとき $X_v \simeq \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$; $(a_F)_F \mapsto p^{n-N} a_{K_n}$ $(n \gg N)$
- $v \nmid p$ のとき $X_v \simeq \mathbb{Z}$; $(a_F)_F \mapsto a_{K_n}$ $(n \gg N)$

以下 $S \supset S_p$ を仮定し，T を仮定 (H_0) を満たす k の素点の有限集合か，または $T = \emptyset$ とする．$S_\mathcal{K} = \mathcal{S}$, $T_\mathcal{K} = \mathcal{T}$, $S_\mathcal{L} = \mathcal{S}'$, $T_\mathcal{L} = \mathcal{T}'$ と略記する．

$\mathcal{K}$ の有限素点の集合を $\mathrm{Pl}(\mathcal{K})$ 書き，$\mathcal{K}$ の因子群を

$$\mathrm{Div}_\mathcal{K} := \bigoplus_{v \in \mathrm{Pl}(\mathcal{K})} X_v \cdot v$$

で定義する．また，$\mathrm{div}_\mathcal{K} : \mathcal{K}^\times \longrightarrow \mathrm{Div}_\mathcal{K}$ を $\mathrm{div}_\mathcal{K}(x) = \sum_v \mathrm{ord}_v(x) \cdot v$ で定義する．$\mathrm{Div}_\mathcal{K}$ および $\mathcal{K}^\times$ の部分群として次のものを考える．

$$\mathrm{Div}_\mathcal{K}^\mathcal{T} := \bigoplus_{v \notin \mathcal{T}} X_v \cdot v, \quad \mathcal{K}_\mathcal{T}^\times := \{x \in \mathcal{K}^\times \mid \mathrm{ord}_v(x-1) > 0 \ (\forall v \in \mathcal{T})\}.$$

$\mathrm{div}_\mathcal{K}$ から誘導される写像 $\mathcal{K}_\mathcal{T}^\times \longrightarrow \mathrm{Div}_\mathcal{K}^\mathcal{T}$ にも同じ記号 $\mathrm{div}_\mathcal{K}$ を用いる．

$\mathcal{K}$ の $\mathcal{T}$-modified イデアル類群とその p-part を

$$\mathrm{Cl}_\mathcal{K}^\mathcal{T} := \frac{\mathrm{Div}_\mathcal{K}^\mathcal{T}}{\mathrm{div}_\mathcal{K}(\mathcal{K}_\mathcal{T}^\times)}, \quad A_\mathcal{K}^\mathcal{T} := \mathrm{Cl}_\mathcal{K}^\mathcal{T} \otimes \mathbb{Z}_p$$

で定義する ($\mathrm{Cl}_\mathcal{K}^\emptyset$, $A_\mathcal{K}^\emptyset$ はそれぞれ $\mathrm{Cl}_\mathcal{K}$, $A_\mathcal{K}$ と記す)．$\mathrm{Div}_{K_n} \hookrightarrow \mathrm{Div}_{K_{n+1}}$; $v \mapsto \sum_{v' | v} e(v'/v) \cdot v$ によって同型 $\mathrm{Div}_\mathcal{K}^\mathcal{T} \simeq \varinjlim \mathrm{Div}_{K_n}^{T_{K_n}}$ を得る．これより次の二つの同型も従う．

$$\mathrm{Cl}_\mathcal{K}^\mathcal{T} \simeq \varinjlim_n \mathrm{Cl}_{K_n}^T, \quad A_\mathcal{K}^\mathcal{T} \simeq \varinjlim_n A_{K_n}^T.$$

($\mathrm{Cl}_{K_n}^T$ は modulus $\prod_{w \in T_{K_n}} w$ に対する K_n の ray class group であった．また $A_{K_n}^T := \mathrm{Cl}_{K_n}^T\{p\}$ ($\mathrm{Cl}_{K_n}^T$ の p-Sylow 部分群) であり，$\mathrm{Cl}_{K_n}^T \otimes \mathbb{Z}_p$ と同一視している．)

$\mathcal{S}_p$ を $\mathcal{S}$ に含まれる p 上の素点とし (仮定より $\mathcal{S}_p \subset \mathcal{S}$ である),

$$\mathrm{Div}_{\mathcal{K}}(\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_p) := \sum_{v \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_p} X_v \cdot v$$

と定義する．p 上の素点を抜いた因子群を考えているので，これは有限階数の自由 $\mathbb{Z}$-加群である．1-motive の岩澤理論版を $\mathcal{M} = [\mathrm{Div}_{\mathcal{K}}(\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_p) \to A_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T}}]$ と定義したいのであるが，そのために次の仮定は本質的に必要である．

仮定 “$\mu = 0$”： $\mathcal{K}$ の岩澤 μ-不変量は 0 である．

以下この仮定 “$\mu = 0$” は常に仮定する．$\mathcal{K}$ の岩澤 λ-不変量を $\lambda_{\mathcal{K}}$ とするとき，仮定 “$\mu = 0$” の下で次の同型が成り立つ ([15] 参照).

$$A_{\mathcal{K}} \simeq (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^{\oplus \lambda_{\mathcal{K}}}.$$

すなわち $A_{\mathcal{K}}$ は finite p-corank をもつ p-torsion 可除アーベル群である．さらに，次が成り立つ．

Lemma 2.6. $v \in \mathrm{Pl}(\mathcal{K})$ に対して $\kappa(v)$ を v の剰余体とし，$\Delta_{\mathcal{K},\mathcal{T}} := \bigoplus_{v \in \mathcal{T}} \kappa(v)^{\times}$ と定義する．

(1) $\Delta_{\mathcal{K},\mathcal{T}} \otimes \mathbb{Z}_p$ は p-torsion 可除アーベル群で finite p-corank をもつ．その p-corank を $\delta_{\mathcal{K},\mathcal{T}}$ と書く．

(2) $A_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T}}$ は p-torsion 可除アーベル群で finite p-corank を持ち，$\mathrm{corank}(A_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T}}) \leq \lambda_{\mathcal{K}} + \delta_{\mathcal{K},\mathcal{T}}$ が成り立つ．

(3) $A_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T}-}$ は p-torsion 可除アーベル群で finite p-corank を持ち，$\mathrm{corank}(A_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T}-}) = \lambda_{\mathcal{K}}^- + \delta_{\mathcal{K},\mathcal{T}}^- - \delta_{\mathcal{K}}$ が成り立つ．ここで $\lambda_{\mathcal{K}}^-$, $\delta_{\mathcal{K},\mathcal{T}}^-$ はそれぞれ $A_{\mathcal{K}}^- \simeq (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^{\lambda_{\mathcal{K}}^-}$, $\delta_{\mathcal{K},\mathcal{T}}^- = \mathrm{corank}(\Delta_{\mathcal{K},\mathcal{T}}^-)$ によって定義する．$\delta_{\mathcal{K}}$ は $\mu_p \subset \mathcal{K}$ の時 $\delta_{\mathcal{K}} = 1$，$\mu_p \not\subset \mathcal{K}$ の時 $\delta_{\mathcal{K}} = 0$ と定義する．

Proof . (1). $v \in \mathcal{T}$ の下にある K の素点を v_K と書く．$v \nmid p$ より $\kappa(v)/\kappa(v_K)$ は有限体上の $\mathbb{Z}_p$-拡大である．ゆえに $\mu_p \subset \kappa(v_K)$ の時 $\kappa(v)^{\times} \otimes \mathbb{Z}_p = \mu_{p^\infty}$，$\mu_p \not\subset \kappa(v_K)$ の時 $\kappa(v)^{\times} \otimes \mathbb{Z}_p = \{1\}$ である．定義より $\delta_{\mathcal{K},\mathcal{T}} = \#\{v \in \mathcal{T} \mid \mu_p \subset \kappa(v_K)^{\times}\}$ である．

(2). 次の完全系列を考える．

$$0 \to E_{\mathcal{K}}/E_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T}} \otimes \mathbb{Z}_p \to \Delta_{\mathcal{K},\mathcal{T}} \otimes \mathbb{Z}_p \to A_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T}} \to A_{\mathcal{K}} \to 0. \tag{2.3}$$

($\mathcal{K}$ が代数体の時は well-known である．円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大方向に帰納極限を取ることで (2.3) が得られる．) $\Delta_{\mathcal{K},\mathcal{T}} \otimes \mathbb{Z}_p$ は finite p-corank をもつ p-torsion 可除アーベル群であるから，任意の部分群によるその商群もまた finite p-corank をもつ p-torsion 可除アーベル群である．$\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ の移入性より，$A_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T}}$ もまた finite p-corank をもつ p-torsion 可除アーベル群であることが従う．

(3). (2.3) においてマイナスパートを考える．$(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ の定義より $E_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T}-} \otimes \mathbb{Z}_p = \{1\}$ であり，$E_{\mathcal{K}}^- \otimes \mathbb{Z}_p = \mu_{p^\infty}(\mathcal{K})$ であるから，

$$0 \to \mu_{p^\infty}(\mathcal{K}) \to (\Delta_{\mathcal{K},\mathcal{T}} \otimes \mathbb{Z}_p)^- \to A_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T},-} \to A_{\mathcal{K}}^- \to 0 \tag{2.4}$$

を得る．この完全系列より (3) は直ちに従う． □

Definition 2.7. Iwasawa theoretic 1-motive を次のように定義する．

$$\mathcal{M} := \mathcal{M}_{\mathcal{S},\mathcal{T}}^{\mathcal{K}} := [\mathrm{Div}_{\mathcal{K}}(\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_p) \longrightarrow A_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T}}].$$

ここで $\mathrm{Div}_{\mathcal{K}}(\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}_p) \longrightarrow A_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T}}$ は $D\mapsto \widehat{D}\otimes 1$ と定義する．$\widehat{D}$ は D の $\mathrm{Cl}_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T}}$ における類である．同様に $\mathcal{L}$ に対しても 1-motive $\mathcal{M}' := \mathcal{M}_{\mathcal{S}',\,\mathcal{T}'}^{\mathcal{L}}$ を定義する．

$\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathcal{K}/K) \simeq \mathbb{Z}_p$ とおき，Γ の位相的生成元 γ を一つ固定する．$\Lambda = \mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$ とおく．定義より $\mathcal{M}[p^n]$ には $\Lambda[G]$-加群の構造が入り，従って $T_p(\mathcal{M})$ も $\Lambda[G]$-加群とみることができる．2.1 小節の最後にも述べたように次の (アーベル群としての) 完全系列は 1-motive の構成から自動的に従うものであるが，$\Lambda[G]$-加群としての完全系列であることも容易に確かめられる．

$$\text{(M1)}\qquad 0 \to T_p(A_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T}}) \to T_p(\mathcal{M}) \to \mathrm{Div}_{\mathcal{K}}(\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}_p)\otimes\mathbb{Z}_p \to 0.$$

次に，上で定義した 1-motive が classical な岩澤加群と対応することを見よう．以下この小節の終わりまでは $\mu_p \subset \mathcal{K}$ を仮定する．$\mathcal{T}=\emptyset$ として構成した 1-motive $\mathcal{M}_{\mathcal{S},\,\emptyset}^{\mathcal{K}}$ を $\mathcal{M}_\emptyset$ と書く．次の可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & (E_{\mathcal{K}}/E_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T}}\otimes\mathbb{Z}_p)^-[p^n] & & & & & & \\
 & & \big\downarrow\hookrightarrow & & & & & & \\
0 & \longrightarrow & (\Delta_{\mathcal{K},\,\mathcal{T}}\otimes\mathbb{Z}_p)^-[p^n] & \longrightarrow & \mathrm{Ker}(\mathcal{M}[p^n]^- \to \mathcal{M}_\emptyset[p^n]^-) & \longrightarrow & 0 & & \\
 & & \big\downarrow & & \big\downarrow\hookrightarrow & & \big\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T}-}[p^n] & \longrightarrow & \mathcal{M}[p^n]^- & \longrightarrow & \mathrm{Div}_{\mathcal{K}}(\mathcal{S}\setminus S_p)^-\otimes\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow = & & \\
0 & \longrightarrow & A_{\mathcal{K}}^-[p^n] & \longrightarrow & \mathcal{M}_\emptyset[p^n]^- & \longrightarrow & \mathrm{Div}_{\mathcal{K}}(\mathcal{S}\setminus S_p)^-\otimes\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \big\downarrow & & \big\downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

より，$\mathrm{Ker}(\mathcal{M}[p^n]^- \to \mathcal{M}_\emptyset[p^n]^-) \simeq \mathrm{Coker}(\mu_{p^n} \hookrightarrow (\Delta_{\mathcal{K},\,\mathcal{T}}\otimes\mathbb{Z}_p)^-[p^n])$ を得る．従って，上の図式の縦の真ん中の完全系列において極限を取ることで次の $\Lambda[G]$-加群の完全系列を得る．

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_p(1) \longrightarrow T_p(\Delta_{\mathcal{K},\,\mathcal{T}}\otimes\mathbb{Z}_p)^- \longrightarrow T_p(\mathcal{M})^- \longrightarrow T_p(\mathcal{M}_\emptyset)^- \longrightarrow 0.$$

$T_p(\mathcal{M}_\emptyset)^-$ を決定しよう．$\widetilde{\mathcal{K}}$ を $\mathcal{K}$ 上の $\mathcal{S}$ 外不分岐な最大アーベル p-拡大とし, $\mathfrak{X}_{\mathcal{S}} := \mathrm{Gal}(\widetilde{\mathcal{K}}/\mathcal{K})$ とおく．m を任意の p ベキとして

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_{\mathcal{S},\,\mathcal{T}}^{(m)} &:= \{x\in\mathcal{K}_{\mathcal{T}}^\times \,|\, \mathrm{div}_{\mathcal{K}}(x) = mD+y,\, D\in\mathrm{Div}_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T}},\, y\in\mathrm{Div}_{\mathcal{K}}(\mathcal{S})\} \\
&= \{x\in\mathcal{K}_{\mathcal{T}}^\times \,|\, \mathrm{div}_{\mathcal{K}}(x) = mD+y,\, D\in\mathrm{Div}_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T}},\, y\in\mathrm{Div}_{\mathcal{K}}(\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}_p)\}
\end{aligned}$$

と定義する．$\widetilde{\mathcal{K}} = \mathcal{K}\left(\bigcup_n\{\sqrt[p^n]{a} \,|\, a\in\mathcal{K}_{\mathcal{S},\,\emptyset}^{(p^n)}\}\right)$ であるから，Kummer 理論により次の ($\mathbb{Z}_p$-双線形形式としての) 完全 paring が存在する．

$$\langle\cdot,\,\cdot\rangle \,:\, \mathfrak{X}_{\mathcal{S}}/p^n\mathfrak{X}_{\mathcal{S}} \times \mathcal{K}_{\mathcal{S},\,\emptyset}^{(p^n)}/\mathcal{K}^{\times p^n} \longrightarrow \mu_{p^n}\,;\,(\sigma,\,x)\mapsto \frac{\sigma\,\sqrt[p^n]{x}}{\sqrt[p^n]{x}}.$$

この paring は次の意味で $\mathrm{Gal}(\mathcal{K}/k)$ の元と可換である．

$$\langle g\cdot\sigma,\, g\cdot x\rangle = g\langle\sigma,\,x\rangle,\ \ g\in\mathrm{Gal}(\mathcal{K}/k).$$

従って次の完全 paring を得る．

$$\langle\cdot,\,\cdot\rangle\,:\,\mathfrak{X}_{\mathcal{S}}^{+}/p^{n}\mathfrak{X}_{\mathcal{S}}^{+}\times\left(\mathcal{K}_{\mathcal{S},\,\emptyset}^{(p^{n})}/\mathcal{K}^{\times p^{n}}\right)^{-}\longrightarrow\mu_{p^{n}}$$

以下に述べる Proposition により ($\Lambda[G]$-加群としての) 同型 $\left(\mathcal{K}_{\mathcal{S},\,\emptyset}^{(p^{n})}/\mathcal{K}^{\times p^{n}}\right)^{-}\simeq\mathcal{M}_{\emptyset}[p^{n}]^{-}$ が成り立つから，$\mathbb{Z}_p$-加群としての同型 $\mathcal{M}_{\emptyset}[p^{n}]^{-}\simeq\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathfrak{X}_{\mathcal{S}}^{+}/p^{n}\mathfrak{X}_{\mathcal{S}}^{+},\,\mu_p^n)=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathfrak{X}_{\mathcal{S}}^{+},\,\mu_p^n)$ を得る．射影極限を取って，

$$T_p(\mathcal{M}_{\emptyset})^{-}\simeq\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathfrak{X}_{\mathcal{S}}^{+},\,\mathbb{Z}_p(1))$$

を得る．右側に $\Lambda[G]$ の作用を次のように定義すると，この同型は $\Lambda[G]$-加群の同型であることが確かめられる； $f\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathfrak{X}_{\mathcal{S}}^{+},\,\mathbb{Z}_p(1)),\,\sigma\in\mathfrak{X}_{\mathcal{S}}^{+},\,g\in\mathrm{Gal}(\mathcal{K}/k)$ に対して $(g\cdot f)(\sigma):=f(c_p(g)g^{-1}\cdot x)$．ここで $c_p\,:\,\mathrm{Gal}(\mathcal{K}/k)\to\mathbb{Z}_p^{\times}$ は円分指標である．

よって $\Lambda[G]$-加群としての完全系列

$$\text{(M2)}\qquad 0\longrightarrow\mathbb{Z}_p(1)\longrightarrow T_p(\Delta_{\mathcal{K},\,\mathcal{T}}\otimes\mathbb{Z}_p)^{-}\longrightarrow T_p(\mathcal{M})^{-}\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathfrak{X}_{\mathcal{S}}^{+},\,\mathbb{Z}_p(1))\longrightarrow 0.$$

を得ることができた．

Proposition 2.8. m を任意の p ベキとする．$\Lambda[G]$-加群としての同型

$$\mathcal{M}[m]\simeq\mathcal{K}_{\mathcal{S},\,\mathcal{T}}^{(m)}/(\mathcal{K}_{\mathcal{T}}^{\times m}E_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T}})$$

が成り立つ．従って特に，

$$\mathcal{M}[m]^{-}\simeq\left(\mathcal{K}_{\mathcal{S},\,\mathcal{T}}^{(m)}/\mathcal{K}_{\mathcal{T}}^{\times m}\right)^{-}$$

が成り立つ．

Proof ． 前半：左から右へ向かう写像 ϕ を次のように構成する．$(\mathcal{D},\,x)\in\mathcal{A}_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T}}\times_{A_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T}}}^{m}\mathrm{Div}_{\mathcal{K}}(\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}_p)$ を取る．以下に示すように，ある $D\in\mathrm{Div}_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T}},\;f\in\mathcal{K}_{\mathcal{S},\,\mathcal{T}}^{(m)}$ が存在して，

$$\text{(2.5)}\qquad \widehat{D}\otimes 1=\mathcal{D},\quad mD-x=\mathrm{div}_{\mathcal{K}}(f)$$

を満たすから，$\phi(\mathcal{D},\,x)=f \bmod \mathcal{K}_{\mathcal{T}}^{\times m}E_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T}}(=:\overline{f})$ と定義する (定義より ϕ が準同型であることがすぐに分かる)．$(\mathcal{D},\,x)$ を上の通りとする．定義より $m\mathcal{D}=\widehat{x}\otimes 1$ in $A_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T}}$ であるから，ある $D\in\mathrm{Div}_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T}},\,f\in\mathcal{K}_{\mathcal{T}}^{\times},\,y\in\mathrm{Div}_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T}}$ が存在して以下を満たす．

$$\widehat{D}\otimes 1=\mathcal{D},\quad \widehat{y}\otimes 1=0\ \text{ in }\ A_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T}},\quad mD-x=\mathrm{div}_{\mathcal{K}}(f)+y.$$

$A_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T}}$ は可除加群であり，$\mathrm{Cl}_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T}}$ の non p-part 上では m 倍写像は全単射であるから，ある $y'\in\mathrm{Div}_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T}}$ が存在して，$\widehat{my'}=\widehat{y}$ in $\mathrm{Cl}_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T}}$ を満たす．$my'-y=\mathrm{div}_{\mathcal{K}}(f')$ $(f'\in\mathrm{Div}_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T}})$, $D'=D-y'$ とおくと，

$$\widehat{D'}\otimes 1=\mathcal{D},\quad mD'-x=\mathrm{div}_{\mathcal{K}}(f/f')$$

であり，$f/f'\in\mathcal{K}_{\mathcal{S},\,\mathcal{T}}^{(m)}$ である．

ϕ が well-difined であることを示す．(2.5) を満たす別の $D'\in\mathrm{Div}_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T}},\,f'\in\mathcal{K}_{\mathcal{S},\,\mathcal{T}}^{(m)}$ を取る．$\widehat{D-D'}\otimes 1=0$ より $D-D'=\mathrm{div}_{\mathcal{K}}(g)+y$ $(g\in\mathcal{K}_{\mathcal{T}}^{\times},\,y\in\mathrm{Div}_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T}},\;\widehat{y}\otimes 1=0)$ と書ける．十分大きな $a\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ $((a,\,p)=1)$ に

対して $ay = \mathrm{div}_{\mathcal{K}}(g')$ ($g' \in \mathcal{K}_{\mathcal{T}}^{\times}$) となるから，

$$\mathrm{div}_{\mathcal{K}}(f^a) - \mathrm{div}_{\mathcal{K}}(f'^a) = am(D - D') = \mathrm{div}_{\mathcal{K}}((g^a g')^m).$$

ゆえに $\overline{f}^a = \overline{f'}^a$ であるが，$\mathcal{K}_{\mathcal{S},\mathcal{T}}^{(m)}/(\mathcal{K}_{\mathcal{T}}^{\times m} E_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T}})$ は exponent p ベキのアーベル群なので $\overline{f} = \overline{f'}$ である．明らかに $\mathrm{Ker}(\phi) \supset m(\mathcal{A}_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T}} \times_{A_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T}}}^{m} \mathrm{Div}_{\mathcal{K}}(\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_p))$ であるから，商を経由して $\phi : \mathcal{M}[m] \to \mathcal{K}_{\mathcal{S},\mathcal{T}}^{(m)}/(\mathcal{K}_{\mathcal{T}}^{\times m} E_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T}})$ が定義される．

ϕ の全射性を示す．$f \in \mathcal{K}_{\mathcal{S},\mathcal{T}}^{(m)}$ を任意に取る．f の定義より，$\mathrm{div}_{\mathcal{K}}(f) = mD - x$ ($D \in \mathrm{Div}_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T}}$, $x \in \mathrm{Div}_{\mathcal{K}}(\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_p)$) と書くことが出来る．十分大きな $a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ($(a, p) = 1$) に対して $a\widehat{D} \in A_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T}}$，すなわち $(a\widehat{D}, ax) \in \mathcal{A}_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T}} \times_{A_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T}}}^{m} \mathrm{Div}_{\mathcal{K}}(\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_p)$ となり，$\phi(a\widehat{D}, ax) = \overline{f}^a$ を得る．ゆえに $\overline{f}^a \in \mathrm{Im}(\phi)$，従って $\overline{f} \in \mathrm{Im}(\phi)$ を得る ($\mathrm{Im}(\phi)$ の exponent は p ベキである)．

ϕ の単射性を示す．$\phi(\mathcal{D}, x) = 0$ とする．すなわち，ある $D \in \mathrm{Div}_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T}}$ ($\widehat{D} \otimes 1 = \mathcal{D}$)，$x \in \mathrm{Div}_{\mathcal{K}}(\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_p)$，$g \in \mathcal{K}_{\mathcal{T}}^{\times}$ が存在して，

$$mD - x = \mathrm{div}_{\mathcal{K}}(g^m) = m\,\mathrm{div}_{\mathcal{K}}(g)$$

であったとする．これより $x = m\,x'$, $x \in \mathrm{Div}_{\mathcal{K}}(\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_p)$ と書くことが出来る．$A_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T}}$ は可除加群であるから，ある $D' \in \mathrm{Div}_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T}}$ が存在して，$\widehat{D} \otimes 1 = m\,\widehat{D'} \otimes 1$ となる．従って，ある $f' \in \mathcal{K}_{\mathcal{T}}^{\times}$ と $y \in \mathrm{Div}_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T}}$ が存在して，$D - mD' = \mathrm{div}_{\mathcal{K}}(f') + y$，$\widehat{y} \otimes 1 = 0$ を満たす．$m\,D' - x' = \mathrm{div}_{\mathcal{K}}(g/f') + y$ であるから $(\widehat{D'} \otimes 1, x') \in \mathcal{A}_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T}} \times_{A_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T}}}^{m} \mathrm{Div}_{\mathcal{K}}(\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_p)$ である．ゆえに，$(\mathcal{D}, x) = (\widehat{D} \otimes 1, x) = m\,(\widehat{D'} \otimes 1, x') = 0$ in $\mathcal{M}[m]$ である．

後半：次の完全系列

$$E_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T}}/(E_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T}})^m \to \mathcal{K}_{\mathcal{S},\mathcal{T}}^{(m)}/\mathcal{K}_{\mathcal{T}}^{\times m} \to \mathcal{K}_{\mathcal{S},\mathcal{T}}^{(m)}/(\mathcal{K}_{\mathcal{T}}^{\times m} E_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T}}) \to 0$$

より $(E_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T}}/(E_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T}})^m)^- = 0$ を示せば十分である．$\mathcal{T} = \emptyset$ のとき $(E_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T}} \otimes \mathbb{Z}_p)^- = \mu_{p^\infty}$，$\mathcal{T} \neq \emptyset$ のとき $(E_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T}} \otimes \mathbb{Z}_p)^- = \{1\}$ だから，

$$(E_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T}}/(E_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T}})^m)^- \simeq (E_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T}} \otimes \mathbb{Z}_p)^- \otimes \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = 0.$$

□

2.3 Cohomologically triviality

この節では 1-motive の性質 (M3) を，より詳しく次の定理を証明する．

Theorem 2.9. $\mathrm{pd}_R(M)$ で M の R-加群としての射影次元を表す.

(1) $\mathrm{pd}_{\mathbb{Z}_p[G]}(T_p(\mathcal{M})^-) = 0$ (特に $\mathrm{pd}_{\mathbb{Z}_p[G]^-}(T_p(\mathcal{M})^-) = 0$)

(2) $\mathrm{pd}_{\Lambda[G]}(T_p(\mathcal{M})^-) = 1$ (特に $\mathrm{pd}_{\Lambda[G]^-}(T_p(\mathcal{M})^-) = 1$)

Theorem 2.9 は次の Thorem 2.10 と Lemma 2.11 から従う．

Theorem 2.10. $T_p(\mathcal{M})^-$ は有限階数自由 $\mathbb{Z}_p[G_p]$-加群である．

Lemma 2.11 (Proposition 2.2 [26])**.** M を有限生成 $\Lambda[G]$-加群とするとき，$\mathrm{pd}_{\Lambda[G]}(M) \leq 1$ であることと次の 2 条件が成り立つことは同値である．

(1) $\mathrm{pd}_{\mathbb{Z}_p[G]}(M) \leq 1$

(2) $\mathrm{pd}_\Lambda(M) \le 1$ ($\Leftrightarrow M$ は非自明な有限 Λ-部分加群を持たない．参照 Propositon 5.3.19 in [24])

Thorem 2.10 + Lemma 2.11 ⇒ Theorem 2.9.

$T_p(\mathcal{M})^-$ は $\mathbb{Z}_p$-free より (このとこは Theorem 2.10 を用いなくても $T_p(\mathcal{M})$ の定義より従う．完全系列 (M1) も参照)，(variant of) Thorem 7, §5 in [29] を用いて (§5 in [29] の結果は $\mathbb{Z}$ を一般の PID に取り換えても成り立つ)，$T_p(\mathcal{M})^-$ が $\mathbb{Z}_p[G]$-射影的であることと，G-chomologically trivial(以下-c.t. と記す) であることは同値である．$T_p(\mathcal{M})^-$ の定義より Δ-c.t. であることは明らかである．また Thorem 2.10 より G_p-c.t. でもあるから結局 $T_p(\mathcal{M})^-$ は G-c.t. である．これより Lemma 2.11 (1) も確かめられた．また $T_p(\mathcal{M})^-$ は $\mathbb{Z}_p$-free より Lemma 2.11 (2) は明らかである． □

Lemma 2.11 の証明は標準的であるからここでは省略する．Theorem 2.10 は次の Theorem 2.12 より直ちに導かれる．

Theorem 2.12. $\mathcal{M}[p]^-$ は有限階数自由 $\mathbb{F}_p[G_p]$-加群である．特に $\mathcal{M}[p]^-$ は G_p-c.t. である．

Thorem 2.12 ⇒ Theorem 2.10.

$\mathbb{Z}[G_p]$-加群としての完全系列

$$0 \longrightarrow T_p(\mathcal{M})^- \xrightarrow{\times p} T_p(\mathcal{M})^- \longrightarrow \mathcal{M}[p]^- \longrightarrow 0$$

より $\widehat{H}^i(G_p, T_p(\mathcal{M})^-) \overset{\times p}{\simeq} \widehat{H}^i(G_p, T_p(\mathcal{M})^-)$ $(\forall i \in \mathbb{Z})$，従って $\widehat{H}^i(G_p, T_p(\mathcal{M})^-) = 0$ $(\forall i \in \mathbb{Z})$ を得る．再び (variant of) Thorem 7, §5 in [29] より $T_p[\mathcal{M}]^-$ は $\mathbb{Z}_p[G_p]$-射影的である．$\mathbb{Z}_p[G_p]$ は局所環であるから，この条件は $T_p[\mathcal{M}]^-$ が自由 $\mathbb{Z}_p[G_p]$-加群であることと同値である．$\mathbb{F}_p[G_p]$-加群としての同型 $\mathcal{M}[p]^- \simeq \mathbb{F}_p[G_p] \otimes_{\mathbb{Z}_p[G_p]} T_p(\mathcal{M})^-$ より $\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p[G_p]} T_p(\mathcal{M})^- = \mathrm{rank}_{\mathbb{F}_p[G_p]} \mathcal{M}[p]^- < \infty$. □

Thorem 2.12 は次の Key Lemma より従う．

Key Lemma.

(1) $\mathcal{M}'[p]^- = (\mathcal{M}[p]^-)^{G_p}$.

(2) $\dim_{\mathbb{F}_p} \mathcal{M}[p]^- < \infty$，$\dim_{\mathbb{F}_p} \mathcal{M}'[p]^- < \infty$ であり，$\dim_{\mathbb{F}_p} \mathcal{M}[p]^- = |G_p| \dim_{\mathbb{F}_p} \mathcal{M}'[p]^-$.

Key Lemma. ⇒ Theorem 2.12

$\mathbb{F}_p[G_p]$ は Gorenstein 環であるから，Pontryagin 双対を考えることで次の主張に帰着する (Proposition 4, Appendix in [21])．

主張 M を有限生成 $\mathbb{F}_p[G_p]$-加群とするとき $\dim_{\mathbb{F}_p} M = |G_p| \dim_{\mathbb{F}_p}(M_{G_p})$ ならば，M は有限階数自由 $\mathbb{F}_p[G_p]$-加群である．

実際，$l := \dim_{\mathbb{F}_p}(M_{G_p})$ と置けば，中山の補題により全射 $\mathbb{F}_p[G_p]^{\oplus l} \twoheadrightarrow M$ が存在するが，$\dim_{\mathbb{F}_p}(M) = l \cdot |G_p| = \dim_{\mathbb{F}_p}(\mathbb{F}_p[G_p]^{\oplus l})$ であるから，この写像は単射でもある． □

Proof of Key Lemma.

(1) Thorem 2.8 より $(\mathcal{K}^{(m)}_{\mathcal{S},\mathcal{T}}/\mathcal{K}^{\times m}_{\mathcal{T}})^{G_p} \simeq \mathcal{L}^{(m)}_{\mathcal{S}',\mathcal{T}'}/\mathcal{L}^{\times m}_{\mathcal{T}'}$ を示せばよい (実際は $m = p$ の場合で十分だが m が一般の p ベキでも証明は同じなのでこれを示す)．完全系列

$$0 \to \mathcal{K}^{\times m}_{\mathcal{T}} \to \mathcal{K}^{(m)}_{\mathcal{S},\mathcal{T}} \to \mathcal{K}^{(m)}_{\mathcal{S},\mathcal{T}}/\mathcal{K}^{\times m}_{\mathcal{T}} \to 0$$

より G_p 不変部分を取ることで，完全系列

$$0 \to \mathcal{L}_{\mathcal{T}'}^{\times m} \to (\mathcal{K}_{\mathcal{S},\mathcal{T}}^{(m)})^{G_p} \to (\mathcal{K}_{\mathcal{S},\mathcal{T}}^{(m)}/\mathcal{K}_{\mathcal{T}}^{\times m})^{G_p} \to H^1(G_p, \mathcal{K}_{\mathcal{T}}^{\times m})$$

を得る．従って次の二つを示せばよい．(i) $(\mathcal{K}_{\mathcal{S},\mathcal{T}}^{(m)})^{G_p} = \mathcal{L}_{\mathcal{S}',\mathcal{T}'}^{(m)}$ かつ (ii) $H^1(G_p, \mathcal{K}_{\mathcal{T}}^{\times m}) = 0$.

(i) を示す．

$$\mathrm{Div}_{\mathcal{K}}^{\mathcal{S}} := \bigoplus_{v \notin \mathcal{S}} X_v \cdot v, \quad \mathrm{div}_{\mathcal{K}}^{\mathcal{S}}(x) : \mathcal{K}_{\mathcal{T}}^{\times} \longrightarrow \mathrm{Div}_{\mathcal{K}}^{\mathcal{S}} \otimes \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \,;\, x \mapsto \sum_{v \notin \mathcal{S}} \mathrm{ord}_v(x) \cdot v \otimes 1$$

とおくと，$\mathcal{K}_{\mathcal{S},\mathcal{T}}^{(m)}$ の定義より $\mathcal{K}_{\mathcal{S},\mathcal{T}}^{(m)} = \mathrm{Ker}(\mathcal{K}_{\mathcal{T}}^{\times} \xrightarrow{\mathrm{div}_{\mathcal{K}}^{\mathcal{S}}} \mathrm{Div}_{\mathcal{K}}^{\mathcal{S}} \otimes \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ である．従って，

$$(\mathcal{K}_{\mathcal{S},\mathcal{T}}^{(m)})^{G_p} = \mathrm{Ker}(\mathcal{L}_{\mathcal{T}'}^{\times} \xrightarrow{\mathrm{div}_{\mathcal{L}}^{\mathcal{S}'}} \mathrm{Div}_{\mathcal{L}}^{\mathcal{S}'} \otimes \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = \mathcal{L}_{\mathcal{S}',\mathcal{T}'}^{(m)}.$$

(ii) を示す．$\mathcal{T}$ に関する仮定より $\mathcal{K}_{\mathcal{T}}^{\times}$ は p ベキ torsion 元を持たないから，$\mathcal{K}_{\mathcal{T}}^{\times} \overset{\times m}{\simeq} \mathcal{K}_{\mathcal{T}}^{\times m}$. 従って，$H^1(G_p, \mathcal{K}_{\mathcal{T}}^{\times m}) = 0 \iff H^1(G_p, \mathcal{K}_{\mathcal{T}}^{\times}) = 0$ である．後者を示そう．$\mathcal{K}_{(\mathcal{T})}^{\times} := \{x \in \mathcal{K}^{\times} \mid \mathrm{ord}_v(x) = 0 \ (\forall v \in \mathcal{T})\}$ と置き，次の二つの完全系列を考える．

$$\begin{array}{lll} 0 & \longrightarrow & \mathcal{K}_{\mathcal{T}}^{\times} \longrightarrow \mathcal{K}_{(\mathcal{T})}^{\times} \longrightarrow \Delta_{\mathcal{K},\mathcal{T}} \longrightarrow 0 \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{K}_{(\mathcal{T})}^{\times} \longrightarrow \mathcal{K}^{\times} \xrightarrow{\mathrm{div}_{\mathcal{K},\mathcal{T}}} \mathrm{Div}_{\mathcal{K}}(\mathcal{T}) \longrightarrow 0. \end{array}$$

ここで $\mathrm{Div}_{\mathcal{K}}(\mathcal{T}) := \bigoplus_{v \in \mathcal{T}} X_v \cdot v$，$\mathrm{div}_{\mathcal{K},\mathcal{T}}(x) := \sum_{v \in \mathcal{T}} \mathrm{ord}_v(x) \cdot v$ である．上の完全性は明らかである．下の全射性は近似定理による．

$\mathcal{K}/\mathcal{L}$ は p-拡大であるから，$v \in \mathcal{T}'$, $w \in \mathcal{T}$, $w \mid v$ に対して $\kappa(w) = \kappa(v)$ である (ある有限体上の $\mathbb{Z}_p$-拡大はただ一つなので)．ゆえに $G_{p,v}$ を v の G_p における分解群とすれば $G_{p,v} = \{1\}$ である．各 $v \in \mathcal{T}'$ に対して v の上にある $w \in \mathcal{T}$ を一つずつ固定し次を得る．

$$\begin{array}{rcl} \Delta_{\mathcal{K},\mathcal{T}} & = & \displaystyle\bigoplus_{v \in \mathcal{T}'} (\kappa(w)^{\times} \otimes_{\mathbb{Z}[G_{p,v}]} \mathbb{Z}[G_p]) = \bigoplus_{v \in \mathcal{T}'} (\kappa(w)^{\times} \otimes \mathbb{Z}[G_p]) \\ \mathrm{Div}_{\mathcal{K}}(\mathcal{T}) & = & \displaystyle\bigoplus_{v \in \mathcal{T}'} (\mathbb{Z}w \otimes_{\mathbb{Z}[G_{p,v}]} \mathbb{Z}[G_p]) = \bigoplus_{v \in \mathcal{T}'} (\mathbb{Z}w \otimes \mathbb{Z}[G_p]). \end{array}$$

$\Delta_{\mathcal{K},\mathcal{T}}$, $\mathrm{Div}_{\mathcal{K}}(\mathcal{T})$ は G_p-induced module であるから，G_p-c.t. である．ゆえに上で述べた二つの完全系列と Hilbert 定理 90 より，

$$H^1(G_p, \mathcal{K}_{\mathcal{T}}^{\times}) \simeq H^1(G_p, \mathcal{K}_{(\mathcal{T})}^{\times}) \simeq H^1(G_p, \mathcal{K}^{\times}) = 0.$$

(2) 次の完全系列は 1-motive の定義から自動的に従うものであった．

$$0 \to A_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T}}[p]^- \to \mathcal{M}[p]^- \to (\mathrm{Div}_{\mathcal{K}}(\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_p) \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^- \to 0.$$

$\mathcal{S}$, $\mathcal{S}_p$ の下にある $\mathcal{K}^+$ ($\mathcal{K}$ の最大実部分体) の素点の集合を $\mathcal{S}^+$, $\mathcal{S}_p^+$ とするとき，

$$\dim_{\mathbb{F}_p}((\mathrm{Div}_{\mathcal{K}}(\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_p) \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^-) = \#\{v \in \mathcal{S}^+ \setminus \mathcal{S}_p^+ \mid v \text{ splits in } \mathcal{K}/\mathcal{K}^+\} := d_{\mathcal{K},\mathcal{S}}^-$$

と計算できる．完全系列 (2.4) と Lemma 2.6 より以下の完全系列を得る．

$$0 \to (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^{\delta_{\mathcal{K}}} \to (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^{\delta_{\mathcal{K},\mathcal{T}}^-} \to A_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T}-} \to (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^{\lambda_{\mathcal{K}}^-} \to 0.$$

従って,

$$\dim_{\mathbb{F}_p}(A_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T}}[p]^-) = \lambda_{\mathcal{K}}^- + \delta_{\mathcal{K},\mathcal{T}}^- - \delta_{\mathcal{K}}$$

と計算できる．ゆえに,

$$\dim_{\mathbb{F}_p}(\mathcal{M}[p]^-) = \lambda_{\mathcal{K}}^- + \delta_{\mathcal{K},\mathcal{T}}^- - \delta_{\mathcal{K}} + d_{\mathcal{K},\mathcal{S}}^-.$$

$\mathcal{K}$ を $\mathcal{L}$ に置き換えて同様に,

$$\dim_{\mathbb{F}_p}(\mathcal{M}'[p]^-) = \lambda_{\mathcal{L}}^- + \delta_{\mathcal{L},\mathcal{T}'}^- - \delta_{\mathcal{L}} + d_{\mathcal{L},\mathcal{S}'}^-.$$

ところで (1) の証明の中で見たように,

$$\Delta_{\mathcal{K},\mathcal{T}} \otimes \mathbb{Z}_p = \bigoplus_{v\in\mathcal{T}'} (\kappa(w)^\times \otimes_{\mathbb{Z}_p[G_{p},v]} \mathbb{Z}_p[G_p]) = \bigoplus_{v\in\mathcal{T}'} (\kappa(v)^\times \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[G_p]) = \Delta_{\mathcal{L},\mathcal{T}'} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[G_p]$$

が成り立つから，マイナスパートを取ることで，$\delta_{\mathcal{K},\mathcal{T}}^- = |G_p|\cdot\delta_{\mathcal{L},\mathcal{T}'}^-$ を得る．上で述べたことと同じ理由により $\mathcal{K}^+/\mathcal{L}^+$ では素点の惰性が起こらないことに注意すると，$|G_p|d_{\mathcal{L},\mathcal{S}'}^- - d_{\mathcal{K},\mathcal{S}}^- = \sum_{w\in\mathcal{S}^+\setminus\mathcal{S}_p^+}(e_w(\mathcal{K}^+/\mathcal{L}^+)-1)$ (w は $\mathcal{K}/\mathcal{K}^+$ で分解するものを走る) であることが分かる．ゆえに木田の公式 (cf. [16], [15]) より

$$\begin{aligned}
&\dim_{\mathbb{F}_p}(\mathcal{M}[p]^-) - |G_p|\cdot\dim_{\mathbb{F}_p}(\mathcal{M}'[p]^-)\\
&= \lambda_{\mathcal{K}}^- - \delta_{\mathcal{K}} + d_{\mathcal{K},\mathcal{S}}^- - |G_p|(\lambda_{\mathcal{L}}^- - \delta_{\mathcal{L}} + d_{\mathcal{L},\mathcal{S}'}^-)\\
&= \left\{\lambda_{\mathcal{K}}^- - \delta_{\mathcal{K}}\right\} - \left\{|G_p|(\lambda_{\mathcal{L}}^- - \delta_{\mathcal{L}}) + |G_p|d_{\mathcal{L},\mathcal{S}'}^- - d_{\mathcal{K},\mathcal{S}}^-\right\}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

2.4 同変岩澤主予想の定式化と証明

まず岩澤主予想について簡単に復習する．2.2, 2.3 小節と同じ記号と仮定を用いる．$\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(\mathcal{K}/k)$ とおく．K と k_∞ は線形無関連と仮定したから $\mathcal{G} = G\times\Gamma$ である．$\mathfrak{X}_{\mathcal{S}}$ には自然に $\Lambda[G]$-加群の構造が入る ([32] 参照).

Theorem 2.13 (Iwasawa [14])**.** $\mathfrak{X}_{\mathcal{S}}^+$ は有限生成 torsion Λ-加群である．

$\mathcal{O}$ を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大の整数環で，任意の指標 $\psi\in\widehat{G}$ に対して $\mathrm{Im}(\psi)\subset\mathcal{O}$ を満たすものとする．$Q(\mathcal{O})$ で $\mathcal{O}$ の商体を表す．有限生成 torsion Λ-加群の構造定理 (cf. [32]) より，$\mathfrak{X}_{\mathcal{S}}^+\otimes_{\mathbb{Z}_p}Q(\mathcal{O})$ は有限次元 $Q(\mathcal{O})$-ベクトル空間であることが分かる．$\mathfrak{X}_{\mathcal{S}}^+$ は $Q(\mathcal{O})[G]$-加群として，次のように $g\in G$ が $\psi(g)$ で作用する固有空間に分解する．

$$\mathfrak{X}_{\mathcal{S}}^+\otimes_{\mathbb{Z}_p}Q(\mathcal{O}) \simeq \bigoplus_{\psi\in\widehat{G},\,\psi:even} e_\psi(\mathfrak{X}_{\mathcal{S}}^+\otimes_{\mathbb{Z}_p}Q(\mathcal{O})).$$

各 $e_\psi(\mathfrak{X}_{\mathcal{S}}^+\otimes_{\mathbb{Z}_p}Q(\mathcal{O}))$ も有限次元 $Q(\mathcal{O})$-ベクトル空間であり，Γ の作用で不変である．γ の位相的生成元 γ を一つ固定すると，$\mathcal{O}[[\Gamma]]\simeq\mathcal{O}[[t]]\,;\,\gamma\mapsto t+1$ なる同型が成り立つ．以下この同型により $\mathcal{O}[[\Gamma]]$ と $\mathcal{O}[[t]]$ を同一視する．γ 倍の作用を $\mathfrak{m}_\gamma$ と書く．$e_\psi(\mathfrak{X}_{\mathcal{S}}^+\otimes_{\mathbb{Z}_p}Q(\mathcal{O}))$ 上に $\mathfrak{m}_\gamma$ を作用させ，その特性多項式 $\det_{Q(\mathcal{O})}((t+1)-\mathfrak{m}_\gamma\,|\,e_\psi(\mathfrak{X}_{\mathcal{S}}\otimes_{\mathbb{Z}_p}Q(\mathcal{O})))$ を考えると，これは $\mathcal{O}[t]\,(\subset\mathcal{O}[[t]])$ の元である．岩澤主予想は，この特性多項式が本質的に p-進 L 関数であることを主張する．

$u := c_p(\gamma)$ とおく (c_p は円分指標であった)．Deligne-Ribet [3] より次のことが示されている．$\psi\in\widehat{G}$ を偶指標とするとき，以下の性質を満たすような $G_{\psi,S},\,H_{\psi,S}\in\mathcal{O}[[t]]$ が存在する；ψ が自明指標の時 $H_{\psi,S}=t$

であり，それ以外の時 $H_{\psi,\,S} = 1$ である．また，任意の $m \in \mathbb{Z}_{\leq 1}$ に対して

$$\frac{G_{\psi,\,S}(u^m - 1)}{H_{\psi,\,S}(u^m - 1)} = L_S(1 - m,\, \psi\omega^{-m})$$

が成り立つ．ψ に対応する (S-imprimitive な) p-進 L 関数は

$$L_{p,\,S}(1 - s,\, \psi) := \frac{G_{\psi,\,S}(u^s - 1)}{H_{\psi,\,S}(u^s - 1)}$$

によって定義される $\mathbb{Z}_p \setminus \{1\}$ 上の p-進解析関数である (ψ が非自明のとき $s = 1$ でも正則)．以上の準備の下岩澤主予想は次のように述べられる．

Theorem 2.14 (Wiles [33])**.** 仮定 “$\mu = 0$” のもと，任意の偶指標 $\psi \in \widehat{G}$ に対して，$\mathcal{O}[[t]]$ の中で

$$G_{\psi,\,S}(t) \sim \det_{Q(\mathcal{O}}((t+1) - \mathfrak{m}_\gamma \,|\, e_\psi(\mathfrak{X}_{\mathcal{S}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} Q(\mathcal{O})))$$

が成り立つ ($\sim$ は単数倍を除いて等しいことを意味する)．

次に Greither-Popescu の意味での G-同変な岩澤主予想を定式化する．

$$\theta_S^{(\infty)} := \varprojlim \theta_{K_n/k,\, S_{K_n}} \quad \text{in} \quad Q(\mathbb{Z}_p[[\mathcal{G}]])$$

と定義するとき，任意の奇指標 $\chi \in \widehat{G}$ に対して $Q(\mathcal{O}[[t]])$ の中で，

$$\chi(\theta_S^{(\infty)}) = \frac{G_{\chi^{-1}\omega,\,S}(u(1+t)^{-1} - 1)}{H_{\chi^{-1}\omega,\,S}(u(1+t)^{-1} - 1)} \tag{2.6}$$

となることが確かめられる．$v \in T$ に対して $\phi_v^{(n)}$ で v の $\mathrm{Gal}(K_n/k)$ における Frobenius を表し，$\delta_v^{(n)} := 1 - (\phi_v^{(n)})^{-1} N v \in \mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(K_n/k)]$ とおく．$\delta_T^{(n)} := \prod_{v \in T} \delta_v^{(n)}$ とおき，

$$\delta_v^{(\infty)} := \varprojlim \delta_v^{(n)}, \quad \delta_T^{(\infty)} := \prod_{v \in T} \delta_v^{(\infty)} \in \mathbb{Z}_p[[\mathcal{G}]]$$

と定義する．そして G-同変な T-modified S-imprimitive p-進 L 関数を次のように定義する．

$$\theta_{S,\,T}^{(\infty)} := \delta_T^{(\infty)} \theta_S^{(\infty)} \in \mathbb{Z}_p[[\mathcal{G}]].$$

以上で Theorem 1.20 に現れる記号の説明が済んだ．改めて Theorem 1.20 を書いておく．

Theorem 2.15 (同変岩澤主予想)**.** $\mathbb{Z}_p[[\mathcal{G}]]^-$ のイデアルとしての等号

$$\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[[\mathcal{G}]]^-}(T_p(\mathcal{M})^-) = (\theta_{S,\,T}^{(\infty)})$$

が成り立つ．

以下に証明の概略を与える．

Lemma 2.16. Thorem 2.15 を示すには $\mu_p \subset K$ のもとで示せば十分である．

Proof . $\mu_p \not\subset K$ とする．$\widetilde{K} := K(\mu_p)$ とおき $\widetilde{\mathcal{K}}$ を $\widetilde{K}$ の円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大とする．$H := \mathrm{Gal}(\widetilde{\mathcal{K}}/\mathcal{K})$ とおくと $p \nmid \# H$ である．$\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$ の上にある $\widetilde{\mathcal{K}}$ の素点の集合を $\widetilde{\mathcal{S}}$, $\widetilde{\mathcal{T}}$ とおき，1-motive $\widetilde{\mathcal{M}} := \mathcal{M}_{\widetilde{\mathcal{S}},\,\widetilde{\mathcal{T}}}^{\widetilde{\mathcal{K}}}$ を定義する．

$T_p(\widetilde{\mathcal{M}})^-$ は H-c.t. であるから，

$$(T_p(\widetilde{\mathcal{M}})^-)^H = N_H \cdot T_p(\widetilde{\mathcal{M}})^-, \quad T_p(\widetilde{\mathcal{M}})^-/I_H T_p(\widetilde{\mathcal{M}})^- \simeq N_H \cdot T_p(\widetilde{\mathcal{M}})^-$$

が成り立つ．$N_H \in \mathbb{Z}_p[H]$ は H のノルム，I_H は $\mathbb{Z}_p[H]$ の augmentation イデアルである．ここで variant of Key Lemma (1) (次の Remark 参照) より

$$T_p(\mathcal{M})^- \simeq (T_p(\widetilde{\mathcal{M}})^-)^H \simeq T_p(\widetilde{\mathcal{M}})^-/I_H T_p(\widetilde{\mathcal{M}})^- \simeq T_p(\widetilde{\mathcal{M}})^- \otimes_{\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(\widetilde{\mathcal{K}}/k)]]^-} \mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(\mathcal{K}/k)]]^-$$

を得る．よって Fitting イデアルの base change property より

$$\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(\mathcal{K}/k))]]^-}(T_p(\mathcal{M})^-) = c_{\widetilde{\mathcal{K}}/\mathcal{K}}(\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(\widetilde{\mathcal{K}}/k))]]^-}(T_p(\widetilde{\mathcal{M}})^-))$$

を得る．$S \supset S_p$ であるから $\widetilde{\mathcal{K}}$ の G-同変 T-modified S-imprimitive p-進 L 関数の $c_{\widetilde{\mathcal{K}}/\mathcal{K}}$ による像は $\mathcal{K}$ のそれに一致する． □

Remark 2.17. 上の Lemma の証明で $T_p(\mathcal{M})^- \simeq (T_p(\widetilde{\mathcal{M}})^-)^H$ であることを用いた．Key Lemma (1) は p 群に対してのみ証明したが実は p-群の仮定無しに証明できる．p 群であることが用いられる部分は，Key Lemma (1) の証明内の (ii) において，$\Delta_{\mathcal{K},\mathcal{T}}$ と $\mathrm{Div}_{\mathcal{K}}(\mathcal{T})$ が induced G_p-加群の直和である (従って G_p-c.t. である) ことを示すところである．G_p を H に取り換えて議論する場合，$\Delta_{\mathcal{K},\mathcal{T}}$ と $\mathrm{Div}_{\mathcal{K}}(\mathcal{T})$ は indeuced H-加群にはならないが，Shapiro の補題と，Hilbert 定理 90，Herbrand 商を考えることで $\Delta_{\mathcal{K},\mathcal{T}}$ と $\mathrm{Div}_{\mathcal{K}}(\mathcal{T})$ は H-c.t. であることが確かめられる．Key Lemma (1) は実際 $\mathcal{M}'[p^n]^-$, $\mathcal{M}[p^n]^-$ に対して証明されたことにも注意されたい．

<u>いくつかの代数的な準備</u>

R を単位的可換環とする (R として $\mathbb{Z}_p[G]$, $\mathcal{O}_\chi[G]$ 等が想定されている)．P を有限生成射影的 R-加群とする (P として $T_p(\mathcal{M})^-$, $T_p(\mathcal{M}_\emptyset)^-$, $T_p(\Delta_{\mathcal{K},\mathcal{T}})^-$ 等が想定されている)．$f \in \mathrm{End}_R(P)$ に対して，$\det_R(f\,|\,P)$ を次で定義する；Q と射影的 R-加群で $R^n \simeq P \oplus Q$ を満たすものとする．そこで

$$\det_R(f\,|\,P) := \det_R(f \oplus \mathrm{id}_Q\,|\,P \oplus Q)$$

と定義する．この定義は Q の取り方に依存しない．実際，別の Q' に対しては $Q'' = P \oplus Q \oplus Q'$ を考えれば，$\det_R(f \oplus \mathrm{id}_{Q''}\,|\,P \oplus Q'') = \det_R(f \oplus \mathrm{id}_Q \oplus \mathrm{id}_{P\oplus Q'}\,|\,(P \oplus Q) \oplus (P \oplus Q')) = \det_R(f \oplus \mathrm{id}_{Q'} \oplus \mathrm{id}_{P\oplus Q}\,|\,(P \oplus Q') \oplus (P \oplus Q))$ が成り立つからである．

次に $f \in \mathrm{End}_R(P)$ の特性多項式 $\det_R(X - f\,|\,P) \in R[X]$ を定義する；$P \otimes_R R[X]$ は有限生成射影的 $R[X]$-加群であるから，

$$\det_R(X - f\,|\,P) := \det_{R[X]}(\mathrm{id}_P \otimes X - f \otimes \mathrm{id}_{R[X]}\,|\,P \otimes_R R[X])$$

と定義する．定義より $\det_R(X - f\,|\,P)$ は常に monic な多項式であることが確かめられる．このように定義した det が base change によって不変であることも直ちに確かめられる；R' を R の任意の拡大環とするとき

$$\det_R(f\,|\,P) = \det_{R'}(f \otimes \mathrm{id}_{R'}\,|\,P \otimes_R R')$$
$$\det_R(X - f\,|\,P) = \det_{R'}(X - f \otimes \mathrm{id}_{R'}\,|\,P \otimes_R R')$$

が成り立つ．

Proposition 2.18 (Proposition 4.1 in [10])**.** R を半局所可換コンパクト位相環とする ($\mathbb{Z}_p[G]$, $\mathcal{O}_\chi[G]$ を考

えている)．Γ を pro-cyclic な位相群とし γ をその位相的生成元とする ($\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathcal{K}/K) \simeq \mathbb{Z}_p$ を考えている)．M を位相的 $R[[\Gamma]]$-加群とし，R-加群として有限生成かつ射影的とする．$\mathfrak{m}_\gamma$ で M 上の γ 倍自己同型を表すと，上で述べたように，

$$F(X) := \det_R(X - \mathfrak{m}_\gamma \,|\, M)$$

が定義できる．このとき以下が成り立つ．

M は有限表示 $R[[\Gamma]]$-加群である．また，$F(\gamma)$ を自然な準同型 $R[X] \to R[[\Gamma]]\,;\, X \mapsto \gamma$ による $F(X) \in R[X]$ の像とするとき，$R[[\Gamma]]$ のイデアルとして次の等号が成り立つ．

$$\mathrm{Fitt}_{R[[\Gamma]]}(M) = (F(\gamma)).$$

Proposition 2.19 (Corollary 7.9 in [11])**.** $F, \Theta \in \mathbb{Z}_p[[G]]^-[[t]]$ が任意の奇指標 $\chi \in \widehat{G}$ に対して

$$\mu(\chi(F)) = \mu(\chi(\Theta)) = 0, \quad \chi(F) \sim \chi(\Theta) \text{ in } \mathcal{O}_\chi[[t]]$$

を満たすとする．この時 $F \sim \Theta$ in $\mathbb{Z}_p[G]^-[[t]]$ が成り立つ．

これら 2 つの Proposition の証明は省略するので各自参照して頂きたい．

Theorem 2.9 (2) より $\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[[G\times\Gamma]]^-}(T_p(\mathcal{M})^-)$ は単項イデアルである．その生成元の一つを $F \in \mathbb{Z}_p[G]^-[[t]]$ と置く．Proposition 2.18 より

$$F = \det_{\mathbb{Z}_p[G]^-}((t+1) - \mathfrak{m}_\gamma \,|\, T_p(\mathcal{M})^-\,)$$

と取ることができる．$\Theta := \theta_{S,T}^{(\infty)}$ とおく．Theorem 2.15 のためには $F \sim \Theta$ in $\mathbb{Z}_p[G]^-[[t]]$ を示せば良い．以下に述べるように完全系列 (M2) により F と $\mathfrak{X}_{\mathcal{S}}^+$(への γ の作用の特性多項式) を結び付け，岩澤主予想により各奇指標 $\chi \in \widehat{G}$ に対し $\chi(F)$ と $\chi(\Theta)$ を結び付け，Corollary 2.19 によりこれらを張り合わせ $F \sim \Theta$ を得る，という流れで Theorem 2.15 が証明される．

完全系列 (M2) に $\otimes_{\mathbb{Z}_p} Q(\mathcal{O})$ を施して，$Q(\mathcal{O})[G]^-[[\Gamma]]$-加群の完全系列

$$0 \longrightarrow Q(\mathcal{O})(1) \longrightarrow T_p(\Delta_{\mathcal{K},\mathcal{T}})^- \otimes_{\mathbb{Z}_p} Q(\mathcal{O}) \longrightarrow T_p(\mathcal{M})^- \otimes_{\mathbb{Z}_p} Q(\mathcal{O}) \longrightarrow (\mathfrak{X}_{\mathcal{S}}^+)^*(1) \otimes_{\mathbb{Z}_p} Q(\mathcal{O}) \longrightarrow 0.$$

を得る．$Q(\mathcal{O})[G] \simeq \bigoplus_{\chi \in \widehat{G},\, \chi:odd} Q(\mathcal{O})^\chi$ ($Q(\mathcal{O})^\chi$ は集合としては $Q(\mathcal{O})$ で $g \in G$ が $\chi(g)$ で作用する $Q(\mathcal{O})[G]^-$-加群である) なる同型が成り立つが，$Q(\mathcal{O})(1)$ は $Q(\mathcal{O})[G]^-$-加群として $Q(\mathcal{O})^\omega$ に他ならないから，$Q(\mathcal{O})(1)$ は射影的 $Q(O)[G]^-$-加群である．$T_p(\Delta_{\mathcal{K},\mathcal{T}})^-$ は以下に示すように射影的 $\mathbb{Z}_p[G]^-$-加群である (Proposition 2.21)．さらに $T_p(\mathcal{M})^-$, $(\mathfrak{X}_{\mathcal{S}}^+)^*(1)$ も Theorem 2.9 より射影的 $\mathbb{Z}_p[G]^-$-加群である．従って “代数的な準備 ” で述べたように上の完全系列の各項に対して $\det_{Q(\mathcal{O})[G]^-}(X - \mathfrak{m}_\gamma \,|\, \cdot\,)$ が，従って $\det_{Q(\mathcal{O})[G]^-}((t+1) - \mathfrak{m}_\gamma \,|\, \cdot\,)$ が定義できる (この元は $\cdot = Q(\mathcal{O})(1)$ の場合は $Q(\mathcal{O})[G]^-[[t]]$ の元であり，それ以外は $\mathbb{Z}_p[G]^-[[t]]$ の元である)．この determinant が完全系列に対して乗法的であることを示すのは易しい．従って次を得る．

$$\begin{aligned}
(2.7)\qquad & \det_{Q(\mathcal{O})[G]^-}((t+1) - \mathfrak{m}_\gamma \,|\, Q(\mathcal{O})(1)\,) \cdot F \\
& = \det_{\mathbb{Z}_p[G]^-}((t+1) - \mathfrak{m}_\gamma \,|\, T_p(\Delta_{\mathcal{K},\mathcal{T}})^-\,) \cdot \det_{Q(\mathcal{O})[G]^-}((t+1) - \mathfrak{m}_\gamma \,|\, (\mathfrak{X}_{\mathcal{S}}^+)^*(1) \otimes_{\mathbb{Z}_p} Q(\mathcal{O})\,).
\end{aligned}$$

各 determinant の奇指標 $\chi \in \widehat{G}$ による像を決定しよう．

(その 1) $\det_{Q(\mathcal{O})[G]}(X - \mathfrak{m}_\gamma \,|\, Q(\mathcal{O})(1)\,)$

Proposition 2.20. $Q(\mathcal{O})$ には $\mathcal{G}$ が自明に作用しているとする．以下 χ は任意の G の奇指標とする．

(1) $H_{\chi^{-1}\omega,\,S}(u(1+t)^{-1}-1) \sim \chi(\det_{Q(\mathcal{O})[G]}((t+1) - \mathfrak{m}_\gamma \,|\, Q(\mathcal{O})(1)\,))$ in $\mathcal{O}[[t]]$

(2) $\mu(H_{\chi^{-1}\omega,\,S}(u(1+t)^{-1}-1)) = 0$

Proof . $Q(\mathcal{O})(1)[X]$ は $Q(\mathcal{O})[G][X]$ の直和因子であり，$Q(\mathcal{O})(1)[X] = e_\omega(Q(\mathcal{O})[G][X])$ が成り立つ．$Q(\mathcal{O})(1)[X]$ 上では $X - \mathfrak{m}_\gamma$ 倍で，$e_\chi(Q(\mathcal{O})[G][X])$ $(\chi \neq \omega)$ 上では恒等写像であるような $Q(\mathcal{O})[G][X]$ じょうの写像は $(X-u)e_\omega + (1-e_\omega)$ であるから，$\det_{Q(\mathcal{O})[G]}(X - \mathfrak{m}_\gamma \,|\, Q(\mathcal{O})(1)\,) = (X-u)e_\omega + (1-e_\omega)$ である．ゆえに $\det_{Q(\mathcal{O})[G]}((t+1) - \mathfrak{m}_\gamma \,|\, Q(\mathcal{O})(1)\,) = te_\omega + (1-ue_\omega)$ であり，

$$\chi(\det_{Q(\mathcal{O})[G]}((t+1) - \mathfrak{m}_\gamma \,|\, Q(\mathcal{O})(1)\,) = \begin{cases} t + (1-u) & (\chi = \omega) \\ 1 & (\chi \neq \omega) \end{cases}$$

が成り立つ．明らかにこれは $H_{\chi^{-1}\omega,\,S}(u(1+t)^{-1}-1)$ と単数倍を除いて等しい．後半は $\chi(\det_{Q(\mathcal{O})[G]}((t+1) - \mathfrak{m}_\gamma \,|\, Q(\mathcal{O})(1)\,)$ の表示より明らか． □

(その 2) $\det_{Q(\mathcal{O})[G]^-}((t+1) - \mathfrak{m}_\gamma \,|\, T_p(\Delta_{\mathcal{K},\mathcal{T}})^- \otimes_{\mathbb{Z}_p} Q(\mathcal{O})\,)$

Proposition 2.21.

(1) $T_p(\Delta_{\mathcal{K},\mathcal{T}}) \simeq \bigoplus_{v\in T} \mathbb{Z}_p[[\mathcal{G}]]/(\delta_v^{(\infty)})$

(2) $\mathrm{pd}_{\mathbb{Z}_p[G]}(T_p(\Delta_{\mathcal{K},\mathcal{T}})) = 0$

(3) $\delta_T^{(\infty)} \sim \det_{\mathbb{Z}_p[G]}((t+1) - \mathfrak{m}_\gamma \,|\, T_p(\Delta_{\mathcal{K},\mathcal{T}}))$ in $\mathbb{Z}_p[[\mathcal{G}]]$

(4) 任意の $\chi\widehat{G}$ に対して $\mu(\chi(\delta_T^{(\infty)})) = 0$

Proof . (1) $v \in T$ に対して v の上にある $\mathcal{T}$ の素点 $w(v)$ を一つ固定する．

$$\Delta_{\mathcal{K},\mathcal{T}} \simeq \bigoplus_{w(v)\in T} (\kappa(w(v))^\times \otimes_{\mathbb{Z}[[\mathcal{G}_v]]} \mathbb{Z}[[\mathcal{G}]])$$

より $\mathbb{Z}_p[[\mathcal{G}]]$-加群としての同型

$$T_p(\Delta_{\mathcal{K},\mathcal{T}}) \simeq \bigoplus_{w(v)\in T} (T_p(\kappa(w(v))^\times) \otimes_{\mathbb{Z}_p[[\mathcal{G}_v]]} \mathbb{Z}_p[[\mathcal{G}]])$$

を得る．$T_p(\kappa(w(v))^\times) = \mathbb{Z}_p(1)$ は巡回 $\mathbb{Z}_p[[\mathcal{G}_v]]$-加群なので $\mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}_p[[\mathcal{G}_v]]}(\mathbb{Z}_p(1)) = (\delta_v^{(\infty)})$ であることを示せば良い．$\mathcal{G}_v$ は $\phi_v^{(\infty)}$ によって生成されるから，$\mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}_p[[\mathcal{G}_v]]}(\mathbb{Z}_p) = (1 - \phi_v^{(\infty)})$ が成り立つ ($\mathbb{Z}_p$ に $\mathcal{G}_v$ は自明に作用させる)．ここで $\mathbb{Z}_p[[\mathcal{G}_v]]$-加群としての同型 $t_{-1} : \mathbb{Z}_p[[\mathcal{G}_v]] \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p[[\mathcal{G}_v]](-1)\,;\, \sigma \mapsto c_p(\sigma)^{-1}\sigma$ $(\sigma \in \mathcal{G}_v)$ により，$\mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}_p[[\mathcal{G}_v]]}(\mathbb{Z}_p(1)) = t_{-1}(\mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}_p[[\mathcal{G}_v]]}(\mathbb{Z}_p))$ が成り立つことが分かる．よって (1) が示された．

(2) $\phi_v^{(\infty)} = \phi_v \cdot \gamma^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{Z}_p)$ とおく．$\mathbb{Z}_p[[\mathcal{G}]] \simeq \mathbb{Z}_p[G][[t]]$ の中で $\delta_v^{(\infty)} \sim (\phi_v \cdot (1+t)^\alpha - Nv)$ が成り立つが，任意の $\chi \in \widehat{G}$ に対して $\chi(\delta_v^{(\infty)}) \simeq$ は $\mathcal{O}[[t]]$ の中で非零因子である．ゆえに $\delta_v^{(\infty)}$ は $\mathbb{Z}_p[G][[t]]$ の非零因子である．よって (1) の同型より $\mathrm{pd}_{\mathbb{Z}_p[[\mathcal{G}]]}(T_p(\Delta_{\mathcal{K},\mathcal{T}})) = 1$ である ($\delta_v^{(\infty)}$, $v \in T$ が対角線にならぶ有限表示が

とれるので）．従って，$T_p(\Delta_{\mathcal{K},\mathcal{T}})$ は G-c.t. である．$T_p(\Delta_{\mathcal{K},\mathcal{T}})$ が $\mathbb{Z}_p$-free であることを考慮すれば $T_p(\Delta_{\mathcal{K},\mathcal{T}})$ が射影的 $\mathbb{Z}_p[G]$-加群であることが分かる (cf. (variant of) Theorem 7, §5, Chap. IX in [29])．

(3) (1) より $\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[[\mathcal{G}]]}(T_p(\Delta_{\mathcal{K},\mathcal{T}})) = (\delta_T^{(\infty)})$ である．(2) より Theorem 2.18 が適用できて結論が従う．

(4) (3) より $\chi(\delta_T^{(\infty)})$ は $\mathcal{O}[[t]]$ の monic な多項式である． □

<u>(その 3) $\det_{Q(\mathcal{O})[G]^-}((t+1)-\mathfrak{m}_\gamma \mid (\mathfrak{X}_S^+)^*(1)\otimes_{\mathbb{Z}_p} Q(\mathcal{O}))$</u>

Proposition 2.22. 任意の奇指標 $\chi \in \widehat{G}$ に対して $\mathcal{O}[[t]]$ の中で次が成り立つ．

(1) $G_{\chi^{-1}\omega,\,S}(u(1+t)^{-1}-1) \sim \chi(\det_{Q(\mathcal{O})[G]^-}((t+1)-\mathfrak{m}_\gamma \mid (\mathfrak{X}_S^+)^*(1)\otimes_{\mathbb{Z}_p} Q(\mathcal{O})))$

(2) $\mu(G_{\chi^{-1}\omega,\,S}(u(1+t)^{-1}-1)) = 0$

Proof . (2) は (1) より直ちに従う．(1) を示す．$\mathcal{L} := \mathfrak{X}_S^+ \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}$，$V := \mathcal{L}\otimes_{\mathcal{O}} Q(\mathcal{O})$ とおく．$\mathfrak{X}_S^+$ が有限生成 torsion Λ-加群であり，$\mathbb{Z}_p$-torsion を持たないことに注意すると，$\mathcal{L}$ は有限階数自由 $\mathcal{O}$-加群，V は有限次元 $Q(\mathcal{O})$-ベクトル空間で $\mathcal{L}$ は V の格子となる．任意の指標 $\chi \in \widehat{G}$ に対して $e_\chi V$ の基底 $\mathbf{x}_\chi$ を固定する．$A_{\gamma,\chi}$ を $e_\chi V$ 上の自己同型 $\mathfrak{m}_\gamma$ の $\mathbf{x}_\chi$ に関する表現行列とする．$m_\chi = \mathrm{rk}_{\mathcal{O}}(\mathcal{L}) = \dim_{Q(\mathcal{O})}(V)$ と置くと，$A_{\gamma,\chi} \in \mathrm{GL}_{m_\chi}(\mathcal{O})$ である．Theorem 2.14 より，

$$G_{\chi^{-1}\omega}(t) = \det((t+1)I_{m_{\chi^{-1}\omega}} - A_{\gamma,\chi^{-1}\omega})$$

が成り立つ．$\mathbf{x}_\chi^* \subset (e_\chi V)^*$ を $\mathbf{x}_\chi$ の双対基底とする．$\mathcal{O}[G][[\Gamma]]$-加群として $e_\chi(V^*(1)) = (e_{\chi^{-1}\omega}V)^*$ が成り立つから，$\mathfrak{m}_\gamma$ の $\mathbf{x}_\chi^* \subset V^*$ に関する表現行列は $c_p(\gamma)\cdot {}^t(A^{-1}_{\gamma,\chi^{-1}\omega})$ と計算できる ($V(1)^*$ への作用は 2.2 小節で述べた通りである．V^* への作用は contravariant な作用を定義する；$f \in V^*$, $\sigma \in \mathcal{G}\, x \in V$ に対して $(\sigma f)(x) := f(\sigma^{-1}x)$)．ゆえに，

$$\begin{aligned}
&\chi(\det_{Q(\mathcal{O})[G]^-}((t+1)-\mathfrak{m}_\gamma \mid (\mathfrak{X}_S^+)^*(1)\otimes_{\mathbb{Z}_p} Q(\mathcal{O})))\\
&= \det_{Q(\mathcal{O})}((t+1)-\mathfrak{m}_\gamma \mid e_\chi(V^*(1))\\
&= \det_{Q(\mathcal{O})}((t+1)-\mathfrak{m}_\gamma \mid (e_{\chi^{-1}\omega}V)^*)\\
&= \det((t+1)I_{m_{\chi^{-1}\omega}} - c_p(\gamma)\cdot {}^t(A^{-1}_{\gamma,\chi^{-1}\omega}))\\
&\sim \det(c_p(\gamma)(t+1)^{-1}I_{m_{\chi^{-1}\omega}} - A_{\gamma,\chi^{-1}\omega})\\
&= G_{\chi^{-1}\omega,\,S}(u(1+t)^{-1}-1)
\end{aligned}$$

□

Remark 2.23. $(T_p(\mathcal{M})^-)^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(T_p(\mathcal{M})^-,\,\mathbb{Z}_p)$ に covariant な $\mathcal{G}$-作用を定義する；$f \in (T_p(\mathcal{M})^-)^*$, $\sigma \in \mathcal{G}$, $x \in T_p(\mathcal{M})^-$ に対して $\sigma f(x) := f(\sigma x)$．Proposition 2.18 を考慮しつつ，上の証明の計算と同様に双対基底による表現行列を計算することで次の等号を得る (上の証明の中の V^* とは違って covariant な Galois 作用を考えていることに注意).

$$\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[[\mathcal{G}]]^-}((T_p(\mathcal{M})^-)^*) = \mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[[\mathcal{G}]]^-}(T_p(\mathcal{M})^-).$$

(その 1)〜(その 3) で得られた結果を考慮しつつ，(2.7) の両辺の χ による像を考えて $\mathcal{O}[[t]]$ の中で

$$H_{\chi^{-1}\omega,\,S}(u(1+t)^{-1}-1)\chi(F) \sim \chi(\delta_T^{(\infty)})G_{\chi^{-1}\omega,\,S}(u(1+t)^{-1}-1)$$

を得る．従って (2.6) より

$$\chi(F) \sim \chi(\Theta)$$

を得る．F は $\mathbb{Z}_p[G]^-[[t]]$ の monic な多項式であるから，任意の (奇) 指標 $\chi \in \widehat{G}$ に対して $\mu(\chi(F)) = 0$ が成り立つ．また (その 1)〜(その 3) で示したことより任意の奇指標 $\chi \in \widehat{G}$ に対して $\mu(\chi(\Theta)) = 0$ が従う．よって Corollary 2.19 より，$\mathbb{Z}_p[G]^-[[t]]$ の中で

$$F \sim \Theta$$

が成り立つ． □

参考文献

[1] Dasgupta, S., Stark's Conjectues, bachelor thesis, 1999.

[2] Deligne, P., *Théorie de Hodge. III*, Publ. Math. IHES 44 (1974), 5-77.

[3] Deligne, P., Ribet, K., Values of abelian L-functions at negative integers over totally real fields, Invent. math. **59** (1980), 227-286.

[4] Greither, C., Some cases of Brumer's conjecture for abelian CM extensions of totally real fields, Math. Zeitschrift **233** (2000), 515-534.

[5] Greither, C., Computing Fitting ideals of Iwasawa modules, Math. Zeitschrift **246** (2004), 733-767.

[6] Greither, C., Arithmetic annihilators and Stark-type conjectures, *Stark's conjectures: Recent Work and New Directions*, Contemporary Math. **358** (2004), 55-78.

[7] Greither, C., Determining Fitting ideals of minus class groups via the equivariant Tamagawa number conjecture, Compositio Math. **143** (2007), 1399-1426.

[8] Greither, C., Kurihara, M., Stickelberger elements, Fitting ideals of class groups of CM fields, and dualisation, Math. Zeitschrift **260** (2008), 905-930.

[9] Greither, C., Popescu, C., The Galois module structure of l-adic realizations of Picard 1-motives and applications, Intl. Math. Res. Notices **2012** (2012), 986-1036.

[10] Greither, C., Popescu, C., Fitting ideals of l-adic realizations of Picard 1-motives and class groups of global function fiels, Jour. für die Reine und Angew. Math. **675** (2013), 223-247.

[11] Greither, C., Popescu, C., An Equivariant Main Conjecture in Iwasawa Theory and Applications, to appear in Journal of Algebraic Geometry.

[12] Greither, C., Roblot, X.-F., Tangedal, A., The Brumer-Stark conjecture in some families of extensions of specific degree, Math. Comp. **73** (2004), no. 245, 297-315.

[13] Hayes, D., Stickelberger elements in function fields, Compositio Math., **55** (1985), 209-239.

[14] Iwasawa, K., On $\mathbb{Z}_l$-extensions of algebraic number fields, Ann. of Math., **98** (2) (1973), 246-326.

[15] Iwasawa, K., Riemann-Hurwitz formula and p-adic Galois representations for number fields, Tôhoku math. J. (2), **33** (2) (1981), 263-288.

[16] Kida, Y., l-extensions of CM-fields and cyclotomic invariants, J. Number Theory, **12** (4) (1980), 519-528.

[17] Kurihara, M., Iwasawa theory and Fitting ideals, J. Reine Angew. Math. **561** (2003), 39-86.

[18] Kurihara, M., On stronger versions of Brumer's conjecture, Tokyo Journal of Math. **34** (2011), 407-428.

[19] Kurihara, M., Miura, T., Stickelberger ideals and Fitting ideals of class groups for abelian number fields, Math. Annalen. **350** (2011), 549-575.

[20] Kurihara, M., Miura, T., Ideal class groups of CM-fields with non-cyclic Galois action, Tokyo Journal of Math. **35** (2012), 411-439.

[21] Mazur, B., Wiles, A., Class fields of abelian extensions of $\mathbf{Q}$, Invent. math. **76** (1984), 179-330.

[22] Nickel, A., On the equivariant Tamagawa number conjecture in tame CM-extensions, Math. Zeitschrift **268** (2011), 1-35.

[23] Nickel, A., On the equivariant Tamagawa number conjecture in tame CM-extensions, II., Compos. Math. **147** (2011), 1179-1204.

[24] Neukirch, J., Schmidt, A., Wingberg, K., *Cohomology of Number Fields (2nd edition)*, Springer-Verlag, 2008.

[25] Northcott, D. G., *Finite free resolutions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge New York 1976.

[26] Popescu, C., On the Coates-Sinnott conjecture, Mathematische Nachrichten, **282** (2009), 1370-1390.

[27] Popescu, C., Integral and p-adic refinements of the abelian Stark conjecture, In *The Arithmetic of L-functions*, The IAS-Park City Math. Series, Vol.18 The American Math. Society, 2011. Popescu, C., Rubin, K., Silverberg, A., editors.

[28] Sands, J. W., Galois groups of exponent two and the Brumer-Stark conjecture, J. Reine Angew. Math. **349** (1984), 129-135.

[29] Serre, J.-P., *Corps Locaux*, Hermann, Paris 1968 (troisième édition).

[30] Stickelberger, L., Über eine Verallgemeinerung der Kreistheilung, Math. Annalen **37** (1890), 321-367.

[31] Tate J., *Les conjectures de Stark sur les Fonctions L d'Artin en $s = 0$*, Progress in Math. 47, Birkhäuser 1984.

[32] Washington, L., *Introduction to cyclotomic fields*, Graduate Texts in Math. 83, Springer-Verlag 1982.

[33] Wiles, A., The Iwasawa conjecture for totally real fields, Ann. of Math. **131** (1990), 493-540.

[34] Wiles, A., On a conjecture of Brumer, Ann. of Math. **131** (1990), 555-565.

[35] Wingberg, K., Duality theorems for Γ-extensions of algebraic number fields, Compos. Math. **55** (1985), 333-381.