非可換 Brumer 予想と非可換 Brumer-Stark 予想

野村 次郎

1 序文

本稿では Andreas Nickel によって定式化された非可換 Brumer 予想と非可換 Brumer-Stark 予想の概説を行う. 本稿における最も重要な目的は「非可換 Brumer 予想と非可換 Brumer-Stark 予想の定式化に納得する」ということであり, その手助けになるように具体例をふんだんに取り入れた. 採用した具体例にはそれぞれ意味があり, 予想の定式化の中に登場する見慣れない集合の必要性を訴えるために利用される. また, 本稿はいわゆる「予稿」であるため, 本文の中には無数の誤植, 間違い, 奇妙な文章が見受けられることと予想されるが, 報告集になる際にはそれが有限個になる最大限の努力をするつもりであるので, この場ではご容赦願いたい.

記号

- 任意の環 A に対して, $\zeta(A)=\{x\in A \mid xy=yx \forall y\in A\}$($A$ の中心).
- 任意の有限群 G に対して, G の既約指標 ($\mathbb{C}$-valued な既約指標) 全体の集合を $\operatorname{Irr} G$ で表す.
- 代数体 K に対して K のイデアル類群を $Cl(K)$ で表す.
- 代数体 K に含まれる 1 の冪根全体の集合を $\mu(K)$ とする.

2 準備

この節においては, 予想の定式化に必要となる代数的な準備, 特に, 有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の群環の性質についてのまとめを行う. 2.1 節においては. $\mathbb{Q}[G]$ の構造とその冪等元について, 2.2 においては $\mathbb{Q}[G]$ 上の被約ノルムについての基本事項をまとめることとする.

2.1 群環 $\mathbb{Q}[G]$ の構造と冪等元

$\mathbb{C}$ の中での有理数体 $\mathbb{Q}$ の代数閉包 $\overline{\mathbb{Q}}$ を一つ固定する. G の既約指標 χ に対して,

$$e_\chi := \frac{\chi(1)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma^{-1})\sigma \in \overline{\mathbb{Q}}[G]$$

と置くと, e_χ は次の性質を満たす.

性質 1.

1. $e_\chi \in \zeta(\overline{\mathbb{Q}}[G])$
2. $e_\chi^2 = e_\chi$,
3. $\sum_{\chi\in\operatorname{Irr} G} e_\chi = 1$,
4. $e_\chi e_\psi = 0,\ \chi,\ \psi\in\operatorname{Irr} G$ かつ $\chi\neq\psi$.

この冪等元を用いて $\overline{\mathbb{Q}}[G]$ の Wederbburn 分解

$$\overline{\mathbb{Q}}[G] = \bigoplus_{\chi\in\mathrm{Irr}\,G} \overline{\mathbb{Q}}[G]e_\chi \cong \bigoplus_{\chi\in\mathrm{Irr}\,G} M_{\chi(1)}(\overline{\mathbb{Q}}).$$

を得る. 最後の同型は

$$\sum_{\sigma\in G} \alpha_\sigma\sigma \longmapsto \sum_{\sigma\in G} \alpha_\sigma\rho_\chi(\sigma)$$

で与えられる (ρ_χ は指標 χ に対応する G の行列表現とする). 同様にすると,

$$\zeta(\overline{\mathbb{Q}}[G]) = \bigoplus_{\chi\in\mathrm{Irr}\,G} \zeta(\overline{\mathbb{Q}}[G])e_\chi \cong \bigoplus_{\chi\in\mathrm{Irr}\,G} \overline{\mathbb{Q}}. \tag{1}$$

を得る. さて, $\overline{\mathbb{Q}}[G]$ には $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ が係数に作用するので, その作用に関する不変部分が $\mathbb{Q}[G]$ に一致する. したがって, (1) と合わせると,

$$\zeta(\mathbb{Q}[G]) \cong \bigoplus_{\chi\in\mathrm{Irr}\,G/\sim} \mathbb{Q}(\chi). \tag{2}$$

を得る. 具体的な元の対応は,

$$\zeta(\overline{\mathbb{Q}}[G]) \ni \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}\,G/\sim}\ \sum_{\sigma\in\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\chi)/\mathbb{Q})} \alpha_\chi^\sigma e_{\chi^\sigma} \longleftrightarrow (\alpha_\chi)_\chi \in \bigoplus_{\chi\in\mathrm{Irr}\,G/\sim} \mathbb{Q}(\chi)$$

で与えられる. また, $\mathbb{Q}[G]$ や $\zeta(\mathbb{Q}[G])$ の直接的な Wederbburn 分解は

$$\mathbb{Q}[G] = \bigoplus_{\chi\in\mathrm{Irr}\,G/\sim} \mathbb{Q}[G]e_{[\chi]},\ \zeta(\mathbb{Q}[G]) = \bigoplus_{\chi\in\mathrm{Irr}\,G/\sim} \zeta(\mathbb{Q}[G])e_{[\chi]}$$

で与えられる. ただしここで,

$$e_{[\chi]} := \sum_{\sigma\in\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\chi)/\mathbb{Q})} e_{\chi^\sigma}$$

である.

2.2 被約ノルム

この小節においては, 群環 $\mathbb{Q}[G]$ の被約ノルムについてのまとめを行う.

2.2.1 被約ノルムの定義

まず, 群環 $\overline{\mathbb{Q}}[G]$ の被約ノルムを次で定義する.

定義 1. $\overline{\mathbb{Q}}[G]$ 上の合成写像

$$\mathrm{nr}_{\overline{\mathbb{Q}}[G]} : \overline{\mathbb{Q}}[G] \xrightarrow{\otimes\rho_\chi} \bigoplus_{\chi\in\mathrm{Irr}\,G} M_{\chi(1)}(\overline{\mathbb{Q}}) \xrightarrow{\oplus\det} \bigoplus_{\chi\in\mathrm{Irr}\,G} \overline{\mathbb{Q}} \cong \zeta(\overline{\mathbb{Q}}[G])$$

を $\overline{\mathbb{Q}}[G]$ の被約ノルムと呼ぶ.

被約ノルムの定義から G がアーベル群の時には, $\mathrm{nr}_{\overline{\mathbb{Q}}[G]}$ は $\overline{\mathbb{Q}}[G]$ 上の恒等写像となる (すべての既約表現が 1 次元であるので, 2 番目の写像において行列式が恒等写像となる). さて, 群環 $\mathbb{Q}[\mathbb{G}]$ について, 次の合成写像を考える.

$$\mathrm{nr} : \mathbb{Q}[G] \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}[G] \xrightarrow{\mathrm{nr}_{\overline{\mathbb{Q}}[G]}} \zeta(\overline{\mathbb{Q}}[G]).$$

この時, 次が成り立つ.

命題 1.

$$\mathrm{nr}(\mathbb{Q}[G]) \subset \zeta(\mathbb{Q}[G]).$$

証明. 省略. □

この命題により, $\mathbb{Q}[G]$ の被約ノルムを次で定義することができる.

定義 2.

$$\mathrm{nr} : \mathbb{Q}[G] \to \zeta(\mathbb{Q}[G])$$

を $\mathbb{Q}[G]$ の被約ノルムと呼ぶ.

$\overline{\mathbb{Q}}[G]$ 上の行列環 $M_n(\overline{\mathbb{Q}}[G])$ についても, 合成写像

$$M_n(\overline{\mathbb{Q}}[G]) \xrightarrow{\otimes \rho_\chi} \bigoplus_{\chi \in \mathrm{Irr}\, G} M_{n\chi(1)}(\overline{\mathbb{Q}}) \xrightarrow{\oplus \det} \bigoplus_{\chi \in \mathrm{Irr}\, G} \overline{\mathbb{Q}} \cong \zeta(\overline{\mathbb{Q}}[G])$$

を被約ノルムと呼び, 同じく $\mathrm{nr}_{\overline{\mathbb{Q}}[G]}$ で表すことにする. 行列環上の被約ノルムは G がアーベル群の時には, 通常の行列式となる. $\mathbb{Q}[G]$ 上の行列環についても, 合成写像

$$M_n(\mathbb{Q}[G]) \hookrightarrow M_n(\overline{\mathbb{Q}}[G]) \xrightarrow{\mathrm{nr}_{\overline{\mathbb{Q}}[G]}} \zeta(\overline{\mathbb{Q}}[G])$$

を記号 nr で表すことにすると, $\mathbb{Q}[G]$ 上の被約ノルムと同様に, $\mathrm{nr}(M_n(\mathbb{Q}[G])) \subset \zeta(\mathbb{Q}[G])$ が成立する. ここでは被約ノルムを定義するために $\overline{\mathbb{Q}}[G]$ を経由したが, 実際には G の既約表現のすべてを実現するような体まで係数拡大すれば十分であり, 被約ノルムはそのような体の取り方に依存しないということが証明できる. [CR, §7D]

2.2.2 $\mathbb{Z}[G]$ 上の被約ノルム

さて, $\mathbb{Q}[G]$ 上の被約ノルムの定義ができたのだが, ここでは被約ノルムによる $\mathbb{Z}[G]$ の像について考察する. 任意の既約指標 χ に対して, 表現空間の基底を適当に取ると

$$\rho_\chi(G) \subset GL_n(\overline{\mathbb{Z}}),\ \overline{\mathbb{Z}} \text{ は } \overline{\mathbb{Q}} \text{ の整数環}$$

と出来るので, $\mathbb{Z}[\chi]$ を $\mathbb{Q}(\chi)$ の整数環とすると

$$\mathrm{nr}(\mathbb{Z}[G]) \subset \bigoplus_{\chi \in \mathrm{Irr}\, G/\sim} \mathbb{Z}(\chi) \subset \bigoplus_{\chi \in \mathrm{Irr}\, G/\sim} \mathbb{Q}(\chi) \cong \zeta(\mathbb{Q}[G])$$

となることまでは直ちに分かる. しかしながら, $\zeta(\mathbb{Z}[G]) \subsetneq \bigoplus_{\chi \in \mathrm{Irr}\, G/\sim} \mathbb{Z}[\chi]$ であるので, $\mathrm{nr}(\mathbb{Z}[G]) \subset \zeta(\mathbb{Z}[G])$ が成立するかどうかはわからないし, 次に示す具体例により, 実際に $\mathrm{nr}(\mathbb{Z}[G]) \not\subset \zeta(\mathbb{Z}[G])$ となることが分かる.

$\mathfrak{S}_3 = \langle \sigma,\ \tau \mid \sigma^3 = \tau^2 = 1,\ \tau\sigma\tau = \sigma^{-1} \rangle$ を 3 次対称群とし, $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathfrak{S}_3$(これは位数 12 の 2 面体群と同型である) の場合に

$$\alpha = 2(-\mathrm{id} + \sigma + \sigma^2 - \tau + \sigma\tau - \sigma^2\tau + j - \sigma j - \sigma^2 j + \tau j - \sigma\tau j + \sigma^2\tau j) \in \mathbb{Z}[G]$$

の被約ノルムを計算する. 被約ノルムを計算するには G の既約表現を決定する必要がある. 天下り的ではあるが, G の既約表現は以下で尽くされる事がわかる.

$$\begin{aligned}
\rho_{\chi_1} &: \ \sigma \mapsto 1,\ \tau \mapsto 1,\ j \mapsto 1 \\
\rho_{\chi_2} &: \ \sigma \mapsto 1,\ \tau \mapsto 1,\ j \mapsto -1 \\
\rho_{\chi_3} &: \ \sigma \mapsto 1,\ \tau \mapsto -1,\ j \mapsto 1 \\
\rho_{\chi_4} &: \ \sigma \mapsto 1,\ \tau \mapsto -1,\ j \mapsto 1 \\
\rho_{\chi_5} &: \ \sigma \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ \tau \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ j \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\rho_{\chi_6} &: \ \sigma \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ \tau \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ j \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

したがって,

$$\mathbb{Q}[G] = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus M_2(\mathbb{Q}) \oplus M_2(\mathbb{Q})$$

を得る. この分解を用いて, 被約ノルムを計算すると

$$\begin{aligned} \alpha &\longmapsto (0,\ 0,\ 0,\ 8, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & 8 \\ 8 & -8 \end{pmatrix})(\text{指標成分に分解}) \\ &\longmapsto (0,\ 0,\ 0,\ 8,\ 0,\ 0)(\text{行列式をとる}) \\ &\longmapsto \frac{2}{3}(\mathrm{id} + \sigma + \sigma^2 - \tau - \sigma\tau - \sigma^2\tau - j - \sigma j - \sigma^2 j + \tau j + \sigma\tau j + \sigma^2\tau j) \end{aligned}$$

を得る. 最後の対応は, $\beta := \sum_{h \in G} \beta_h h \in \mathbb{Q}[G]$ に対して

$$(\rho_{\chi_1}(\beta),\ \rho_{\chi_2}(\beta),\ \rho_{\chi_3}(\beta),\ \rho_{\chi_4}(\beta),\ \rho_{\chi_5}(\beta),\ \rho_{\chi_6}(\beta)) = (0,\ 0,\ 0,\ 8,\ 0,\ 0)$$

なる方程式を立てることで得られる (未知数 12 に対して 12 本の方程式が立つので解を見つけることは人智をもって可能である, 私は Mathematica を使いました). さて, この具体的な計算から $\mathrm{nr}(\alpha) \notin \zeta(\mathbb{Z}[G])$ したがって, $\mathrm{nr}(\mathbb{Z}[G]) \not\subset \zeta(\mathbb{Z}[G])$ となることが分かった. しかしながら, $\mathbb{Z}[G]$ の被約ノルムが必ず $\mathbb{Z}[G]$ の中心からずれるというわけではない. 実際に

$$\alpha := 3(-\mathrm{id} + \sigma + \sigma^2 - \tau + \sigma\tau - \sigma^2\tau + j - \sigma j - \sigma^2 j + \tau j - \sigma\tau j + \sigma^2\tau j)$$

と置くと

$$\mathrm{nr}(\alpha) = \mathrm{id} + \sigma + \sigma^2 - \tau - \sigma\tau - \sigma^2\tau - j - \sigma j - \sigma^2 j + \tau j + \sigma\tau j + \sigma^2\tau j$$

となり $\mathbb{Z}[G]$ の元となっている.

前段での具体的な計算により, $\mathbb{Z}[G]$ 上の被約ノルムは一般には $\mathbb{Z}[G]$ の中心には戻ってこないことが分かったが, 前前段での考察により $\mathbb{Z}[G]$ の被約ノルムは一般に

$$\bigoplus_{\chi \in \mathrm{Irr}\, G/\sim} \mathbb{Z}(\chi)$$

に含まれていることは分かっている. この環についての考察をすることで, この小節を終えることにする. その為に次の二つの概念を定義する.

定義 3. $\mathbb{Q}[G]$ の部分環 Λ が

- $\mathbb{Z} \subset \Lambda$,
- Λ は有限生成 $\mathbb{Z}$-加群,
- $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda = \mathbb{Q}[G]$,

を満たす時, Λ を $\mathbb{Q}[G]$ の $\mathbb{Z}$-*order* と呼ぶ.

定義 4.
$\mathbb{Q}[G]$ に含まれる $\mathbb{Z}$-*order* で包含関係について極大であるものを *maximal* $\mathbb{Z}$-*order* と呼ぶ.

この maximal $\mathbb{Z}$-order について, 次のことが成り立つ.

命題 2 ([CR], Proposition 26.7)**.**
$\bigoplus_{\chi \in \mathrm{Irr}\, G/\sim} \mathbb{Z}[\chi]$ は $\zeta(\mathbb{Q}[G])$ に含まれる唯一つの *maximal* $\mathbb{Z}$-*order* である.

この事実を用いると次の命題を示すことができる.

命題 3. $\mathfrak{M}(G)$ を $\mathbb{Q}[G]$ に含まれ $\mathbb{Z}[G]$ を含むような *maximal order* とすると

$$\zeta(\mathfrak{M}(G)) = \bigoplus_{\chi \in \mathrm{Irr}\, G/\sim} \mathbb{Z}[\chi]$$

注意 1. 一般に *maximal order* $\mathfrak{M}(G)$ のとり方は一意的ではないが, この命題によりその中心は一意に決まることが分かる.

証明. まず初めに $\zeta(\mathfrak{M}(G))$ が $\zeta(\mathbb{Q}[G])$ に含まれる $\mathbb{Z}$-order であることを示す. $\zeta(\mathfrak{M}(G))$ が $\zeta(\mathbb{Q}[G])$ の部分環であることと, $\mathbb{Z}$ 上有限生成であることは明らかである. また $\mathfrak{M}(G)$ のとり方から, $\zeta(\mathbb{Z}[G]) \subset \zeta(\mathfrak{M}(G) \subset \zeta(\mathbb{Q}[G])$ となるので $\mathbb{Q} \otimes \zeta(\mathfrak{M}(G)) = \zeta(\mathbb{Q}[G])$ が成立する. したがって, $\zeta(\mathfrak{M}(G))$ は $\zeta(\mathbb{Q}[G])$ に含まれる $\mathbb{Z}$-order であることが分かる. この事実と命題 2 より, $\zeta(\mathfrak{M}(G)) \subset \bigoplus_{\chi \in \operatorname{Irr} G/\sim} \mathbb{Z}[\chi]$. 逆の包含は背理法によって示す. $\bigoplus_{\chi \in \operatorname{Irr} G/\sim} \mathbb{Z}[\chi] \not\subset \zeta(\mathfrak{M}(G))$ と仮定すると, $(\bigoplus_{\chi \in \operatorname{Irr} G/\sim} \mathbb{Z}[\chi]) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathfrak{M}(G)$ は $\mathbb{Q}[G]$ に含まれ, $\bigoplus_{\chi \in \operatorname{Irr} G/\sim} \mathbb{Z}[\chi]$ と $\mathfrak{M}(G)$ を含むような $\mathbb{Z}$-order である. しかし, これは $\mathfrak{M}(G)$ の極大性に矛盾. よって $\bigoplus_{\chi \in \operatorname{Irr} G/\sim} \mathbb{Z}[\chi] \subset \zeta(\mathfrak{M}(G))$ □

2.3 余因子行列の非可換類似

可換環上の行列には様々なところで役に立つ余因子行列というものが存在していたが, この小節ではその余因子行列の非可換環上の行列での類似を考える.

前小節で定義した, maximal order は群環 $\mathbb{Z}[G]$ に比べて非常に扱いやすい対象であり, 様々な「良い」性質を持っている. その中でも重要な性質の一つが次の定理で主張されている性質である.

定理 1 ([CR], Theorem 26.20)**.** $\mathfrak{M}(G)$ を $\mathbb{Z}[G]$ を含み $\mathbb{Q}[G]$ に含まれるような *maximal order* とすると,

$$\mathfrak{M}(G) = \bigoplus_{\chi \in \operatorname{Irr} G/\sim} \mathfrak{M}(G) e_{[\chi]}$$

が成立する.

$H \in M_n(\mathbb{Z}[G])$ を, $M_n(\mathfrak{M}(G))$ の元とみなして

$$H = \oplus_{\chi \in \operatorname{Irr} G/\sim} H_\chi \in \bigoplus_{\chi \in \operatorname{Irr} G/\sim} M_n(\mathfrak{M}(G) e_{[\chi]}) = M_n(\mathfrak{M}(G))$$

と分解する. この時, H_χ の被約特性多項式 $f_{H_\chi}(X)$ を

$$f_{H_\chi}(X) := \det_{\mathbb{C}}(X - H_\chi \mid V_\chi^{\oplus n})$$

で定義する. また, この特性多項式を

$$f_{H_\chi}(X) = \sum_{j=0}^{n\chi(1)} a_{\chi,j} X^j$$

と書くことにする. この時, 次が成り立つ.

命題 4. 任意の $\chi \in \operatorname{Irr} G$ に対して,

- $a_{\chi,j} \in \mathbb{Z}(\chi),\ j \in \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n\chi(1)\}$
- $a_{\chi,0} = (-1)^{n\chi(1)} \operatorname{nr}(H) e_{[\chi]}$

注意 2. 本稿では被約ノルムを定義した後に被約特性多項式を定義したが, 通常は半単純環の単純成分ごとの被約特性多項式の定数項を用いて単純成分の被約ノルムを定義し, それを張り合わせる事によって全体の被約ノルムを定義する.

$\chi \in \operatorname{Irr} G$ に対して,

$$H_\chi^* := (-1)^{n\chi(1)+1} \sum_{j=1}^{n\chi(1)} \alpha_{\chi,j} H^{j-1}$$

とおくと ($f_{H_\chi}(H_\chi) = 0$ より)

$$H_\chi H_\chi^* = H_\chi^* H_\chi = (-1)^{n\chi(1)+1} \sum_{j=1}^{n\chi(1)} \alpha_{\chi,j} H^j = (-1)^{n\chi(1)+1}(-\alpha_{\chi,0}) = \operatorname{nr}(H) e_{[\chi]}$$

が成立する. したがって

$$H^* := \oplus_{\chi \in \mathrm{Irr}\, G/\sim} H^*_\chi$$

と定義すると

$$HH^* = H^*H = \mathrm{nr}(H)1_n$$

が成立する. ここで, 1_n は n 次の単位行列である. また, 命題 4(の最初の主張) によって, $H^* \in \mathfrak{M}(G)$ となることが分かる. ここで定義した H^* を H の**一般余因子行列 (generalized adjoint matrix)** とよぶ. H^* は Andreas Nickel[Ni10a] によって初めてに導入されたものである (同じく Nickel によって定義された非可換 Fitting invariant から加群の annihilator を作る時に本質的に利用される集合である). しかしながら, Nickel による定義は G がアーベルである場合には余因子行列とは一致しないような定義であった. ここで紹介した定義は Johnston-Nickel[JN] で導入されたものであり, この定義に従うと G がアーベルである場合には, きちんと余因子行列を返してくれる (二つの定義は H が $\mathbb{Q}[G]$ 上可逆である場合には一致する).

さて, 命題 4 を考慮すると, $\mathbb{Z}[G]$ 上の被約ノルムが $\mathbb{Z}[G]$ の中心からずれてしまう原因の一つとして「H^* の係数が $\mathbb{Z}[G]$ からずれてしまう」ということがあげられることが分かる. そこで

$$\mathcal{H}(G) := \{x \in \zeta(\mathbb{Z}[G]) \mid xH^* \in M_n(\mathbb{Z}[G]),\ \forall H \in M_n(\mathbb{Z}[G]),\ \forall n \in \mathbb{N}\}$$

なる集合を定義する. すると,$\mathcal{H}(G)$ の定義から, 任意の $H \in M_n(\mathbb{Z}[G])$ と任意の $x \in \mathcal{H}(G)$ に対して,

$$xHH^* = HxH^* = x\,\mathrm{nr}(H) \cdot 1_n \in M_n(\mathbb{Z}[G]).$$

したがって,

$$x\,\mathrm{nr}(H) \in \zeta(\mathbb{Z}[G])$$

が成立する. つまり, $\mathcal{H}(G)$ は一度は $\mathbb{Z}[G]$ から外れてしまった被約ノルムを再び $\mathbb{Z}[G]$ に引き戻してくるような元の集合と見なすことができる. 明らかに $0 \in \mathcal{H}(G)$ である. では, 非自明な元は存在するのであろうか, つまり, $\mathcal{H}(G) \neq \{0\}$ であろうか？答えは「Yes」である. その事実を確認するために, 集合 $\mathfrak{F}(G)$ を

$$\mathfrak{F}(G) := \{x \in \zeta(\mathbb{Z}[G]) \mid x\mathfrak{M}(G) \subset \mathbb{Z}[G]\}$$

で定義する. この時, $\mathfrak{F}(G) \subset \mathcal{H}(G)$ であり, 次の定理により $\mathfrak{F}(G) \neq \{0\}$ したがって $\mathcal{H}(G) \neq \{0\}$ であることが分かる.

定理 2 ([Ja], Theorem 3)**.**

$$\mathfrak{F}(G) \cong \bigoplus_{\chi \in \mathrm{Irr}\, G/\sim} \frac{|G|}{\chi(1)} \mathfrak{D}^{-1}(\mathbb{Q}(\chi)/\mathbb{Q})$$

ここで, $\mathfrak{D}^{-1}(\mathbb{Q}(\chi)/\mathbb{Q}) = \{x \in \mathbb{Q}(\chi) \mid \mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}(\chi)/\mathbb{Q}}(x\mathbb{Z}(\chi)) \subset \mathbb{Z}\}$ である.

注意 3. *一般に $\mathfrak{M}(G)$ のとり方は一意的ではないが, この定理により $\mathfrak{F}(G)$ は $\mathfrak{M}(G)$ の取り方によらず定まることが分かる.*

3 予想の定式化

この節においては, アーベル拡大に対する Brumer 予想や Brumer-Stark 予想と比較しながら, 一般の非可換拡大 K/k に対する予想を定式化する. この節を通して, k の有限素点 $\mathfrak{p}$ に対してその上にある K の素点 $\mathfrak{P}$ を一つ固定することにする

3.1 非可換 Brumer 予想

この小節では非可換 Brumer 予想の定式化を行う. まずは次のような対応表を考えることにする.

アーベル拡大	非可換拡大での対応物
Stickelberger 元 ： $\theta_{K/k,\S}$	A
Deligne-Ribet ： $\mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}[G]}(\mu(K))\theta_{K/k,S} \subset \mathbb{Z}[G]$	B
Annihilation ： $\mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}[G]}(\mu(K))\theta_{K/k,S} \subset \mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}[G]}(Cl(K))$	C

表 1: アーベル拡大と非可換拡大との対応表

3.1.1 A について

予想を定式化するためにはまず, 非可換拡大に付随する Stickelber 元を定義しなくてはならないが, 任意の代数体のガロワ拡大には Artin L-関数が対応しているので, それを用いて Stickelberger 元 $\theta_{K/k,S}$ を

$$\theta_{K/k,S} := \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}\, G} L_S(0,\ \overline{\chi},\ K/k) e_\chi \in \mathbb{C}[G]$$

で定義する. ここで, $\theta_{K/k,S}$ の有理性について, 次が成り立つ.

補題 1.

$$\theta_{K/k,S} \in \zeta(\mathbb{Q}[G]).$$

証明. Artin L-関数 $L_S(s,\ \chi,\ K/k)$ の $s = 0$ での零点の位数 $r_S(\chi)$ は

$$r_S(\chi) = \sum_{v \in S} \dim_{\mathbb{C}}(V_\chi^{G_w}) - \dim_{\mathbb{C}}(V_\chi^G)$$

で与えられる. ここで, w は v の上にある K の素点, V_χ は指標 χ を持つ G の表現とする. 今, χ は既約指標であるので, $\dim_{\mathbb{C}}(V_\chi^G) = 0$ を得る. 任意の無限素点 v_∞ に対して, $G_w = \{1,\ j\}$ となるので, もし χ が偶指標であるなら, $r_S(\chi) > 0$ が成立し, $L_S(s,\ \chi,\ K/k) = 0$. χ が奇指標であったとしても, $\dim_{\mathbb{C}}(V_\chi^{G_w}) \geq 1$ なる有限素点 v が存在すれば, 同様に, $L_S(s,\ \chi,\ K/k) = 0$ となる. したがって, この場合は $\theta_{K/k,S} = 0$ となり, 主張は自明である. 一方, $r_S(\chi) = 0$(したがって, $L_S(s,\ \chi,\ K/k) \neq 0$) の場合, Stark 予想より

$$L(0,\ \chi^\sigma,\ K/k) = L(0,\ \chi,\ K/k)^\sigma,\ \forall \sigma \in Aut(\mathbb{C})$$

が成立する. したがって, $L(0,\ \chi,\ K/k) \in \mathbb{Q}(\chi)$ が成立し, さらに (2) の同型の具体的な元の対応を考えると,

$$\theta_{K/k,S} = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}\, G} L_S(0,\ \overline{\chi},\ K/k) e_\chi \in \zeta(\mathbb{Q}[G])$$

が成立する. □

今後 $S = S_\infty \cup S_{ram}$ の場合は $\theta_{K/k,\ S_\infty \cup S_{ram}}$ の代わりに $\theta_{K/k}$ と書くことにする. 以上で A についての考察を終了する.

3.1.2 B について

k の素点の有限集合 $S,\ T$ が 3 条件

- S は k のすべての無限集合と K で分岐するすべての有限素点を含む,
- $S \cap T = \emptyset$,
- K に含まれる任意の非自明な 1 の冪根 ζ に対して, $\zeta \not\equiv 1 \mod \prod_{\mathfrak{P} \in S(K)} \mathfrak{P}$,

を満たすことを $H(S,T)$ と書くことにする. また, 上の主張で「非自明な 1 の冪根 ζ に対して」 の部分を「非自明な 1 の p 冪根 ζ に対して」に取り替えたものが成り立つことを $H_p(S,T)$ と書くことにする. この時, 次が成り立つ.

補題 2. K/k を代数体のガロワ拡大, S を k の素点の有限集合ですべての無限素点とすべての分基礎点を含むものとする. この時,

$$\mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}[G]}(\mu(K)) \quad = \quad {}_{\mathbb{Z}[G]}\langle \prod_{\mathfrak{p}\in T} 1-\phi_{\mathfrak{P}}^{-1}N\mathfrak{p} \mid Hyp(S,T)\rangle$$

が成立する.

注意 4. 主張の等号が成立するということは, 等号の右辺が S の取り方によらないことも主張している.

証明. [Ta84, Lemma 2.4], [Nia, Lemma 2.2] 参照. □

K/k をアーベル拡大 (したがって G はアーベル群) と仮定すると. Lemma 2 より, Deligne-Ribet 結果は

$$「Hyp(S,T)\ \text{となる任意の}\ T\ \text{に対して},\ (\prod_{\mathfrak{p}\in T} 1-\phi_{\mathfrak{p}}^{-1}N\mathfrak{p})\theta_{K/k,S} \in \mathbb{Z}[G]\ 」$$

ということを主張している. ここで, $(\prod_{\mathfrak{p}\in T} 1-\phi_{\mathfrak{p}}^{-1}N\mathfrak{p})\theta_{K/k,S}$ を指標成分に分解して表示すると

$$(\prod_{\mathfrak{p}\in T} 1-\phi_{\mathfrak{p}}^{-1}N\mathfrak{p})\theta_{K/k,S} = \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}\,G}(\prod_{\mathfrak{p}\in T} 1-\chi(\phi_{\mathfrak{p}}^{-1})N\mathfrak{p})L_S(0,\ \overline{\chi},\ K/k)e_{\chi}$$

となっている. 今, G はアーベル群であるので (したがって指標はすべて 1 次元であるので),

$$(\prod_{\mathfrak{p}\in T} 1-\phi_{\mathfrak{p}}^{-1}N\mathfrak{p})\theta_{K/k,S} = \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}\,G}\prod_{\mathfrak{p}\in T}\det(1-\phi_{\mathfrak{p}}^{-1}N\mathfrak{p} \mid V_{\chi})L_S(0,\ \overline{\chi},\ K/k)e_{\chi} \tag{3}$$

と表示することもできる. しかも, この表示は G がアーベル群でなくても可能である. さらに踏み込むと,

$$\begin{aligned}(3)\ \text{の右辺} \quad &= \quad (\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}\,G}\prod_{\mathfrak{p}\in T}\det(1-\phi_{\mathfrak{p}}^{-1}N\mathfrak{p} \mid V_{\chi})e_{\chi})\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}\,G} L_S(0,\ \overline{\chi},\ K/k)e_{\chi} \\ &= \quad \mathrm{nr}(\prod_{\mathfrak{p}\in T} 1-\phi_{\mathfrak{p}}^{-1}N\mathfrak{p})\theta_{K/k,S} \end{aligned} \tag{4}$$

なる等式を得る. ここから一般のガロワ拡大に話を戻す. (4) をヒントにして, 次の $\zeta(\mathbb{Z}[G])$ 上の加群を定義する.

定義 5.

$$\mathfrak{A}_S := \langle \mathrm{nr}((\prod_{\mathfrak{p}\in T} 1-\phi_{\mathfrak{P}}^{-1}N\mathfrak{p}) \mid H(S,T).\ \rangle_{\zeta(\mathbb{Z}[G])}$$

注意 5.

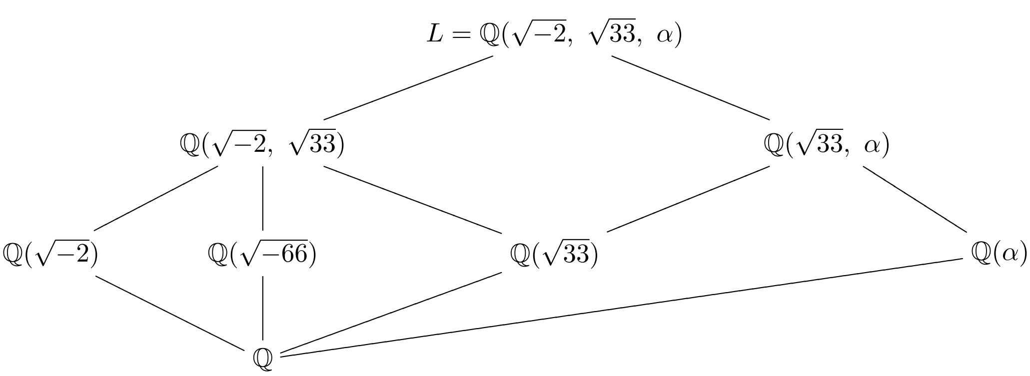
1. K/k がアーベル拡大なら, 被約ノルムは恒等写像であるので *Lemma 2* より $\mathfrak{A}_S = \mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}[G]}(\mu(K))$ となる.
2. K/k が非可換拡大である場合は, $\mathfrak{A}_S$ は S によるかもしれないしよらないかもしれない.

この加群 $\mathfrak{A}_S$ を用いて, Stickelberger イデアル $\mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}[G]}(\mu(K))\theta_{K/k,S}$ の非可換拡大での対応物を

$$\mathfrak{A}_S\theta_{K/k,S}$$

と考えることにする. 問題は「この加群がどのような集合に含まれるか」ということであるが, 具体例を用いて考察することにする.

次の拡大を考える,



ここで, α は $x^3-9x+3=0$ の根である. また,

$$G=\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})\cong\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{-2})/\mathbb{Q})\times\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{33},\ \alpha)/\mathbb{Q})\cong\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathfrak{S}_3$$

であることが分かり, $L/\mathbb{Q}$ は非可換なガロワ CM-拡大となる. この拡大に対して $\theta_{L/\mathbb{Q},\ S_\infty\cup S_{ram}}$ を計算する. 各 $\chi\in\mathrm{Irr}\,G$ に対して

$$\epsilon_\chi:=\lim_{s\to 0}\prod_{\mathfrak{p}\in S_{ram}}\det(1-\phi_{\mathfrak{P}}N\mathfrak{p}^{-s}\mid V_\chi^{I_{\mathfrak{P}}})$$

と置くと

$$\theta_{L/\mathbb{Q}}=\epsilon_{\chi_2}L_{S_\infty}(0,\ \chi_2,\ L/\mathbb{Q})e_{\chi_2}+\epsilon_{\chi_4}L_{S_\infty}(0,\ \chi_4,\ L/\mathbb{Q})e_{\chi_4}+\epsilon_{\chi_6}L_{S_\infty}(0,\ \chi_6,\ L/\mathbb{Q})e_{\chi_6}$$

であるので, $L_{S_\infty}(0,\ \chi_i,\ L/\mathbb{Q}),\ i\in 2,\ 4,\ 6$ の値がわかれば良いことになるが, Artin L-function の性質により

$$L_{S_\infty}(0,\ \chi_2,\ L/\mathbb{Q})=L_{S_\infty}(0,\ \chi_2',\ L^{\ker\chi_2}/\mathbb{Q})=L_{S_\infty}(0,\ \chi_2',\ \mathbb{Q}(\sqrt{-2})/\mathbb{Q})$$
$$L_{S_\infty}(0,\ \chi_4,\ L/\mathbb{Q})=L_{S_\infty}(0,\ \chi_4',\ L^{\ker\chi_4}/\mathbb{Q})=L_{S_\infty}(0,\ \chi_4',\ \mathbb{Q}(\sqrt{-66})/\mathbb{Q})$$

が分かる. ここで χ_2' と χ_4' はそれぞれ $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{-2})/\mathbb{Q})$ と $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{-66})/\mathbb{Q})$ の指標でその $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ への inflation が χ_2 と χ_4 になるようなものである. また $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}(\sqrt{33}))=\langle\sigma j\rangle$ の指標 ϕ を

$$\phi:\sigma\mapsto\zeta_3,\ j\mapsto -1$$

で定義すると

$$\mathrm{Ind}^G_{\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}(\sqrt{33}))}=\chi_6$$

となるので, 再び Artin L-function の性質により

$$L_{S_\infty}(0,\ \chi_6,\ L/\mathbb{Q})=L_{S_\infty}(0,\ \phi,\ L/\mathbb{Q}(\sqrt{33}))$$

となることが分かる. 以上のことから $\theta_{L/\mathbb{Q},S_\infty}$ の値を知るには $L_{S_\infty}(0,\ \chi_2',\ \mathbb{Q}(\sqrt{-2})/\mathbb{Q}),\ L_{S_\infty}(0,\ \chi_4',\ \mathbb{Q}(\sqrt{-66})/\mathbb{Q})$ 及び $L_{S_\infty}(0,\ \phi,\ L/\mathbb{Q}(\sqrt{33}))$ の値がわかれば良いことがわかった. 最初の二つについては類数公式より

$$L_{S_\infty}(0,\ \chi_2',\ \mathbb{Q}(\sqrt{-2})/\mathbb{Q})=1$$
$$L_{S_\infty}(0,\ \chi_4',\ \mathbb{Q}(\sqrt{-66})/\mathbb{Q})=8$$

となることが分かり, Pari-GP を用いると

$$L_{S_\infty}(0,\ \phi,\ L/\mathbb{Q}(\sqrt{33}))=48$$

となることが分かる. 最後に ϵ-factor についてであるが, $L/\mathbb{Q}$ で分岐する素数は $2,\ 3,\ 11$ であり, それぞれの素数の上にある L の素イデアル $\mathfrak{P}_2,\ \mathfrak{P}_3,\ \mathfrak{P}_11$ を適当に取ると

$$\begin{array}{ccccc}
G_{\mathfrak{P}_2} & = & \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}(\sqrt{33})) & \cong & \langle\sigma\rangle\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \\
I_{\mathfrak{P}_2} & = & \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}(\sqrt{33},\ \alpha)) & \cong & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \\
G_{\mathfrak{P}_3} & = & \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}(\sqrt{-2})) & \cong & \mathfrak{S}_3, \\
I_{\mathfrak{P}_3} & = & \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}(\sqrt{-2})) & \cong & \mathfrak{S}_3, \\
G_{\mathfrak{P}_11} & = & \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}(\sqrt{-2},\ \alpha)) & \cong & \langle\tau\rangle, \\
I_{\mathfrak{P}_11} & = & \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}(\sqrt{-2},\ \alpha)) & \cong & \langle\tau\rangle
\end{array}$$

となる. ϵ_2 については

$$V_{\chi_2}^{I_{\mathfrak{P}_3}}=V_{\chi_2}$$

であり, $\phi_{\mathfrak{P}_3}=\mathrm{id}$ より $\epsilon_{\chi_2}=0$. ϵ_{χ_4} については

$$V_{\chi_4}^{I_{\mathfrak{P}_2}}=V_{\chi_4}^{I_{\mathfrak{P}_3}}=V_{\chi_4}^{I_{\mathfrak{P}_11}}=1$$

より, $\epsilon_{\chi_4} = 1$. ϵ_{χ_6} については

$$\dim_{\mathbb{Q}} V_{\chi_6}^{I_{\mathfrak{P}_3}} = 1$$

となり $I_{\mathfrak{P}_3}$ の不変部分が 1 次元分残るが, $\phi_{\mathfrak{P}_3} = \mathrm{id}$ より $\epsilon_{\chi_6} = 0$ を得る. 以上をまとめると

$$\begin{aligned}\theta_{L/\mathbb{Q}} &= \epsilon_{\chi_2} L_{S_\infty}(0,\ \chi_2,\ L/\mathbb{Q}) e_{\chi_2} + \epsilon_{\chi_4} L_{S_\infty}(0,\ \chi_4,\ L/\mathbb{Q}) e_{\chi_4} + \epsilon_{\chi_6} L_{S_\infty}(0,\ \chi_6,\ L/\mathbb{Q}) e_{\chi_6} \\ &= L_{S_\infty}(0,\ \chi_4,\ L/\mathbb{Q}) e_{\chi_4} \\ &= \frac{2}{3}(\mathrm{id} + \sigma + \sigma^2 - \tau - \sigma\tau - \sigma^2\tau - j - \sigma j - \sigma^2 j + \tau j + \sigma\tau j + \sigma^2\tau j)\end{aligned}$$

を得る. 実際に $\theta_{L/\mathbb{Q}} \in \zeta(\mathbb{Q}[G])$ となっていることが見て取れる. ここで 分母に出てきている 3 について少し考えたみたい. 実は $\mu(L) = \{\pm 1\}$ であるので, アーベル拡大に付随する Stickelberger 元と同様の性質を期待するなら, 任意の奇素数 p にたいして $\theta_{L/\mathbb{Q}} \in \mathbb{Z}_p[G]$ となっていてもらいたいのだが, $p = 3$ についてはそうはなっていない. つまり, $\theta_{L/\mathbb{Q}}$ の分母に出てきている 3 は, 1 の冪根からの寄与ではない非可換拡大ならではの困難のであるということになる. ではその困難の源泉は何かというと, それが被約ノルムである. $\theta_{L/\mathbb{Q}}$ の値をよく見てみると, §2.2.2 で計算した被約ノルムとなっていることが分かる. つまり,

$$\theta_{L/\mathbb{Q}} = \mathrm{nr}(2(-\mathrm{id} + \sigma + \sigma^2 - \tau + \sigma\tau - \sigma^2\tau + j - \sigma j - \sigma^2 j + \tau j - \sigma\tau j + \sigma^2\tau j))$$

が成立する. つまり, $\theta_{L/\mathbb{Q}, S_\infty \cup S_{ram}}$ は, そのままでは $\mathbb{Z}_p[G]$ の元とはならないが, $\mathbb{Z}_p[G]$ 由来であることが分かる. さて, 我々の目標は $\mathfrak{A}_S \theta_{L/\mathbb{Q}}$ の含まれるべき集合を見定めることであったが, 上の具体的計算と $\mathfrak{A}_{S_\infty \cup S_{ram}}$ の生成元も被約ノルムであったという事実から,

$$\mathcal{I}(\mathbb{Z}[G]) := \langle \mathrm{nr}(H) \mid H \in M_n(\mathbb{Z}[G]),\ \forall n \in \mathbb{N} \rangle_{\zeta(\mathbb{Z}[G])} \subset (\mathfrak{M}(G))$$

と定義すると

$$\mathfrak{A}_{S_\infty \cup S_{ram}} \theta_{L/\mathbb{Q}} \subset \mathcal{I}(\mathbb{Z}[G])$$

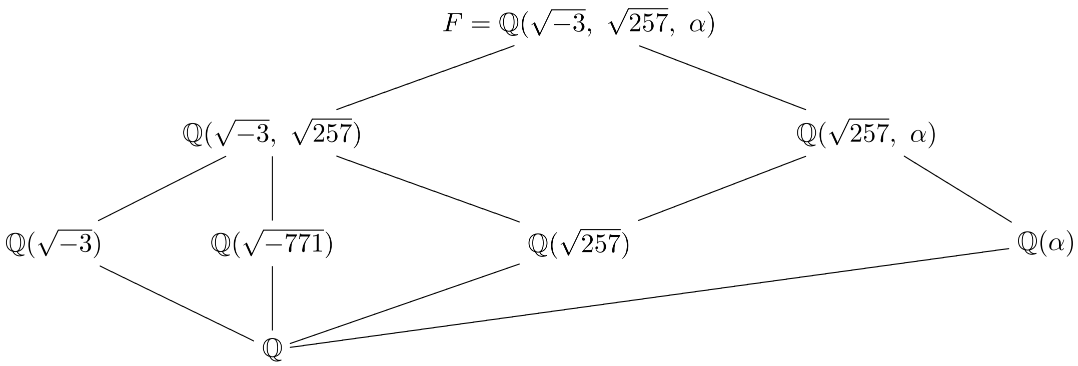
となっていることが分かる. さて, 以上の考察を元に (いささか乱暴ではあるが), 一般の拡大と S に対する Delegne-Ribet の対応物として次の予想にたどり着く.

予想 1.

$$\mathfrak{A}_S \theta_{K/k, S} \subset \mathcal{I}(\mathbb{Z}[G])$$

注意 6. *K/k がアーベル拡大なら行列の被約ノルムは通常の行列式にほかならないので, $\mathcal{I}(\mathbb{Z}[G]) = \mathbb{Z}[G]$ を得る. したがって, 上の予想は $\mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}[G]}(\mu(K))\theta_{K/k,S} \subset \mathbb{Z}[G]$ が成立することを主張している.*

さて, 先ほどの具体例では $\mathfrak{A}_S$ を掛けるまでもなく Stickelberger 元そのものが $\mathbb{Z}[G]$ の被約ノルムとなっていたが, 次に示す具体例により**本当に $\mathfrak{A}_S$ が必要である**ことが分かる. 次の拡大を考える.



ここで, α は $x^3 - 5x + 3 = 0$ の根である. この拡大に対して, 先程と同様に計算すると

$$\begin{aligned}\theta_{F/\mathbb{Q}} &= \frac{2}{3} e_{\chi_2} + 6 e_{\chi_4} + 16 e_{\chi_5} \\ &= \frac{53}{9}\mathrm{id} - \frac{19}{9}(\sigma + \sigma^2) - \frac{4}{9}(\tau + \sigma\tau + \sigma^2\tau) - \frac{53}{9} j + \frac{19}{9}(\sigma j + \sigma^2 j) + \frac{4}{9}(\tau j + \sigma\tau j + \sigma^2\tau j)\end{aligned}$$

となる. この元が $\mathcal{I}(\mathbb{Z}[G])$ の元となるには少なくとも

$$\zeta(\mathfrak{M}(G)) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus M_2(\mathbb{Z}) \oplus M_2(\mathbb{Z})$$

の元となることが必要であるが, χ_2 成分が $\mathbb{Z}$ からずれているので $\theta_{F/\mathbb{Q}} \notin \zeta(\mathfrak{M}(G))$ したがって $\theta_{F/\mathbb{Q}} \notin \mathcal{I}(\mathbb{Z}[G])$ となる. 実際,

$$\theta_{F/\mathbb{Q}} = \mathrm{nr}(\frac{1}{3}(-2\,\mathrm{id} + 7\sigma + \tau - 5\sigma\tau + 2j - 7\sigma j - \tau j + 5\sigma\tau j))$$

となっている. では「$\mathfrak{A}_{S_\infty \cup S_{ram}}$ を掛けたらどうなるか？」ということだが, これに関しては次を証明できる.

命題 5.

$$\mathfrak{A}_{S_\infty \cup S_{ram}} \theta_{F/\mathbb{Q}} \subset \mathcal{I}(\mathbb{Z}[G])$$

証明. $\mathrm{nr}(\prod_{\mathfrak{p}\in T} 1 - \phi_{\mathfrak{P}}^{-1} N\mathfrak{p})) \in \mathfrak{A}_{S_\infty \cup S_{ram}}$ を取ると

$$\begin{aligned}
\mathrm{nr}(\prod_{\mathfrak{p}\in T} 1 - \phi_{\mathfrak{P}}^{-1} N\mathfrak{p}))\theta_{F/\mathbb{Q}} &= \det(\prod_{\mathfrak{p}\in T} 1 - \phi_{\mathfrak{P}}^{-1} N\mathfrak{p} \mid V_{\chi_2}) L_{S_\infty}(0, \chi_2', \mathbb{Q}(\sqrt{-3})/\mathbb{Q}) e_{\chi_2} \\
&\quad + \det(\prod_{\mathfrak{p}\in T} 1 - \phi_{\mathfrak{P}}^{-1} N\mathfrak{p} \mid V_{\chi_4}) L_{S_\infty}(0, \chi_4', \mathbb{Q}(\sqrt{-771})/\mathbb{Q}) e_{\chi_4} \\
&\quad + \det(\prod_{\mathfrak{p}\in T} 1 - \phi_{\mathfrak{P}}^{-1} N\mathfrak{p} \mid V_{\chi_6}) L_{S_\infty}(0, \chi_6', F/\mathbb{Q}(\sqrt{257})) e_{\chi_6}
\end{aligned}$$

となる. さて, $\prod_{\mathfrak{p}\in T} 1 - \phi_{\mathfrak{P}}^{-1} N\mathfrak{p}$ の $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ への制限を $\overline{\prod_{\mathfrak{p}\in T} 1 - \phi_{\mathfrak{P}}^{-1} N\mathfrak{p}}$ と書くことにすると $\overline{\prod_{\mathfrak{p}\in T} 1 - \phi_{\mathfrak{P}}^{-1} N\mathfrak{p}} \in \mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}[\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{-3})/\mathbb{Q})]}(\mu(\mathbb{Q}(\sqrt{-3})))$ であるので,

$$(\overline{\prod_{\mathfrak{p}\in T} 1 - \phi_{\mathfrak{P}}^{-1} N\mathfrak{p}})\theta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})/\mathbb{Q}} \in \mathbb{Z}[\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{-3})/\mathbb{Q})]$$

よって,

$$\chi_2'((\overline{\prod_{\mathfrak{p}\in T} 1 - \phi_{\mathfrak{P}}^{-1} N\mathfrak{p}})\theta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})/\mathbb{Q}}) = \det(\prod_{\mathfrak{p}\in T} 1 - \phi_{\mathfrak{P}}^{-1} N\mathfrak{p} \mid V_{\chi_2}) L_{S_\infty}(0, \chi_2', \mathbb{Q}(\sqrt{-3})/\mathbb{Q}) \in \mathbb{Z}.$$

他の二つの成分については $\mathrm{nr}(\prod_{\mathfrak{p}\in T} 1 - \phi_{\mathfrak{P}}^{-1} N\mathfrak{p})) \in \zeta(\mathfrak{M}(G))$ より, $\mathbb{Z}$ に含まれることが分かる. 以上のことから,

$$\mathrm{nr}(\prod_{\mathfrak{p}\in T} 1 - \phi_{\mathfrak{P}}^{-1} N\mathfrak{p})\theta_{F/\mathbb{Q}} \in \zeta(\mathfrak{M}(G))$$

となることが分かった. さらに, 次の二つの命題と

$$\mathcal{I}(\mathbb{Z}[G]) = \bigcap_{p:\text{素数}} (\mathcal{I}_p(\mathbb{Z}_p[G]) \cup \zeta(\mathbb{Q}[G]))$$

なる事実から, $\mathrm{nr}(\prod_{\mathfrak{p}\in T} 1 - \phi_{\mathfrak{P}}^{-1} N\mathfrak{p}))\theta_{F/\mathbb{Q}} \in \mathcal{I}(G)$ が分かる.

命題 6 ([JN], Example 6.22)**.** 任意の奇素数 p に対して,

$$\mathcal{I}_p(\mathbb{Z}_p[D_{4p}]) = \zeta(\mathfrak{M}_p(D_{4p}))$$

命題 7 ([JN], Proposition 4.3, Proposition 4.8)**.** 任意の奇素数 p に対して,

$$\mathcal{I}_2(\mathbb{Z}_2[D_{4p}]) = \zeta(\mathbb{Z}_2[D_{4p}])$$

□

最後にもう少しだけ二つの具体例に思いを馳せてみる. 代数体 L と F には 1 の 3 乗根を含むか含まないかという差が存在していたが, 「Stickelberger 元の分母」そのものには明確な差は現れていなかったように思う (どちらも分母の素因子として 3 が出てきていた). しかしながらその原像には明確な差が現れており, $\theta_{L/\mathbb{Q}} \in \mathcal{I}(\mathbb{Z}[G])$ であったのに対して, $\theta_{F/\mathbb{Q}} \in \mathcal{I}(\frac{1}{3}\mathbb{Z}[G])$ となっていた. つまり, **Stickelberger 元そのものを見ているだけではわからない数論的な差を, その原像たちはきちんと知っているのではないかにゃ〜**と夢想したいのである. アーベル拡大の時には考える必要のなかった原像の中に何か数論的な秘密が隠されているのかもしれない.

3.1.3 C について

前小節で Stickelberger イデアルの対応物 $\mathfrak{A}_S\theta_{K/k,S}$ を決定することができたので, アーベル拡大の場合と同様に「$\mathfrak{A}_S\theta_{K/k,S}$ が K のイデアル類群を消す」と予想したいところであるが, 物事はそこまで単純には進んでくれない. というのも, 一般に $\mathcal{I}(\mathbb{Z}[G]) \notin \mathbb{Z}[G]$ であるので, そのままではイデアル類群に作用することさえできない. そこで, 2.3 節で定義した $\mathcal{H}(G)$ を利用する. $\mathcal{H}(G)$ の定義から,

$$\mathcal{H}(G)\mathcal{I}(\mathbb{Z}[G]) \subset \zeta(\mathbb{Z}[G])$$

であるので, 予想 1 を認めると

$$\mathcal{H}(G)\mathfrak{A}_S\theta_{K/k,S} \subset \zeta(\mathbb{Z}[G])$$

が成立する. そこで, C の非可換拡大での対応物を

$$「任意の\ x \in \mathcal{H}(G)\ に対して,\ x\mathfrak{A}_S\theta_{K/k,S} \subset \mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}[G]}(Cl(K))」$$

と考えることにする. G がアーベル群である時には H^* として余因子行列を取ることができるので, $\mathcal{H}(G) = \mathbb{Z}[G]$ となる. したがって, 特に $1 \in \mathcal{H}(G)$ であるので, 上の主張は

$$\mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}[G]}(\mu(K))\theta_{K/k,S} \subset \mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}[G]}(Cl(K))$$

となる.

3.1.4 非可換 Brumer 予想の定式化と具体例

これまでの考察をあわせて, **非可換 Brumer 予想**を次で定式化する.

予想 2 ([Nia], Conjecture 2.4)**.**
S を k の素点の有限集合で, すべての無限素点とすべての分岐素点を含むものとするとき, 次が成り立つ.

- $\mathfrak{A}_S\theta_S \subset \mathcal{I}(\mathbb{Z}[G])$,
- 任意の $x \in \mathcal{H}(G)$ に対して, $x\mathfrak{A}_S\theta_S \subset \mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}[G]}(Cl(K))$

アーベル拡大に対する Brumer 予想同様に $\mathbb{Z}$ を $\mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Q}$ を $\mathbb{Q}_p$ に取り替えて

$$\mathfrak{A}_{S,p} := \langle \mathrm{nr}(\prod_{\mathfrak{p}\in T} 1 - \phi_{\mathfrak{P}}^{-1}N\mathfrak{p}) \mid H(S,T).\ \rangle_{\zeta(\mathbb{Z}_p[G])}$$
$$\mathcal{H}_p := \{x \in \zeta(\mathbb{Z}_p[G]) \mid xH^* \in M_n(\mathbb{Z}_p[G]),\ \forall H \in M_n(\mathbb{Z}_p[G]),\ \forall n \in \mathbb{N}\}$$

と置くことによって以下の p-部分の予想を得る.

予想 3 ([Nia], Conjecture 2.4)**.**
S を k の素点の有限集合で, すべての無限素点とすべての分岐素点を含むものとするとき, 次が成り立つ.

- $\mathfrak{A}_{S,p}\theta_S \subset \mathcal{I}(\mathbb{Z}_p[G])$,
- 任意の $x \in \mathcal{H}_p(G)$ に対して, $x\mathfrak{A}_{S,p}\theta_S \subset \mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}_p[G]}(Cl(K)\otimes\mathbb{Z}_p)$

上記二つの予想について、次が成り立つ.

命題 8.

$$予想\ 2\ が成立. \quad \Longleftrightarrow \quad 予想\ 3\ が任意の素数\ p\ について成立.$$

命題の証明に先立って, 二つの補題を準備する.

補題 3.

$$\mathbb{Z}_p \otimes \mathcal{H}(G) = \mathcal{H}_p(G).$$

しながって, 特に,

$$\mathcal{H}(G) = \bigcap_{p:\text{素数}} \mathcal{H}_p(G) \cap \zeta(\mathbb{Q}[G])$$

補題 4. 任意の素数 p に対して

$$\mathbb{Z}_p \otimes \mathcal{I}(\mathbb{Z}[G]) = \mathcal{I}(\mathbb{Z}_p[G])$$

したがって, 特に,

$$\mathcal{I}(\mathbb{Z}[G]) = \bigcap_{p:\text{素数}} \mathcal{I}(\mathbb{Z}_p[G]) \cap \zeta(\mathbb{Q}[G])$$

が成り立つ.

補題 3 の証明. [Nia, Lemma 1.4] 参照. □

補題 4 の証明. v_p を $\mathbb{Q}_p$ の付置で $v_p(p) = 1$ を満たすものとする. また $x = \sum_{g \in G} x_g g \in \mathbb{Q}_p[G]$ の付置を $\overline{v}_p(x) = \min_{g \in G v_p(x_g)}$ で定義する. さらに, $n \in \mathbb{N}$ とする時, 任意の $J = (J_{k,l})_{1 \leq k,\ l \leq n} \in M_n(\mathbb{Q}_p[G])$ の付置を同じ記号を用いて $\overline{v}_p(J) = \min_{1 \leq k,\ l \leq n} \overline{v}_p(J_{k,l})$ で定義する. 主張を示すには, この付置で誘導される位相で $\mathcal{I}(\mathbb{Z}[G])$ が $\mathcal{I}(\mathbb{Z}_p[G])$ の中で, 稠密であることを示せば良い. その為にまず, $n \in \mathbb{N}$ を任意にとり $H \in M_n(\mathbb{Z}_p[G])$ とする. $M_n(\mathbb{Z}[G])$ は $M_n(\mathbb{Z}_p[G])$ の中で稠密なので任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して

$$\overline{v}_p(H - H') \geq m. \tag{5}$$

を満たすような $H' \in M_n(\mathbb{Z}[G])$ が存在する (この時 $\overline{v}_p(H) = \overline{v}_p(H')$ であることに注意する). さて, E を $\mathbb{Q}_p$ の有限次ガロワ拡大で G のすべての既約表現を実現するような体とし, $\mathfrak{o}$ をその整数環とする. この時,

$$M_n(E[G]) \cong \bigoplus_{\chi \in \mathrm{Irr}\, G} M_{n\chi(1)}(E)$$

であり, Λ' を $\mathbb{Z}_p[G]$ を含むような $E[G]$ の maximal order とすると

$$M_n(\Lambda') \cong \bigoplus_{\chi \in \mathrm{Irr}\, G} M_{n\chi(1)}(\mathfrak{o})$$

が成立する ([Re, Theorem 18.7]). $H,\ H'$ を $\bigoplus_{\chi \in \mathrm{Irr}\, G} M_{n\chi(1)}(\mathfrak{o})$ の中で

$$H = \oplus H_\chi,\ H' = \oplus H'_\chi \in \bigoplus_{\chi \in \mathrm{Irr}\, G} M_{n\chi(1)}(\mathfrak{o})$$

と分解すると, (5) より

$$\overline{v}_p(H_\chi - H'_\chi) \geq m$$

が成立している, $\overline{v}_p(H) = \overline{v}_p(H^{prime})$ であったので, $\overline{v}_p(H_\chi) = \overline{v}_p(H'_\chi)$ も成立している. また, 付置の定義から H_χ の成分 h_χ, H'_χ の成分 h'_χ で $\overline{v}_p(H_\chi) = \overline{v}_p(h_\chi) = \overline{v}_p(h'_\chi) = \overline{v}_p(H'_\chi)$ を満たすものが存在する. この $h_\chi,\ h'_\chi$ を含む列での余因子展開を考えると

$$\overline{v}_p(\det H_\chi - \det H'_\chi) \geq m$$

したがって

$$\overline{v}_p(\mathrm{nr}(H) - \mathrm{nr}(H')) \geq m$$

となることが分かる. 今, m は任意だったので, $\mathcal{I}(\mathbb{Z}[G])$ が $\mathcal{I}(\mathbb{Z}_p[G])$ の中で稠密であることが言えた. □

命題 8 の証明. Lemma 4 より

$$\mathfrak{A}_S \theta_{K/k,S} \in \mathcal{I}(\mathbb{Z}[G]) \Leftrightarrow \mathfrak{A}_{S,p} \theta_{K/k,S} \in \mathcal{I}(\mathbb{Z}_p[G]),\ \forall p.$$

また, Lemma 3 より

$$\mathcal{H}(G)\mathfrak{A}_S \theta_{K/k,S} \in \mathrm{Ann}_{\zeta(\mathbb{Z}[G])}(Cl(K)) \Leftrightarrow \mathcal{H}(G)_p \mathfrak{A}_{S,p} \theta_{K/k,S} \in \mathrm{Ann}_{\zeta(\mathbb{Z}_p[G])}(Cl(K) \otimes \mathbb{Z}_p)$$

□

ようやく予想を定式化とすることができたので, 次に具体的な拡大 $L/\mathbb{Q}$ を利用して $\mathfrak{A}_{S,3}\theta_S$ がイデアル類群特にイデアル類群の 3-part を消す様子を見ることにする. Pari-Gp を用いると

$$Cl(L) \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

したがって

$$Cl(L) \otimes \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$$

となる. $Cl(L) \otimes \mathbb{Z}_3$ の基底を $e_1,\ e_2$ とすると $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ のイデアル類群への作用は (再び Pari-GP を利用すると)

$$\begin{cases} \sigma(e_2) = e_1 + e_2 \\ \tau(e_2) = e_1 - e_2 \quad \text{and } (\sigma^2 - \sigma)e_2 = e_1. \\ j(e_2) = -e_2 \end{cases}$$

となることが分かる. この関係式から $Cl(L) \otimes \mathbb{Z}_3 = \mathbb{Z}[G]e_2$(1 元生成) となるので, *Stickelberger* 元が e_2 を消すことが分かれば良い. それを確かめるには $\mathcal{H}_3(G)$ の元を取ってこなくてはならないが, 一般にはどのような元が $\mathcal{H}(G)$ に入るのかわからない. ただし今回は幸運にも次のことが成り立っている.

命題 9 ([JN], Example 6.22)**.** *K/k を代数体のガロワ拡大で $\mathrm{Gal}(K/k) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times D_{2p}$ となるものとすると.*

$$\mathcal{H}_p(G) = \mathfrak{F}_p(G)$$

この命題を $p = 3$ として利用すると

$$\mathcal{H}_3(G) = \mathfrak{F}_3(G) \cong 12\mathbb{Z}_3 \oplus 12\mathbb{Z}_3 \oplus 12\mathbb{Z}_3 \oplus 12\mathbb{Z}_3 \oplus 6\mathbb{Z}_3 \oplus 6\mathbb{Z}_3$$

となるので, 一般に $\mathcal{H}_3(G)$ の元 x として

$$x = \alpha_{\chi_1} \mathrm{pr}_{\chi_1} + \alpha_{\chi_2} \mathrm{pr}_{\chi_2} + \alpha_{\chi_3} \mathrm{pr}_{\chi_3} + \alpha_{\chi_4} \mathrm{pr}_{\chi_4} + \alpha_{\chi_5} \mathrm{pr}_{\chi_5} + \alpha_{\chi_6} \mathrm{pr}_{\chi_6},\ \alpha_{\chi_i} \in \mathbb{Z}_3$$

という形の元をとってこれることが分かる. ただしここで,

$$\mathrm{pr}_{\chi_i} = \sum_{\sigma \in G} \chi_i(\sigma^{-1})\sigma = \frac{|G|}{\chi(1)} e_{\chi_i}$$

である. この元を $\theta_{L/\mathbb{Q}}$ に掛けると

$$\begin{aligned} x\theta_{L/\mathbb{Q}} &= \alpha_{\chi_4} 8\, \mathrm{pr}_{\chi_4} \\ &= \alpha_{\chi_4} 8(\mathrm{id} + \sigma + \sigma^2 - \tau - \sigma\tau - \sigma^2\tau - j - \sigma j - \sigma^2 j + \tau j + \sigma\tau j + \sigma^2\tau j) \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} x\theta_{L/\mathbb{Q}} e_2 &= \alpha_{\chi_4} 16(\mathrm{id} + \sigma + \sigma^2 - \tau - \sigma\tau - \sigma^2\tau)e_2 \\ &= \alpha_{\chi_4} 16(e_2 + (e_1 + e_2) + \sigma(e_1 + e_2) - (e_1 - e_2) - \sigma(e_1 - e_2) - \sigma^2(e_1 - e_2)) \\ &= \alpha_{\chi_4} 16(3e_2 + \sigma(e_1 + e_2) - \sigma(e_1 - e_2) - \sigma^2(e_1 - e_2)) \\ &= \alpha_{\chi_4} 16(-\sigma^2(e_1) + (2\sigma + \sigma^2)e_2) \\ &= \alpha_{\chi_4} 16(-(\sigma - \mathrm{id})e_2 + (2\sigma + \sigma^2)e_2) \\ &= \alpha_{\chi_4} 16(\mathrm{id} + \sigma + \sigma^2)e_2 \\ &= \alpha_{\chi_4} 8 N_{\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}(\sqrt{-66}))} e_2 \end{aligned}$$

今 $N_{\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}(\sqrt{-66}))} e_2 \in Cl(\mathbb{Q}(\sqrt{-66}))$ であり, $Cl(\mathbb{Q}(\sqrt{-66})) = 8$ であったので, 結局

$$x\theta_{L/\mathbb{Q}} e_2 = 0$$

を得る. したがって,

$$x\theta_{L/\mathbb{Q}}Cl(L)\otimes\mathbb{Z}_3=0.$$

これは, イデアル類群を消すためには $\mathfrak{A}_{S,3}$ が不要であることも主張している. これは $\mu(L)=\{\pm1\}$ であったことを考えると, アーベル拡大の場合と同様の現象であると言える. 一般に $\delta_T\in\mathfrak{A}_{S,3}\not\subset\mathbb{Z}[G]$ であるため上の主張と $x\mathfrak{A}_{S,3}\theta_{L/\mathbb{Q}}Cl(L)=0$ との間には若干のギャップがある. そこで, この事実も一応確かめておく. 一般に δ_T は

$$\delta_T=\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}\,G}\beta_\chi e_\chi,\ \beta_\chi\in\mathbb{Z}_3$$

とかけるので

$$x\delta_T\theta_{L/\mathbb{Q}}=\alpha_{\chi_4}\beta_{\chi_4}8\,\mathrm{pr}_{\chi_4}$$

を得る. したがって上と同様の計算により

$$x\mathfrak{A}_{S,3}\theta_{L/\mathbb{Q}}Cl(L)=0$$

となることを確かめることができる. この具体的な計算において注目すべき点は, K **のイデアル類群の annihilation の議論が最終的には** $\mathbb{Q}(\sqrt{-66})$ **のイデアル類群の annihilation の話に帰着されている**という点である. これは $\theta_{L/\mathbb{Q}}$ で生き残っていた χ_2 成分が実は $\mathbb{Q}(\sqrt{-33}/\mathbb{Q})$ に付随する L-関数の値であったために起こっている現象である. 一般に $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathfrak{S}_3$ のように, 既約指標が 1 次元指標と部分群の 1 次元指標から誘導される指標で尽くされるような群をガロワ群として持つような拡大に対しては K のイデアル類群の annihilation をある程度は K/k に含まれる部分アーベル拡大に対する annihilation に帰着することができる [No]. 上の具体例はそのひな形のような現象を捉えたものである. 最後にもう一つ具体例を紹介したい. この具体例を見ることによって $\mathcal{H}(G)$ **が本当に必要である**ということが分かるものと思う. 次の拡大を考える.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & M=\mathbb{Q}(\sqrt{-3},\ \sqrt{29},\ \alpha) \arrow[dl, no head] \arrow[drr, no head] & & & \\
 & \mathbb{Q}(\sqrt{-3},\ \sqrt{29}) \arrow[dl, no head] \arrow[d, no head] \arrow[drr, no head] & & & \mathbb{Q}(\sqrt{29},\ \alpha) \arrow[dl, no head] \arrow[dr, no head] & \\
\mathbb{Q}(\sqrt{-6}) \arrow[dr, no head] & \mathbb{Q}(\sqrt{-174}) \arrow[d, no head] & & \mathbb{Q}(\sqrt{29}) \arrow[dll, no head] & & \mathbb{Q}(\alpha) \arrow[dllll, no head] \\
 & \mathbb{Q} & & & &
\end{tikzcd}$$

ここで, α は $x^3-12x-13=0$ の根である. また

$$\begin{aligned}
Cl(M) &\cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}\\
Cl(M)\otimes\mathbb{Z}_3 &\cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

となっている. さらに, $Cl(M)\otimes\mathbb{Z}_3$ の基底を $e_1,\ e_2$ そして e_3 とすると.

$$\left\{\begin{array}{l}\sigma(e_1)=-e_1-e_2\\ \tau(e_1)=-e_1\\ j(e_1)=-e_1\end{array}\right.\quad\text{and}\quad\left\{\begin{array}{l}(-\sigma-1)e_1=e_2\\ (-\sigma^2-\sigma-1)e_1=e_3\end{array}\right.$$

したがって, $Cl(M)\otimes\mathbb{Z}_3$ は 1 元生成でその生成元は e_1 となる. さて, この拡大 $M/\mathbb{Q}$ において

$$\theta_{M/\mathbb{Q}}=\mathrm{id}+\sigma+\sigma^2-\tau-\sigma\tau-\sigma^2\tau-j-\sigma j-\sigma^2j+\tau j+\sigma\tau j+\sigma^2\tau j$$

となっている. したがって, そのままで $\zeta(\mathbb{Z}[G])$ の元になっている. これはしめたものなので, そのままイデアル類群, とくに e_1 に作用させてみると

$$\begin{aligned}\theta_{M/\mathbb{Q}}\cdot e_1 &= 2N_{\mathrm{Gal}(M/\mathbb{Q}(\sqrt{-174}))}e_1\\ &= 2N_{\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{-2},\ \sqrt{29})/\mathbb{Q}(\sqrt{-174}))}N_{M/\mathbb{Q}(\sqrt{-2},\ \sqrt{29})}e_1\\ &= 2(1+\tau j)(1+\sigma+\sigma^2)e_1\\ &= -2(1+\tau j)e_3\\ &= -4e_3\neq 0\end{aligned}$$

したがって, Stickelberger 元はそのままではイデアル類群を消していない. ところが, 先程と同様に $x\in\mathfrak{F}_3(G)$ を取ると

$$x\theta_{M/\mathbb{Q}}e_1 = 24\alpha_{\chi_2}N_{M/\mathbb{Q}(\sqrt{-174})}e_1 = 0$$

となるので, 確かにイデアル類群を消している. つまり, $\mathcal{H}(G)$ の元は単に Stickelbreger 元を $\mathbb{Z}[G]$ の元にするためだけにに必要なのではなく, **本当に必要なものである**ということが分かる.

3.2 非可換 Brumer-Stark 予想

アーベル拡大に対する Brumer-Stark 予想の主張は

予想 (Brumer-Stark 予想)**.** *K/k を代数体の相対 CM-アーベル拡大とする. この時,*

- *任意の K の分数イデアル $\mathfrak{A}$ に対して, ある anti-unit $\alpha\in K^*$ が存在して, $\mathfrak{A}^{\omega_K\theta_{K/k,S}}=(\alpha)$,*
- *$K(\alpha^{1/\omega_K})/k$ はアーベル拡大.*

ここで, $\omega_K=|\mu(K)|$ であり, K の anti-unit とは, $\alpha^{1+j}=1$ を満たす K^* の元である.

非可換 Brumer 予想の時と同様に, 次のような対応表を考える.

アーベル拡大	非可換拡大での対応物
Annihilation ： $\mathfrak{A}^{\omega_K\theta_{K/k,S}}=(\alpha)$	A
Field extension ： $K(\alpha^{1/\omega_K})/k$ はアーベル拡大	B

表 2: アーベル拡大と非可換拡大との対応表

3.2.1 A について

A は Stickelberger 元によるイデアル類群の annihilation に関する主張であるが, ω_K の出処は $\mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}[G]}(\mu(K))$ である. 前節で考えたように $\mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}[G]}(\mu(K))$ の非可換拡大での対応物は $\mathfrak{A}_S$ であったので, ω_K として $|\mu(K)|$ そのものではなくその被約ノルムを取ることにする. つまり,

$$\omega_K := \mathrm{nr}(|\mu(K)|)$$

と置く (K/k がアーベル拡大なら nr は恒等写像であるので, $\omega_K=\mathrm{nr}(|\mu(K)|)=|\mu(K)|$ となる). 一つ注意すべき点は, ω_K はもはや整数ではなく, 一般には $\zeta(\mathfrak{M}(G))$ の元である. 実際, 前節で利用した具体例において, $\mu(L)=\pm1$ であるので,

$$\omega_L = \mathrm{nr}(2) = \frac{10}{3}-\frac{2}{3}(\sigma+\sigma^2)$$

となり, 完全に群環 $\mathbb{Z}[G]$ から外れている. また, $\omega_L\theta_{L/\mathbb{Q},S_\infty\cup S_{ram}}\in\mathcal{I}(G)$ であるので, そのままではイデアルに作用できない. そこで, 今回も $\mathcal{H}(G)$ を利用して, A の対応物を

任意の分数イデアル $\mathfrak{A}$ と任意の $x \in \mathcal{H}(G)$ に対して, ある anti-unit $\alpha = \alpha(\mathfrak{A},\ S,\ x)$ が存在して

$$\mathfrak{A}^{x\omega_K \theta_{K/k,S} = (\alpha)}$$

と考えることにする. アーベル拡大の場合とは異なり $\mathcal{H}(G)$ なる集合の元が必要になるため, α が x にも依存しているということを注意しておく.

3.2.2 B について

B の主張に対して, 非可換拡大の対応物を考えたいのだが, 一般には $\omega_K \notin \mathbb{Z}$ であるので α^{1/ω_K} という元を考えることができない. そこで, B の主張と同値な命題であった, 次の主張を用いる.

$Hyp(S \cup S_\alpha, T)$ を満たすような任意の T に対して, ある $\alpha_T \in E_\alpha^T$ が存在して

$$\alpha^{\delta_T} = \alpha_T^{\omega_K}$$

この主張を非可換拡大に一般化する際の問題は δ_T と ω_K がそのままでは α や α_T に作用できない点でありかつその点のみが問題となる. そこで, 非可換 Brumer 予想の場合と同様に $\mathcal{H}(G)$ を用いて B の対応物として次の主張を採用する.
$Hyp(S \cup S_\alpha, T)$ を満たすような任意の T に対して, ある $\alpha_T \in E_\alpha$ が存在して

$$\alpha^{z\delta_T} = \alpha_T^{z\omega_K}$$

が任意の $z \in \mathcal{H}(G)$ に対して成立する.

3.2.3 非可換 Brumer-Stark 予想の定式化

予想 4 ([Nia], Conjecture 2.6)**.** 任意の K の分数イデアル $\mathfrak{A}$ と任意の $x \in \mathcal{H}(G)$ に対して, ある *anti-unit* $\alpha = \alpha(\mathfrak{A},\ S,\ x) \in K^*$ が存在して

$$\mathfrak{A}^{x\omega_K \theta_{K/k,S}} = (\alpha)$$

さらに, $Hyp(S \cup S_\alpha, T)$ を満たすような任意の T に対して, ある $\alpha_T \in E_\alpha$ が存在して

$$\alpha^{z\delta_T} = \alpha_T^{z\omega_K}$$

が任意の $z \in \mathcal{H}_p(G)$ に対して成立する.

非可換 Brumer 予想と同様に次の p-部分の予想を得る.

予想 5 ([Nia], Conjecture 2.7)**.** $Cl(K)$ での類の位数が p べきであるような任意の K の分数イデアル $\mathfrak{A}$ と任意の $x \in \mathcal{H}_p(G)$ に対して, ある *anti-unit* $\alpha = \alpha(\mathfrak{A},\ S,\ x) \in K^*$ が存在して

$$\mathfrak{A}^{x\omega_K \theta_{K/k,S}} = (\alpha)$$

さらに, $Hyp(S \cup S_\alpha, T)$ を満たすような任意の T に対して, ある $\alpha_T \in E_\alpha$ が存在して

$$\alpha^{z\delta_T} = \alpha_T^{z\omega_K}$$

が任意の $z \in \mathcal{H}_p(G)$ に対して成立する.

命題 10.

$$\text{予想 } 4 \Rightarrow \text{ 予想 } 2$$

証明. $\mathfrak{A}$ を K の分数イデアルとする. また, 任意の $x \in \mathcal{H}(G)$ をとる. この時, 仮定より ある $\alpha \in K^*$ が存在して, $Hyp(S \cup S_\alpha, T)$ を満たすような任意の T に対して,

$$\mathfrak{A}^{x\omega_K\theta_{K/k,S}} = (\alpha),\ \alpha^{z\delta_T} = \alpha_T^{z\omega_K}$$

が任意の $z \in \mathcal{H}(G)$ に対して成立するような $\alpha_T \in K^*$ が存在する. したがって,

$$\mathfrak{A}^{x\omega_K\delta_T\theta_{K/k,S}} = \mathfrak{A}^{x\omega_K\theta_{K/k,S,T}} = (\alpha)^{z\delta_T} = (\alpha_T)^{z\omega_K}$$

が成立する. 今, $\omega_K \in \zeta(\mathbb{Q}[G])^*$ であるので, 十分大きな自然数 N を取ると, $N\omega_K^{-1} \in \zeta(\mathbb{Z}[G])$ とできる. したがって, z として $\mathcal{F}(G)$ の元である $|G|N\omega_K^{-1}$ を取ることが出来るので,

$$\mathfrak{A}^{x|G|N\theta_{K/k,S,T}} = (\alpha_T)^{x|G|N}$$

を得るが, イデアル群は $\mathbb{Z}$-torsion free であるので, 結局

$$\mathfrak{A}^{x\theta_{K/k,S,T}} = (\alpha_T)^x$$

が成立する. □

非可換 Brumer 予想と同様に補題 3 と補題 4 を用いると, global な予想と p-部分の予想には以下の関係を証明できる.

命題 11.

予想 4 が成立. $\Longleftrightarrow$ 予想 5 が任意の素数 p に対して成立.

3.3 弱予想

ここまでの考察で, なんとか非可換 Brumer 予想, 非可換 Brumer-Stark 予想にたどりついたわけであるが, [Nia] では通常の予想と並行して “弱” 予想を定式化している. この節ではその “弱” 予想の定式化を紹介する.

3.3.1 弱非可換 Brumer 予想

さっそく弱非可換 Brumer 予想の主張を述べることにする.

予想 6 ([Nia], Conjecture 2.3)**.**
S を k の素点の有限集合で, すべての無限素点とすべての分岐素点を含むものとするとき, 次が成り立つ.

- $\mathfrak{A}_S\theta_{K/k,S} \subset \zeta(\mathfrak{m}(G))$,
- 任意の $x \in \mathfrak{F}(G)$ に対して, $x\mathfrak{A}_S\theta_S \subset \mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}[G]}(Cl(K))$

さて, この予想のどこが “弱” かということであるが, それを理解するために K/k がアーベル拡大である場合に上の予想が何を主張しているかを見ることにする. K/k がアーベル拡大の時,

$$\mathfrak{A}_S\theta_{K/k,S} = \mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}[G]}(\mu(K))\theta_{K/k,S}$$

であったので, 予想 6 の最初の主張は,

$$\mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}[G]}(\mu(K))\theta_{K/k,S} \subset \zeta(\mathfrak{m}(G))$$

となる. $\zeta(\mathfrak{m}(G))$ は $\mathbb{Z}[G]$ よりも**真に大きい**ので ([CR, §27, Proposition 27.1]), 上の包含からは

$$\mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}[G]}(\mu(K))\theta_{K/k,S} \subset \mathbb{Z}[G]$$

を復元することができない. この点に於いてまず予想 6 は “弱” である. 次に $\mathfrak{F}(G)$ についてであるが, 定理 2 を思い出すと (K/k はアーベル拡大であるので),

$$\mathfrak{F}(G) \cong \bigoplus_{\chi \in \mathrm{Irr}\, G/\sim} |G|\mathfrak{D}^{-1}(\mathbb{Q}(\chi)/\mathbb{Q})$$

であったので, K/k がアーベルであったとしても, $\mathfrak{F}(G)$ の元として 1 を取ることができない. また, 上の同型を見ると, central conductor の元を掛けるということは, おおよそ, $|G|$ を掛けることに等しいということが分かる. したがって, 予想 6 の 2 つ目の主張はおおよそ

$$|G| \operatorname{Ann}_{\mathbb{Z}[G]}(\mu(K))\theta_{K/k,S} \subset \operatorname{Ann}_{\mathbb{Z}[G]}(Cl(K))$$

ということを主張していることになる. $|G|$ という無駄な項がついてしまっているために, やはり通常の Brumer 予想を復元することができない. したがって, この点においても予想 6 は “弱” である. さて, 一般に

$$\mathcal{I}(\mathbb{Z}[G]) \subset \zeta(\mathfrak{m}(G)),\ \mathfrak{F}(G) \subset \mathcal{H}(G)$$

であったので,

$$\text{予想 2} \Rightarrow \text{予想 6}$$

が成立することが分かるが, 以下のようにを p-部分の予想 6 を考えることによって, 弱予想と通常の予想との関連がより詳しく分かる.

予想 7.
S を k の素点の有限集合で, すべての無限素点とすべての分岐素点を含むものとするとき, 次が成り立つ.

- $\mathfrak{A}_{S,p}\theta_{K/k,S} \subset \zeta(\mathfrak{m}_p(G))$,
- 任意の $x \in \mathfrak{F}_p(G)$ に対して, $x\mathfrak{A}_{S,p}\theta_S \subset \operatorname{Ann}_{\mathbb{Z}[G]}(Cl(K) \otimes \mathbb{Z}_p)$

$p \nmid |G|$ と仮定すると, $\mathbb{Z}_p[G]$ は maximal $\mathbb{Z}_p$-order であるので,

$$\mathcal{I}(\mathbb{Z}_p[G]) = \zeta(\mathfrak{m}_p(G)) = \zeta(\mathbb{Z}_p[G]),\ \mathcal{H}_p(G) = \mathfrak{F}_p(G) = \zeta(\mathbb{Z}_p[G])$$

となることが分かる. したがって, この場合

$$\text{予想 3} \iff \text{予想 7}$$

が成立する. しかしながら, この同値が成立するのは必ずしも $\mathbb{Z}_p[G]$ が maximal order である場合のみではない. それを見るために次の補題を用いる.

補題 5 ([JN], Remark 6.2 and Corollary 6.20)**.** G のすべての既約表現の次数が p と素で $\mathcal{I}(\mathbb{Z}_p[G]) = \zeta(\mathfrak{m}_p(G))$ が成立するならば

$$\mathcal{H}_p(G) = \mathfrak{F}_p(G)$$

が成立する.

この補題により, 補題の仮定が満たされている時も

$$\text{予想 3} \iff \text{予想 7}$$

が得られる. 補題の仮定は例えば G が位数 $4p$ の二面体群と同型である時に満たされる ([JN, Example 6.22]). 以上のことをまとめると

命題 12. $p \nmid |G|$ 又は G のすべての既約表現の次数が p と素で $\mathcal{I}(\mathbb{Z}_p[G]) = \zeta(\mathfrak{m}_p(G))$ であるならば

$$\text{予想 3} \iff \text{予想 7}$$

最後になるが,

$$\zeta(\mathfrak{m}(G)) = \bigcap_{\text{p:素数}} \zeta(\mathfrak{m}_p(G)) \cap \zeta(\mathbb{Q}[G]),\ \mathfrak{F}(G) = \bigcap_{\text{p:素数}} \mathfrak{F}_p(G) \cap \zeta(\mathbb{Q}[G])$$

が成立するので,

$$\text{予想 6 が成立.} \iff \text{予想 7 が任意の素数 } p \text{ に対して成立.}$$

を得る.

3.3.2 弱非可換 Brumer-Stark 予想

弱非可換 brumer 予想に続いて, 弱非可換 Brumer-Stark 予想の定式化を行う (通常の予想との違いは $\mathcal{H}(G)$ が $\mathfrak{F}(G)$ に変わっている点である).

予想 8. 任意の K の分数イデアル $\mathfrak{A}$ と任意の $x \in \mathfrak{F}(G)$ に対して, ある *anti-unit* $\alpha = \alpha(\mathfrak{A},\ S,\ x) \in K^*$ が存在して

$$\mathfrak{A}^{x\omega_K \theta_{K/k,S}} = (\alpha)$$

さらに, $Hyp(S \cup S_\alpha, T)$ を満たすような任意の T に対して, ある $\alpha_T \in E_\alpha$ が存在して

$$\alpha^{z\delta_T} = \alpha_T^{z\omega_K}$$

が任意の $z \in \mathfrak{F}(G)$ に対して成立する.

この弱予想についてもどの点が弱なのかを K/k をアーベル拡大としてみていこうと思う. 最初のイデアル類群の単項化の部分については弱非可換 Brumer 予想と同様である. 後半分については, 本来

$$K(\alpha^{1/|\mu(K)|})/k \text{ がアーベル拡大}$$

という主張を復元したいが, やはり $\mathfrak{F}(G)$ からは 1 を取ることができないためにおおよそ

$$K(\alpha^{|G|/|\mu(K)|})/k \text{ がアーベル拡大}$$

という主張をしていることになる. $|G|/|\mu(K)|$ が整数になってしまうとそもそも拡大すら怒らないことになるので, 通常よりもアーベル拡大になりやすくなっている. このような点においてこの予想は "弱" であるとえる. また, 弱非可換 Brumer 予想と同様に次の p-部分の予想を得る.

予想 9. $Cl(K)$ での類の位数が p べきであるような任意の K の分数イデアル $\mathfrak{A}$ と任意の $x \in \mathfrak{F}_p(G)$ に対して, ある *anti-unit* $\alpha = \alpha(\mathfrak{A},\ S,\ x) \in K^*$ が存在して

$$\mathfrak{A}^{x\omega_K \theta_{K/k,S}} = (\alpha)$$

さらに, $Hyp(S \cup S_\alpha, T)$ を満たすような任意の T に対して, ある $\alpha_T \in E_\alpha$ が存在して

$$\alpha^{z\delta_T} = \alpha_T^{z\omega_K}$$

が任意の $z \in \mathfrak{F}_p(G)$ に対して成立する.

これまで同様に以下のことが成り立つ.

命題 13.

- 予想 8 $\Longrightarrow$ 予想 6, 予想 9 $\Longrightarrow$ 予想 7.
- 予想 8 が成立. $\Longleftrightarrow$ 予想 9 が任意の素数 p で成立.
- $p \nmid |G|$ 又は G のすべての既約表現の次数が p と素で $\mathcal{I}(\mathbb{Z}_p[G]) = \zeta(\mathfrak{m}_p(G))$ であるならば 予想 5 $\Longleftrightarrow$ 予想 9.

3.4 知られている結果

ここでは, 非可換 Brumer 予想や非可換 Brumer-Stark 予想について現在までに知られている結果を列挙する. 以下 K/k は代数体の有限次ガロワ CM-拡大, p は任意の奇素数, $\mu(K^+)$ は K^+ の円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大に対する岩澤 μ 不変量とする.

1. [Ni11] p が K/k で"non-exceptional"かつ $\mu(K^+)=0$ なら p-部分の非可換 Brumer 予想と非可換 Brumer-Stark 予想が K/k に対して成立する.

2. [Nic] $S\supset S_p$ かつ $\mu(K^+)=0$ なら p-部分の非可換 Brumer 予想と非可換 Brumer-Stark 予想が K/k に対して成立する.

3. [Bu] $\mu(K^+)=0$ と仮定すると, p に対する Gross-Stark 予想と ETNC が正しいならば, p-部分の非可換 Brumer 予想と非可換 Brumer-Stark 予想が K/k に対して成立する.

4. [BJ] p が $K/\mathbb{Q}$ で不分岐かつ $G=\mathrm{Gal}(K/k)$ の任意の惰性群が G で正規なら, $\theta_{K/k,S}$ を "$\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}\,G} d_\chi$"$\theta_{K/k,S}$ に取り替えたものに対して弱非可換 Brumer 予想が成立する.

5. [Nia] 「$K^{cl}\subset(K^+)^{cl}(\zeta_p)$ ならば p の上の K^+ 素点が K/K^+ で不分解」 $\Rightarrow$ p-部分の弱非可換 Brumer 予想と弱非可換 Brumer-Stark 予想が成立する. ただしここで ^{cl} は $\mathbb{Q}$ 上のガロワ閉包を意味するものとする.

6. [No] K/k のガロワ群が位数 $4p$ の二面体群か位数 2^{n+2} の一般四元数群なら 2-部分の外で非可換 Brumer 予想と非可換 Brumer-Stark 予想が成立する. いずれの場合も 2-部分で弱非可換 Brumer 予想と弱非可換 Brumer-Stark 予想が成立する.

参考文献

[Ba] Barsky, D.: *Fonctions zeta p-adique d'une classe de rayon des corps de nombres totalement reels* , Groupe d'Etude d'Analyse Ultrametrique (1977/78), Exp. No. 16

[Bu] Burns, D.: *On derivatives of p-adic L-series at s=0*, preprint

[BJ] Burns, D., Johnston, H.: *A non-abelian Stickelberger Theorem*, Compositio Math. 147 (2011), p. 35-55

[Ca] Cassou-Nogues, P.: *Valeurs aux entiers negatifs des fonctions zeta et fonctions zeta p-adiques*, Invent. Math. 51 (1979), 29-59

[CR] *Methods of Representation Theory with applications to finite groups and orders*, Vol. 1, John Wiley & Sons, (1981)

[DR] Deligne, P., Ribet, K.:*Values of abelian L-functions at negative integers over totally real fields*, Invent. Math. 59 (1980), 227-286

[Ja] Jacobinski, H.: *On extensions of lattices*, Michigan Math. J. 13 (1966), 471-475. MR 0204538 (34 # 4377)

[JN] Johnston, H.,Nickel,A.:*Noncommutative Fitting invariants and improved annihilation results*, preprint , see arXiv:1202.0711

[Ka] Kakde, M.: *The main conjecture of Iwasawa theory for totally real fields*, preprint, see arXiv:1008.0142v3

[Ni10a] Nickel, A.: *Non-commutative Fitting invariants and annihilation of class groups*, J. Algebra **323** (10) (2010), 2756-2778

[Ni10b] Nickel, A.: *On the Equivariant Tamagawa Number Conjecture in tame CM-extensions*, Math. Z. (2010) DOI 10.1007/s00209-009-0658-9

[Ni11] Nickel, A.: *On the equivariant Tamagawa number conjecture in tame CMextensions, II*, Compos. Math. **147 (4)** (2011), 1179-1204

[Nia] Nickel, A.: *On non-abelian Stark-type conjectures*, to appear in Ann. Inst. Fourier

[Nib] Integrality of Stickelberger elements and the equivariant Tamagawa number conjecture, preprint,

[Nic] Nickel, A.: *Equivariant Iwasawa theory and non-abelian Stark-type conjectures*, preprint

[No] Nomura, J.: *On non-abelian Brumer and Brumer-Stark conjecture for supersolvable CM-extensions*, preprint(not available)

[Re] Reiner, I.: *Maximal orders* L.M.S. Monographs, Academic Press, London (1975)

[Ta84] Tate, J.:*Les Conjectures de Stark sur les Fonctions L d 'Artin en s = 0*, Birkhauser, 1984. no. 24