非可換拡大の場合の計算例*

小笠原 健† （九州大学）

はじめに

Stark 予想は，Stark 自身の数値計算をもとに [10, 11, 12, 13] で最初に定式化され，その後も多くの研究者らによって数値計算がなされてきた．その計算例の多くはアーベル拡大の場合で，非可換な拡大に対する計算例としては [5, 7, 8, 14] があるが，他にはあまり知られていないと思われる．

非可換拡大における Stark 予想は，ガロア群の表現の指標が有理数値の場合には正しいことが，Stark や Tate によって証明されている（cf. [11, 15, 20]．従って特に，ガロア群が対称群 S_n に同型であるときは予想が成り立つ）．しかし，指標が有理数値でない場合にはまだ証明されておらず，最も簡単そうに思われる，表現の次数が 2 で，かつ，$r(\chi) = 1$（Artin L 関数の $s = 0$ での位数が 1）の場合においても未解決である．そこで本稿では，ある非可換な有限次ガロア拡大に対して，そのガロア群の 2 次元表現の Artin L 関数の $s = 0$ での微分係数を近似的に計算し，Stark 予想に現れる Stark 単数の計算例を与える．実際の計算は，Stark-Chinburg 予想（予想 3.1) と呼ばれる Stark 予想の変種に基づいて行う．また，今回扱うガロア拡大に対しては，[7, 14] においてすでに L 関数の微分係数が近似計算されているため，本稿の第 4 節で得られる近似値は既知のものであるが，計算において明示的なモジュラー形式を利用している点で，[7, 14] と異なることに注意されたい．

謝辞

整数論サマースクールでの講演，および本報告の執筆の機会をくださった，青木宏樹氏，加塩朋和氏，山本修司氏に厚く御礼申し上げます.

目 次

---

*第 20 回整数論サマースクール「Stark 予想」における講演「非可換拡大の場合の計算例」の報告

†Email: t-ogasawara@math.kyushu-u.ac.jp

1　モジュラー形式に関する記号

ここでは，モジュラー形式に関する記号を準備しておく．
N を正の整数とする．群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の 2 つの部分群 $\Gamma_1(N), \Gamma_0(N)$ は，

$$\Gamma_1(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \ ; \ a \equiv d \equiv 1 \pmod N,\ c \equiv 0 \pmod N \right\},$$

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \ ; \ c \equiv 0 \pmod N \right\}$$

で定義される．k を整数とする．群 $\Gamma_1(N)$ に関する重さ k のモジュラー形式の空間，およびカスプ形式の空間をそれぞれ，$M_k(\Gamma_1(N))$, $S_k(\Gamma_1(N))$ で表す．また，mod N の Dirichlet 指標 ψ に対して，指標 ψ 付きのモジュラー形式，およびカスプ形式の空間をそれぞれ，$M_k(N, \psi)$, $S_k(N, \psi)$ で表す．つまり，

$$M_k(N, \psi) = \{ f \in M_k(\Gamma_1(N)) \ ; \ f|_k\gamma(\tau) = \psi(d) f(\tau) \text{ for all } \gamma \in \Gamma_0(N) \}$$

である．ここで，$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ に対して，$f|_k\gamma(\tau) := (c\tau + d)^{-k} f(\tau)$ であり，$\psi(d)$ の d は γ の右下成分を表す．カスプ形式の空間 $S_k(N, \psi)$ も同様に定義される．

2　Rank one (non-abelian) Stark conjecture と重さ 1 のモジュラー形式

本稿の目的は，非可換ガロア拡大 $K/\mathbb{Q}$ に付随する Artin L 関数の $s = 0$ での微分係数を近似計算し，Stark 予想の信頼性を確認することである．L 関数の微分係数を近似計算

する際には，L 関数の Dirichlet 級数表示 $L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$ における係数 a_n を，十分多く求めることが必要とされる．しかし，係数 a_n，特に $a_p=\chi(\mathrm{Frob}_p)$（$p$ は素数）を求めるには，拡大体 K における素数 p の分解の様子を調べなければならず，これは非可換拡大の場合には一般に難しいことである．K の定義多項式がわかっていれば，計算機を用いて，各素数 p について個別に分解の様子を調べることはできるが，効率があまりよくない．そこで，特に，ガロア群の表現 ρ の次数が 2 で，かつ，ρ の保型性が証明されている場合には，対応するモジュラー形式の Fourier 展開を，テータ級数や Dedekind エータ関数などを用いて表示することができれば，一度に多くの係数 a_n を求めることができるため，近似計算をする際には非常に効率的である．

この節では，表現 ρ の次数が 2 である場合に，その保型性について知られていることを紹介し，$\mathbb{Q}$ 上の rank one Stark conjecture が，重さ 1 のモジュラー形式に関連付けられることを見る．

2.1　ガロア表現の保型性

有理数体 $\mathbb{Q}$ の絶対ガロア群 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ を $G_{\mathbb{Q}}$ で表す．V を $\mathbb{C}$ 上 2 次元のベクトル空間とし，既約かつ連続な線形表現 $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{Aut}(V) \cong \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ が与えられていると仮定する．ここで，$G_{\mathbb{Q}}$ には Krull 位相，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ には離散位相を考えるので，ρ の像は有限群であることに注意する．$\mathrm{Ker}(\rho)$ の固定体を K とおけば，$K/\mathbb{Q}$ は有限次ガロア拡大となり，そのガロア群を G と書く．絶対ガロア群 $G_{\mathbb{Q}}$ を G へ射影することによって，ρ を G の 2 次元複素線形表現とみなし，χ をその指標とするとき，公式

$$r(\chi) := \mathrm{ord}_{s=0}L(s,\chi) = \sum_{v\in S}\dim_{\mathbb{C}} V^{G_w} - \dim_{\mathbb{C}} V^G$$

と，ρ の既約性から，

$$r(\chi) = \dim_{\mathbb{C}} V^{G_w} \tag{1}$$

を得る．ここで，S は $\mathbb{Q}$ の唯 1 つの無限素点からなる集合，w は $v\in S$ の上にある K の素点（つまり，K の無限素点），G_w は w の分解群を表す．

表現 ρ の保型性と $r(\chi)$ の関係を述べるために，次の言葉を定義する．

定義 2.1. 2 次元表現 $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ が “odd”であるとは，複素共役写像に対応する元 $c\in G_{\mathbb{Q}}$ に対して，$\det(\rho(c)) = -1$ が成り立つときをいう．

命題 2.2. 連続な既約表現 $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ に対して，$r(\chi)=1$ であることと，ρ が odd であることは同値である．

証明. まず，(1) より，$r(\chi)=1$ であることと，$\dim_{\mathbb{C}} V^{G_w}=1$ であることは同値であることに注意する．w は K の無限素点であるから，G_w は，複素共役写像に対応する元 $c\in G$

によって生成される位数 2 の群である．行列 $\rho(c)$ は位数 2 であるから，

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{C}} V^{G_w} = 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad \rho(c)\ \text{は，行列} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{に対角化される} \\ &\Longleftrightarrow \quad \det(\rho(c)) = -1 \\ &\Longleftrightarrow \quad \rho\ \text{は odd.}\end{aligned}$$

□

odd な既約表現 $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ の保型性は，（2 次元の場合の）（強）Artin 予想として知られており，Langlands, Tunnell, Buhler, Buzzard–Dickinson–Shepherd-Barron–Taylor ら，多くの研究者による先駆的研究を経て，Khare–Wintenberger による Serre の保型性予想の解決によって，完全に証明された．

定理 2.3. **（（強）Artin 予想）** $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ を連続かつ odd な既約表現であると仮定し，N_ρ を ρ の Artin 導手とする．このとき，重さ 1，レベル N_ρ のカスプ形式 $f \in S_1(N_\rho, \det(\rho))$ で，$L(s, \rho) = L(s, f)$ が成り立つようなものが存在する．

命題 2.2 と定理 2.3 によって，2 次元表現の場合の $\mathbb{Q}$ 上の rank one (non-abelian) Stark conjecture は，重さ 1 のモジュラー形式の L 関数に関する予想としてとらえることができる．数値計算の観点からは，モジュラー形式と結びつけることができるのは有効なことであるが，重さ 1 のモジュラー形式は，重さが 2 以上の場合と異なり，空間 $M_1(\Gamma_1(N)), S_1(\Gamma_1(N))$ の明示的次元公式が知られていないので，一筋縄ではいかない．

2.2 ガロア表現の分類

連続な表現 $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ は，有限群 $\mathrm{Im}(\rho)$ の射影線形群 $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ での像によって分類される．群 $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ の有限部分群は，次のいずれかに同型であることが知られている：

- C_n：位数 n の巡回群（$n \geq 1$），
- D_n：位数 $2n$ の二面体群（dihedral group），
- A_4：4 次交代群（tetrahedral group），
- S_4：4 次対称群（octahedral group），
- A_5：5 次交代群（icosahedral group）．

自然な射影 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ と ρ との合成を $\tilde{\rho}$ と書く；

$$\begin{tikzcd} G_{\mathbb{Q}} \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "\tilde{\rho}"'] & \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \arrow[d] \\ & \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}). \end{tikzcd}$$

像 $\mathrm{Im}(\tilde{\rho})$ が巡回群ならば ρ は可約なので，ρ が既約ならば，$\mathrm{Im}(\tilde{\rho})$ は巡回群以外のどれかに同型である．表現 ρ が既約であるとき，群 $\mathrm{Im}(\tilde{\rho})$ がどのタイプの群に同型であるかによって，ρ を dihedral 型，tetrahedral 型，octahedral 型，icosahedral 型と呼び，定理 2.3 により ρ に対応するモジュラー形式も，dihedral 型，tetrahedral 型などと呼ぶ．

表現 ρ が dihedral 型である場合には，次の定理がある：

定理 2.4. (cf. [9]) 表現 $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ が dihedral 型であると仮定する．このとき，ある 2 次体 $F/\mathbb{Q}$ と，$G_F := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$ の 1 次元表現 $\psi : G_F \to \mathbb{C}^{\times}$ が存在して，$\rho \cong \mathrm{Ind}_{G_F}^{G_{\mathbb{Q}}} \psi$ を満たす．

Artin L 関数は，表現の誘導によって保たれるので，定理 2.4 の状況下で，$L(s, \rho) = L(s, \mathrm{Ind}_{G_F}^{G_{\mathbb{Q}}} \psi) = L(s, \psi)$ が成り立つ．よって，ρ が odd であり，$\mathrm{Im}(\tilde{\rho})$ が二面体群に同型であるような場合には，ρ に対する Stark 予想は 2 次体 F 上の rank one abelian Stark conjecture となる．従って，F が虚 2 次体のときには，本報告集の小野寺氏の記事にあるように予想は証明されている（cf. [16]）．一方，F が実 2 次体の場合には，まだ一般には証明されていない．

表現 ρ が dihedral 型でないときには，ρ は 2 次体のガロア群の 1 次元表現からは誘導されないため，Artin L 関数 $L(s, \rho)$ は "真に非可換" である．このとき，群 $\mathrm{Im}(\rho)$ は，巡回群を核とする A_4, S_4, または A_5 の中心拡大に同型である．群 A_4, S_4, A_5 の巡回群を核とする中心拡大で，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ への既約表現をもつものを見つけることは，それほど容易ではない．ここに，そのようなものの例を挙げておく．

- $(\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3) \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})/(\{\pm I\} \times \langle \overline{2} \rangle)$（$I$ は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ の単位行列）：A_4 の C_4 を核とする中心拡大（cf. [5]）．
- $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$：$S_4$ の C_2 を核とする中心拡大．
- $\mathrm{ESL}_2(\mathbb{F}_5) := \{\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_5)\ ;\ \det(\gamma) = \pm 1\}$：$A_5$ の C_4 を核とする中心拡大（cf. [8]）．

3 Stark-Chinburg 予想

Chinburg は，odd な既約表現 $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ に対して，Artin L 関数の微分 $L'(0, \rho)$ に現れる Stark 単数について予想を提起している．

予想 3.1. (Stark-Chinburg 予想, cf. [5]) $K/\mathbb{Q}$ を有限次ガロア拡大とし，G をそのガロア群とする．$\rho : G \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ を odd な既約表現とし，χ をその指標とする．E を χ の値によって $\mathbb{Q}$ 上生成される体（特に円分体の部分体となる）とし，$\mathcal{D}_E$ を E の共役差積とする．Γ を $E/\mathbb{Q}$ のガロア群とする．このとき，任意の $d \in \mathcal{D}_E^{-1}$ に対して，

$$\epsilon(d) := \exp\left(-\sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma(d) L'(0, \chi^{\gamma}) \right) \tag{2}$$

は K の実単数である．

Chinburg は [5] の中で，いくつかの tetrahedral 型の表現 ρ に対して数値実験を行い，$\epsilon(d)$ が K の単数の平方元になると予想される結果を得ている．$\epsilon(d)$ が K の単数のべき乗になると推測される現象は，[7, 8] においても確認されている．これらの現象を踏まえて，Burns は [2] において Stark-Chinburg 予想の精密化を与えている．これについては第 5 節で解説する．

命題 3.2. (cf. [8]) 予想 3.1 と同じ記号の下，予想 3.1 が正しければ，任意の $\sigma \in G$ と K の任意の無限素点 w に対して，

$$-\log|\epsilon(d)^{\sigma^{-1}}|_w = \sum_{\gamma\in\Gamma}\gamma(d)(\chi^\gamma(\sigma)+\chi^\gamma(\sigma\tau))L'(0,\chi^\gamma) \tag{3}$$

が成り立つ．ここで，τ は w の分解群 G_w の生成元である．

4 計算例

この節では，$\mathbb{Q}$ 上のある $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$-拡大に対して，予想 3.1 の中で定義されている数 $\epsilon(d)$ の近似値を求めることによって，Stark-Chinburg 予想に対するひとつのエビデンスを与える．

4.1 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$-拡大

ここでは，octahedral 型の表現を与える $\mathbb{Q}$ 上の $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$-拡大を紹介する．まず，群 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$ は，対応

$$\Phi : \begin{array}{lcr} \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3) \ni \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \\ \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3) \ni \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\sqrt{-2} & -1+\sqrt{-2} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \end{array} \tag{4}$$

によって，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ に埋め込まれることが知られている．さらに，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$ の中心は $\{\pm I\}$（I は単位行列）であり，$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_3)$ は S_4 に同型なので，$\Phi(\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3))$ の $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ への像も S_4 に同型である．

本稿における計算には，次の命題で与えられるガロア拡大 $K/\mathbb{Q}$ を用いる．

命題 4.1. (cf. [9]) L を多項式 X^4-X-1 の $\mathbb{Q}$ 上の最小分解体とする．このとき，次の３つの性質を満たす 2 次拡大 K/L が存在する；

(i) $K/\mathbb{Q}$ はガロア拡大で，$G := \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$ に同型，

(ii) 対応 (4) から得られる埋め込み $\rho : G \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ は，odd な octahedral 型の表現で，Artin 導手は $N_\rho = 283$.

(iii) G の 1 次元表現 $\det(\rho)$ は，Kronecker 指標 $\left(\frac{-283}{\cdot}\right)$ と同一視される．

命題 4.1 の中の 3 つの性質と定理 2.3 により，重さ 1 のカスプ形式 $F \in S_1(283, \left(\frac{-283}{\cdot}\right))$ で，$L(s,\rho) = L(s,F)$ を満たすものが存在する．

まず，ρ の指標の値が生成する体を E とすると，埋め込み Φ から $E = \mathbb{Q}(\sqrt{-2})$ である．$\Gamma = \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ とし，その生成元を σ で表す．$\mathcal{D}_E$ を E の共役差積とすると，$\mathcal{D}_E^{-1} = \frac{1}{2}\mathbb{Z} + \frac{\sqrt{-2}}{4}\mathbb{Z}$ である．カスプ形式 F の Fourier 係数は環 $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ に属するから，F を

$$F = F_1 + \sqrt{-2}F_2, \quad F_1, F_2 \in \mathbb{Z}[[q]] \tag{5}$$

の形に書くことができる．F の共役 $F^\sigma = F_1 - \sqrt{-2}F_2$ は $S_1(283, \left(\frac{-283}{\cdot}\right))$ に属するから，F_1, F_2 も $S_1(283, \left(\frac{-283}{\cdot}\right))$ の元である．Stark-Chinburg 予想を確かめるには，$\mathcal{D}_E^{-1}$ の $\mathbb{Z}$ 基底 $1/2, \sqrt{-2}/4$ に対して，$\epsilon(1/2), \epsilon(\sqrt{-2}/4)$ を計算すれば十分である．そこで，

$$\begin{aligned}\sum_{\gamma\in\Gamma} \gamma\left(\frac{1}{2}\right) L'(0, F^\gamma) &= \frac{1}{2}\{L'(0,F) + L'(0,F^\sigma)\} \\ &= L'(0, F_1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{\gamma\in\Gamma} \gamma\left(\frac{\sqrt{-2}}{4}\right) L'(0, F^\gamma) &= \frac{\sqrt{-2}}{4}\{L'(0,F) + L'(0,F^\sigma)\} \\ &= -L'(0, F_2)\end{aligned}$$

であることに注意すれば，

$$\epsilon\left(\frac{1}{2}\right) = \exp(-L'(0,F_1)), \qquad \epsilon\left(\frac{\sqrt{-2}}{4}\right) = \exp(L'(0,F_2))$$

となることがわかる．

4.2 計算方法

ここでは，重さ 1 のカスプ形式 f に対して，L 関数 $L(s,f)$ の $s=0$ での微分 $L'(0,f)$ を近似計算する方法を紹介する．そのために，N を正の整数とし，$f \in S_1(\Gamma_1(N))$ とする．f の Mellin 変換 $g_f(s)$ は

$$g_f(s) = \int_0^\infty f(it)t^s \frac{dt}{t}, \quad s \in \mathbb{C}$$

で定義され，

$$g_f(s) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(s,f) \qquad (\mathrm{Re}(s) > 3/2) \tag{6}$$

を満たす．ここで，$\Gamma(s)$ は通常のガンマ関数である．関数 $\Lambda_N(s,f)$ を

$$\Lambda_N(s,f) = N^{\frac{s}{2}} g_f(s)$$

で定義すると，f がカスプ形式であることから，$\Lambda_N(s,f)$ は $\mathbb{C}$ 上の正則関数となる．

(6) より，L 関数 $L(s,f)$ の微分は，

$$L'(s,f) = ((2\pi)^s\Gamma(s)^{-1})' g_f(s) + (2\pi)^s\Gamma(s)^{-1} g_f'(s) \tag{7}$$

となる．ガンマ関数 $\Gamma(s)$ は，$s=0$ で 1 位の極をもち，その留数は 1 であるから，$\Gamma(s)^{-1}$ は $s=0$ で 1 位の零をもつ．また，$\lim_{s\to 0} 1/(s\Gamma(s)) = \lim_{s\to 0} 1/\Gamma(s+1) = 1$ であるから，$(\Gamma(s)^{-1})'|_{s=0} = 1$ である．よって，

$$\lim_{s\to 0}((2\pi)^s\Gamma(s)^{-1})' = \lim_{s\to 0}\{((2\pi)^s)'\Gamma(s)^{-1} + (2\pi)^s(\Gamma(s)^{-1})'\} = 1$$

となる．関数 $\Lambda_N(s,f)$ の正則性から，$g_f(s)$ は $s=0$ で正則なので，(7) で $s\to 0$ とすることによって，次を得る．

命題 4.2. $f\in S_1(\Gamma_1(N))$ に対して，

$$L'(0,f) = g_f(0) = \int_0^\infty f(it)\frac{dt}{t}$$

が成り立つ．

積分 $\displaystyle\int_0^\infty f(it)\frac{dt}{t}$ のよい近似値を得るために，関数 $\Lambda_N(s,f)$ の関数等式を利用する．

まず，k を正の整数として，重さ k のカスプ形式の空間 $S_k(\Gamma_1(N))$ 上の作用素 W_N を，

$$f|_kW_N(\tau) = N^{\frac{k}{2}}\left(\frac{1}{N\tau}\right)^k f\left(-\frac{1}{N\tau}\right),\quad f\in S_k(\Gamma_1(N))$$

で定義する．作用素 W_N は，k が偶数のときは位数 2，k が奇数のときは位数 4 なので，$S_k(\Gamma_1(N))$ は次のように固有空間に分解される；

$$S_k(\Gamma_1(N)) = S_k^+(\Gamma_1(N))\oplus S_k^-(\Gamma_1(N)), \tag{8}$$

ここで，

$$S_k^+(\Gamma_1(N)) = \{f\in S_k(\Gamma_1(N))\ ;\ f|_kW_N = i^{-k}f\},$$
$$S_k^-(\Gamma_1(N)) = \{f\in S_k(\Gamma_1(N))\ ;\ f|_kW_N = -i^{-k}f\}.$$

$f\in S_1(\Gamma_1(N))$ をとり，分解 (8) を用いて，

$$f = f^+ + f^-,\qquad f^+\in S_1^+(\Gamma_1(N)),\ f^-\in S_1^-(\Gamma_1(N))$$

の形に表す．$f^+\in S_1^+(\Gamma_1(N))$ と $f^-\in S_1^-(\Gamma_1(N))$ に対しては，関数等式

$$\Lambda_N(1-s,f^\pm) = \pm\Lambda_N(s,f^\pm)$$

が成り立つので，

$$\begin{aligned}
g_f(s) &= g_{f^+}(s) + g_{f^-}(s)\\
&= N^{\frac{s}{2}}\{\Lambda_N(s,f^+) + \Lambda_N(s,f^-)\}\\
&= N^{\frac{s}{2}}\left\{\int_1^\infty \left(f^+(it/\sqrt{N}) + f^-(it/\sqrt{N})\right)t^s\frac{dt}{t}\right.\\
&\qquad\left. + \int_1^\infty \left(f^+(it/\sqrt{N}) - f^-(it/\sqrt{N})\right)t^{1-s}\frac{dt}{t}\right\}.
\end{aligned} \tag{9}$$

となる．ここで，f^+ と f^- の Fourier 展開を

$$f^+(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n, \qquad f^-(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n q^n$$

として (9) に代入し，変数変換 $t \to 2\pi nt/\sqrt{N}$ を行い，さらに $s = 0$ とすると，

$$\begin{aligned} g_f(0) &= L'(0, f) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) \int_{2\pi n/\sqrt{N}}^{\infty} e^{-t}\frac{dt}{t} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)\left(\frac{\sqrt{N}}{2\pi n}\right) \int_{2\pi n/\sqrt{N}}^{\infty} e^{-t} dt. \end{aligned} \tag{10}$$

を得る．PARI/GP には，複素数 s, x に対して，積分 $\displaystyle\int_x^{\infty} e^{-t} t^s \frac{dt}{t}$ の近似値を計算するコマンド incgam(s, x) があるので，f^+ と f^- の Fourier 係数が十分多くわかっていれば，公式 (10) を用いて $L'(0, f)$ の近似値を計算することができる．

4.3 計算結果

小節 4.1 で与えられたカスプ形式 $F = F_1 + \sqrt{-2}F_2 \in S_1(283, \left(\frac{-283}{\cdot}\right))$（(5) を参照）に対して，$L'(0, F)$ を計算するには，F の Fourier 係数をたくさん求めることが必要である．しかし，dihedral 型以外のカスプ形式は，関数としての明示的表示を見つけることが難しく，従って，Fourier 係数を求めることも困難である．しかし，ここで扱う F に対しては，テータ級数を用いて明示的な表示を与えることができた．$\Theta(\tau)$ を

$$\Theta(\tau) = \frac{1}{2}\left(\sum_{x,y\in\mathbb{Z}} q^{x^2+xy+71y^2} - \sum_{x,y\in\mathbb{Z}} q^{7x^2+5xy+11y^2}\right) \tag{11}$$

で定義されるテータ級数とする．これは $S_1(283, \left(\frac{-283}{\cdot}\right))$ に属する dihedral 型の Hecke 固有形式である．

命題 4.3. ある有理数の組 $(c_1, c_2, \ldots, c_{14}), (d_1, d_2, \ldots, d_{14}) \in \mathbb{Q}^{14}$ が存在し，

$$F_1\Theta = \sum_{i=1}^{14} c_i \Theta^2 | T_i, \tag{12}$$

$$F_2^2 = \sum_{i=1}^{14} d_i \Theta^2 | T_i \tag{13}$$

が成り立つ．ここで，T_i は i 番目の Hecke 作用素を表す．

この結果は計算機によるもので，係数 c_i, d_i も具体的に求めることができ，$c_1 = -2857/13$, $c_2 = -1015/13, d_1 = 2986/13, d_2 = 2121/26$ などとなる．等式 (12) および (13) はいずれも，重さ 2 のカスプ形式の空間 $S_2(\Gamma_0(283))$ であることを注意しておく．テータ級数 Θ の Fourier 係数は容易に計算できるので，この表示を用いて F_1, F_2 の Fourier 係数を一度に

たくさん求めることができる（今回の計算では，2000 番目までの Fourier 係数を求めた）．また，計算機によって，$F_1 \in S_1^+(283, \left(\frac{-283}{\cdot}\right)), F_2 \in S_1^-(283, \left(\frac{-283}{\cdot}\right))$ であることが確かめられる．

$\epsilon(1/2), \epsilon(\sqrt{-2}/4)$ の近似値は，次のようになった；

$$\epsilon(1/2) = 0.0847415069278934578147437772805730481235696028324639 83\cdots, \quad (14)$$

$$\epsilon(\sqrt{-2}/4) = 0.85450114576182855296326224478732649949293097523773054834\cdots. \quad (15)$$

これらの数が単数であるかどうかを調べるために，PARI/GP のコマンド `algdep( , )` を利用する．これは，適当な precision の下で，実数 α と正の整数 n に対して，α が満たす $\mathbb{Z}$ 係数の高々n 次の多項式を返すコマンドである．例えば，precision = 10 の下で，`algdep`(sqrt(5), 2) を実行すると，$x^2 - 5$ という正しい式が出力される．

(14)，(15) で得られた $\epsilon(1/2), \epsilon(\sqrt{-2}/4)$ の近似値に対しては，precision = 320 の下で，次の結果が得られた；

$$\begin{aligned}
&\texttt{algdep}(\epsilon(1/2), 24)\\
&= x^{24} - 7x^{23} - 13x^{22} - 306x^{21} - 1449x^{20} - 8398x^{19} - 29936x^{18} - 115420x^{17}\\
&-334203x^{16} - 813903x^{15} - 1788595x^{14} - 3104999x^{13} - 3770787x^{12} - 3104999x^{11}\\
&-1788595x^{10} - 813903x^{9} - 334203x^{8} - 115420x^{7} - 29936x^{6} - 8398x^{5} - 1449x^{4}\\
&-306x^{3} - 13x^{2} - 7x + 1, \qquad (16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\texttt{algdep}(\epsilon(\sqrt{-2}/4), 24)\\
&= x^{24} + 2x^{23} + 29x^{22} + 37x^{21} + 260x^{20} + 196x^{19} + 239x^{18} - 520x^{17} - 4355x^{16}\\
&+557x^{15} + 11397x^{14} - 343x^{13} - 15283x^{12} - 343x^{11} + 11397x^{10} + 557x^{9} - 4355x^{8}\\
&-520x^{7} + 239x^{6} + 196x^{5} + 260x^{4} + 37x^{3} + 29x^{2} + 2x + 1. \qquad (17)
\end{aligned}$$

多項式 (16)，(17) をそれぞれ $h_1(x), h_2(x)$ とおく．多項式 h_1, h_2 はともに次の性質をもつ；

(i) $\mathbb{Q}$ 上既約,

(ii) 自己相反多項式（i.e. x^i の係数を a_i とすると，$a_i = a_{24-i}$），

(iii) h_1, h_2 が $\mathbb{Q}$ 上定義する代数体の判別式は，$(-1) \cdot 283^{11}$,

(iv) $\mathbb{Q}$ 上の Galois 群は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$ に同型.

命題 4.1 と性質 (iii) および (iv) は整合的であることから，この計算結果の信頼性がうかがえる．また，多項式 h_1, h_2 の定数項が 1 であることから，2 つの実数 $\epsilon(1/2), \epsilon(\sqrt{-2}/4)$ は単数であることが予想され，さらに，性質 (iii) と (iv) から，体 $\mathbb{Q}(\epsilon(1/2))$ および $\mathbb{Q}(\epsilon(\sqrt{-2}/4))$ のガロア閉包が K に一致することも予想される．なお，(16)，(17) において，多項式の最大次数を 24 に設定しているのは，23 次までの設定では，上記の 4 つのような，よい性質をもつ多項式が得られないからである．

ここまでの計算は，$\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$ の逆共役差積 $\mathcal{D}_E^{-1}$ の $\mathbb{Z}$ 基底 $1/2, \sqrt{-2}/4$ に対して，$\epsilon(1/2)$, $\epsilon(\sqrt{-2}/4)$ が単数であることを予想させるものであるが，実は次の計算結果により，これらが K の平方元であることが予想される；

$$\begin{aligned}
&\texttt{algdep}(\epsilon(1/2)^{1/2}, 24)\\
&= x^{24} - 9x^{23} + 37x^{22} - 98x^{21} + 191x^{20} - 342x^{19} + 660x^{18} - 1392x^{17} + 2659x^{16}\\
&-4459x^{15} + 6387x^{14} - 8051x^{13} + 8549x^{12} - 8051x^{11} + 6387x^{10} - 4459x^{9} + 2659x^{8}\\
&-1392x^{7} + 660x^{6} - 342x^{5} + 191x^{4} - 98x^{3} + 37x^{2} - 9x + 1, \qquad (18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\texttt{algdep}(\epsilon(\sqrt{-2}/4)^{1/2}, 24)\\
&= x^{24} + 6x^{23} + 19x^{22} + 41x^{21} + 80x^{20} + 158x^{19} + 287x^{18} + 406x^{17} + 391x^{16}\\
&+137x^{15} - 341x^{14} - 819x^{13} - 1015x^{12} - 819x^{11} - 341x^{10} + 137x^{9} + 391x^{8}\\
&+406x^{7} + 287x^{6} + 158x^{5} + 80x^{4} + 41x^{3} + 19x^{2} + 6x + 1. \qquad (19)
\end{aligned}$$

多項式 (18)，(19) も，多項式 h_1, h_2 と共通の性質（上記 (i)〜(iv)）をもつ．

実数 $\epsilon(1/2), \epsilon(\sqrt{-2}/4)$ が K の 3 乗元であるかどうかの確認，つまり，$\texttt{algdep}(\epsilon(1/2)^{1/3}, 24)$, $\texttt{algdep}(\epsilon(\sqrt{-2}/4)^{1/3}, 24)$ については，よい多項式が得られなかった．従って，実際にこれらが K の 3 乗元ではないのか，あるいは，K の 3 乗元であるが，計算の精度の問題で適切な多項式が得られなかったのかは，判断できなかった．

注意 4.4. 命題 4.1 で与えられている拡大 $K/\mathbb{Q}$ と表現 ρ に対する $\epsilon(d)$ の近似値は，Fogel によってすでに計算されており（cf. [7]），$\epsilon(1/2)^{1/2}$ と $\epsilon(\sqrt{-2}/4)^{1/2}$ に対して，(18) および (19) と同じ多項式を得ている．ただし，Fogel の計算では，モジュラー形式は用いておらず，拡大 $K/\mathbb{Q}$ における各素数の分解を調べることで，Artin L 関数 $L(s,\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n/n^s$ の係数 a_n を求めている．

5 Burns による Stark-Chinburg 予想の精密化

この節の内容については，文献 [2] を参照されたい．

5.1 記号

この節では，次の記号を用いる：

- G：有限群.
- χ：G の有限次元既約複素指標，$\overline{\chi}$：χ の複素共役.
- $E := \mathbb{Q}(\chi) = \mathbb{Q}(\chi(g)\ ;\ g \in G)$.
- $e_{\overline{\chi}} := \dfrac{\chi(1)}{|G|} \displaystyle\sum_{g \in G} \chi(g) g \in E[G]$：central idempotent.
- $f_{\overline{\chi}}$：$E[G]e_{\overline{\chi}}$ の indecomposable idempotent (fixed).

- $\mathcal{O}$: E の整数環.
- $\mathfrak{M}$: $E[G]$ の maximal $\mathcal{O}$-order で，$f_{\overline{\chi}}$ を含むもの.
- $T_\chi := f_{\overline{\chi}}\mathfrak{M}$: $\mathcal{O}$-torsion-free right $\mathcal{O}[G]$-module.
- $V_\chi := E \otimes_{\mathcal{O}} T_\chi$ (V_χ は，G の表現として指標 $\overline{\chi}$ をもつ).

G-加群 M に対して，

$$M[\chi] := T_\chi \otimes_{\mathbb{Z}} M$$

とおく．$M[\chi]$ には，G が

$$g \cdot (t \otimes m) := t \cdot g^{-1} \otimes g \cdot m,\ (t \in T_\chi, m \in M, g \in G)$$

により左から作用する．さらに，

- $M^\chi := M[\chi]^G$: 自明な G-作用をもつ $M[\chi]$ の最大部分加群,
- $M_\chi := M[\chi]_G$: 自明な G-作用をもつ $M[\chi]$ の最大商加群

とおく．また，$\widehat{H}^i(G, M)$ $(i \in \mathbb{Z})$ で Tate cohomology 群を表す．特に，$\widetilde{N_G} : M_G \to M^G$ を norm 写像（i.e. $\widetilde{N_G}(\overline{m}) = \sum_{g \in G} g \cdot m,\ m \in M,\ \overline{m} \in M_G$）とするとき，

$$\widehat{H}^{-1}(G, M) = \mathrm{Ker}(\widetilde{N_G}),\quad \widehat{H}^0(G, M) = \mathrm{Coker}(\widetilde{N_G})$$

である．

M_{tor} を M の torsion 元全体からなる部分加群とし，

$$\overline{M} := M/M_{\mathrm{tor}}$$

とおく．

5.2 Burns による精密化

K/k を大域体の有限次ガロア拡大，G をそのガロア群とする．χ を G の有限次元既約複素指標とする．S_∞ を k の無限素点全体からなる集合とし，S を k の素点からなる有限集合で，$S_\infty \subset S$ を満たし，かつ，K で分岐するすべての有限素点を含むようなものとする．S_K を S の上にある K の素点全体からなる有限集合とする．U_S を K の S_K 単数全体のなす群とし，

$$X_S := \left\{ \sum_{w \in S_K} a_w \cdot w\ ;\ \sum_{w \in S_K} a_w = 0 \right\}$$

とおく．Dirichlet の単数定理により，次の写像 λ_S は $\mathbb{R}[G]$-同型写像である：

$$\lambda_S : \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} U_S \to \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} X_S\ ;\ \lambda_S(u) := -\sum_{w \in S_K} \log |u|_w \cdot w,\quad (u \in U_S).$$

G-加群の単射準同型 $\varphi : X_S \to U_S$ を 1 つ選び,

$$R^S_\varphi(\chi) := \det_{\mathbb{C}}((\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \lambda_S) \circ (\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} \varphi) | (\mathbb{C} \otimes_E V_\chi) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} X_S) \in \mathbb{C}^\times$$

とおく．Stark 予想は,

$$L^*_S(0, \chi) \cdot \wedge^{r_S}_E (V_\chi \otimes_{\mathbb{Z}[G]} X_S) = \lambda^{(\chi)}_S (\wedge^{r_S}_E (V_\chi \otimes_{\mathbb{Z}[G]} X_S))$$

が成り立つことを予測している．ここで,

$$r_S := r_S(\chi) = \sum_{v \in S} \dim_E V^{G_w}_\chi = \mathrm{ord}_{s=0} L_S(s, \chi)$$

であり（w は $v \in S$ の上にある K の素点．以後，同様の表記を用いる），$\lambda^{(\chi)}_S$ は，λ_S により誘導される同型

$$\lambda^{(\chi)}_S : \mathbb{C} \otimes_E (\wedge^{r_S}_E (V_\chi \otimes_{\mathbb{Z}[G]} U_S)) \to \mathbb{C} \otimes_E (\wedge^{r_S}_E (V_\chi \otimes_{\mathbb{Z}[G]} X_S))$$

を表し，さらに，$L^*_S(0, \chi)$ は，Artin L 関数 $L_S(s, \chi)$ の $s = 0$ での Taylor 展開の先頭係数を表す.

注意 5.1. Burns は上記のように，Stark regurator $R^S_\varphi(\chi)$ を，最大 G-不変商 $((\mathbb{C} \otimes_E V_\chi) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}X)_G \cong (\mathbb{C} \otimes_E V_\chi) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{C}X$ 上の自己同型 $(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \lambda_S) \circ (\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} \varphi)$ の行列式として定義しているが，元々Tate は最大 G-不変部分加群 $((\mathbb{C} \otimes_E V_\chi) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}X)^G$ 上で Stark regulator を定義している（cf. [15]）．しかし，実際には，Burns の定義は Tate が定義したものと同じ regulator を与える.

T を，k の有限素点からなる有限集合で，次の 2 条件を満たすようなものとする：

1. $S \cap T = \phi$,
2. U_S の部分群 $U_{S,T} := \{u \in U_S \ ; \ u \equiv 1 \pmod{v} \text{ for all } v \in T_K\}$ が torsion-free.

L 関数 $L_S(s, \chi)$ に対して,

$$L^*_{S,T}(0, \chi) := L^*_S(0, \chi) \prod_{v \in T} \det_E(1 - N(v) \cdot \mathrm{Frob}^{-1}_w | V_\chi) \in \mathbb{C}^\times$$

とおく．素点の有限集合 T を考えるのは，単数群 U_S を torsion-free な部分群 $U_{S,T}$ に置き換えることで，torsion 元の存在に由来する面倒を避けるためと，Stark 単数のあるべき乗根が，k のアーベル拡大を生成することの証明へのアプローチに有効であると考えられているためである（cf. [18, 19]）.

予想 5.2. (Burns [2], 2008) 上記仮定の下で，$\mathbb{C} \otimes_E (\wedge^{r_S}_E (V_\chi \otimes_{\mathbb{Z}[G]} X_S))$ における包含関係

$$|G|^{r_S} L^*_{S,T}(0, \chi) \cdot \wedge^{r_S}_{\mathcal{O}} \overline{(X_S)_\chi} \subset \mathrm{Fit}_{\mathcal{O}}(\widehat{H}^{-1}(G, X_S[\chi])) \cdot \lambda^{(\chi)}_S (\wedge^{r_S}_{\mathcal{O}} U^\chi_{S,T}) \qquad (20)$$

が成り立つ．ここで，$\mathrm{Fit}_{\mathcal{O}}(\cdot)$ は，$\mathcal{O}$-加群に対する Fitting イデアルを表す.

予想 5.2 を仮定すると，Stark-Chinburg 予想（予想 3.1）の精密化が得られる：

命題 5.3. (Refined Stark-Chinburg Conjecture, Burns [2], 2008)
k を代数体，$\mathcal{D}_E$ を E の共役差積，$|S| > 1$，$r_S(\chi) = 1$，$\chi(1) = 2$ と仮定し，さらに，$v \in S_\infty$ に対して，$V_\chi^{G_w} \neq 0$ とする．このとき，予想 5.2 が正しければ，各 $d \in \mathrm{Fit}_{\mathcal{O}}(\widehat{H}^{-1}(G, X_S[\chi]))^{-1}\mathcal{D}_E^{-1}$ に対して，

$$\epsilon(d) = \exp\left(-\sum_{\gamma\in\Gamma}\gamma(d)L'_{S,T}(0,\chi^\gamma)\right)$$

は K の実単数である．ここで，$\Gamma := \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ である．

Burns は [2] の中で，予想 5.2 の (20) に現れるイデアル $\mathrm{Fit}_{\mathcal{O}}(\widehat{H}^{-1}(G, X_S[\chi]))$ が，$\epsilon(d)$ の "extra divisibility" を表すだろうと述べている．すなわち，m を $\mathrm{Fit}_{\mathcal{O}}(\widehat{H}^{-1}(G, X_S[\chi])) \subset m\cdot\mathcal{O}$ を満たす最大の整数とするとき，$d \in \mathcal{D}_E^{-1}$ に対して，$\epsilon(d)$ は K の m 乗元であるだろうと予想している．

参考文献

[1] J. Buhler, *Icosahedral Galois representations*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 654. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1978.

[2] D. Burns, On refined Stark conjectures in the non-abelian case. Math. Res Lett. **15** (2008), 841–856.

[3] D. Burns, On derivatives of Artin L-series, Invent. Math. **186** (2011), 291–371.

[4] K. Buzzard, M. Dickinson, N. Shepherd-Barron, R. Taylor, On icosahedral Artin representations, Duke Math. **109** (2001), no. 2, 283–318.

[5] T. Chinburg, Stark's conjecture for L-functions with first-order zeroes at $s = 0$, Adv. in Math. **48** (1983), no. 1, 82–113.

[6] D. Dummit, J. Sands, B. Tangedal, Computing Stark units for totally real cubic fields, Math. Comp. **66** (1997), no. 219, 1239–1267.

[7] K. Fogel, Stark's conjecture for octahedral extensions, Thesis (Ph.D.)–The University of Texas at Austin. 1998. 75 pp.

[8] A. Jehanne, X-F. Roblot, J. Sands, Numerical verification of the Stark-Chinburg conjecture for some icosahedral representations, Experimental Math. **12** (2003), no. 4, 419–432.

[9] J. P. Serre, Modular forms of weight one and Galois representations. Algebraic Number Fields, édité par A. Fróhlich, Acad. Press (1977), 193–268.

[10] H. Stark, Values of L-functions at $s = 1$. I. L-functions for quadratic forms, Adv. in Math. **7** (1971), 301–343.

[11] H. Stark, L-functions at $s = 1$. II. Artin L-functions with rational characters, Adv. in Math. **17** (1975), 60–92.

[12] H. Stark, L-functions at $s = 1$. III. Totally real fields and Hilbert's twelfth problem, Adv. in Math. **22** (1976), 64–84.

[13] H. Stark, L-functions at $s = 1$. IV. First derivatives at $s = 0$, Adv. in Math. **35** (1980), 197–235.

[14] Y. Tanigawa, On cusp forms of octahedral type, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **62** (1986), no. 7, 270–273.

[15] J. Tate, *Les Conjectures de Stark sur les Fonctions L d'Artin en* $s = 0$. Birkhäuser, Boston, 1984.

[16] 小野寺一浩, 虚二次体上の Stark 予想の証明, 本報告集.

[17] 加塩朋和, Stark-Tate の定式化, 本報告集.

[18] 加塩朋和, Rubin's integral refinement, 本報告集.

[19] 三浦崇, Brumer-Stark 予想, 本報告集.

[20] 山本修司, 有理指標に対する Stark 予想の証明, 本報告集.