

虚二次体上の Stark 予想の証明

小野寺一浩 (東京工業大学)

はじめに

本稿では、虚二次体上の rank one abelian Stark conjecture を実際に証明する。本文は五節からなり、最初の節ではその予想について復習した後で本稿で証明すべき主定理を述べる。その後の二節では、証明のための準備として、主に Siegel 関数の性質を説明する。第四節では、主定理の証明を与えるが、ある場合にはより細かい議論が必要となるので、それは最後の第五節で扱う。

■記号 有理整数環、有理数体、実数体、複素数体をそれぞれ $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ で表す。また複素上半平面を $\mathbb{H}$ と書く。

1 主定理

k を代数体、 K/k を有限次 Abel 拡大とする。 S を以下の三条件を満たす k の素点の有限集合とする：

- S は無限素点と K で分岐する有限素点を全て含む。
- S は K で完全分解する素点を少なくとも一つ含む。
- $|S| \geq 2$ 。

$\mathcal{O}_k$ で k の整数環を表し、 k の整イデアル $\mathfrak{b} \subset \mathcal{O}_k$ で $(\mathfrak{b}, S) = 1$ (即ち $\mathfrak{b}$ は S に含まれる有限素点と互いに素) を満たすものに対して、 $\sigma_{\mathfrak{b}} = (\mathfrak{b}, K/k)$ (Artin 記号) とおく。ここで $\sigma \in G = \text{Gal}(K/k)$ に付随する部分ゼータ関数を

$$\zeta_S(s, \sigma) = \sum_{\substack{\mathfrak{b} \subset \mathcal{O}_k \\ (\mathfrak{b}, S) = 1 \\ \sigma_{\mathfrak{b}} = \sigma}} N(\mathfrak{b})^{-s} \quad (s \in \mathbb{C}, \text{Re}(s) > 1)$$

で定義する。 $\zeta_S(s, \sigma)$ は複素平面全体に有理型接続され、 $s = 1$ で一位の極をもつ他は正則である。

K で完全分解する素点 $v \in S$ を一つ固定する。 K の S -単数全体を $U_{K,S}$ で表し、その部分集合 $U^v, U_{K/k}^{\text{ab}}$ を次で定義する： $|S| \geq 3$ のとき

$$U^v = \{\varepsilon \in U_{K,S} : \text{任意の } K \text{ の素点 } w' \nmid v \text{ に対して } |\varepsilon|_{w'} = 1\}$$

とおく。但し $|\cdot|_{w'}$ は w' の正規付値である。 $S = \{v, v'\}$ ($v \neq v'$) のときは、 K の素点 $w' | v'$ を一つ固定して

$$U^v = \{\varepsilon \in U_{K,S} : \text{任意の } \sigma \in G \text{ に対して } |\varepsilon|_{\sigma w'} = |\varepsilon|_{w'}\}$$

とおく. 明らかに U^v は w' の選び方に依らない. 最後に

$$U_{K/k}^{\text{ab}} = \{\varepsilon \in U_{K,S} : K(\varepsilon^{1/e})/k \text{ は Abel 拡大} \}$$

とおく. 但し, $\mu(K)$ を K に含まれる 1 の中根全体とし $e = |\mu(K)|$ とする.

予想 $\text{St}(K/k, S, v)$. K の素点 $w|v$ を一つ固定する. このとき, ある $\varepsilon \in U^v \cap U_{K/k}^{\text{ab}}$ が存在して, 任意の $\sigma \in G$ に対して

$$\log |\varepsilon^\sigma|_w = -e\zeta'(0, \sigma)$$

が成り立つ.

$|\varepsilon^\sigma|_w = |\varepsilon|_{\sigma^{-1}w}$ より, 予想の正否は w の取り方に依らない. ここに現れる S -単数 ε を Stark 単数と呼ぶ.

定理 1 (Stark [7]). k が虚二次体のとき, $\text{St}(K/k, S, v)$ は正しい.

本稿の目的は, この定理 1 を証明することであるが, 後節で実際に扱うのは次の主張である.

定理 2. k を虚二次体とし, $\mathfrak{f}$ を k の整イデアル $\neq (1)$ とする. K を $\mathfrak{f}$ を法とする ray class field $k_{\mathfrak{f}}$ とし, S を k の無限素点 ∞ と $\mathfrak{f}$ を割る有限素点全体がなす集合とする. また $v = \infty$ とおく. このとき $\text{St}(K/k, S, v)$ は正しい.

定理 2 は明らかに定理 1 から従うが, Stark 予想に関する次の事実を用いれば, その逆が言える.

命題 1.1 (cf. [1, §4.3]). (1) S が K で完全分解する素点を少なくとも二つ含むとき, $\text{St}(K/k, S, v)$ は正しい.

(2) $S \subset S'$ のとき, $\text{St}(K/k, S, v)$ が正しければ, $\text{St}(K/k, S', v)$ も正しい.

(3) $F \subset K$ のとき, $\text{St}(K/k, S, v)$ が正しければ, $\text{St}(F/k, S, v)$ も正しい.

実際, 以下のようにして定理 2 から定理 1 が従う. まず命題 1.1(1) から, v が k の無限素点 ∞ でなければ, $\text{St}(K/k, S, v)$ は正しいので, $v = \infty$ の場合だけ考えれば良い. 今 K/k の導手を $\mathfrak{m}$ とする. $\mathfrak{m} \neq (1)$ のとき, $K' = k_{\mathfrak{m}}$ とおき, S' を $v = \infty$ と $\mathfrak{m}$ を割る有限素点全体のなす集合とすると, $K \subset K'$, $S' \subset S$ である. よって, 定理 2 が成り立てば, $\text{St}(K'/k, S', v)$ は正しく, 命題 1.1(3) より $\text{St}(K/k, S', v)$ も正しい. 更に命題 1.1(2) より $\text{St}(K/k, S, v)$ も正しくなるので, 定理 1 が成り立つ. $\mathfrak{m} = (1)$ のときは, S に含まれる有限素点 $\mathfrak{p}$ を一つ固定して, $K' = k_{\mathfrak{p}}$, $S' = \{v, \mathfrak{p}\}$ とおけば, 同様である.

2 Siegel 関数

$\tau \in \mathbb{H}$, $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ に対して, $z = u_1\tau + u_2$ とおき, Siegel 関数を次で定義する:

$$g_u(\tau) = -q_\tau^{B_2(u_1)/2} e^{\pi i u_2(u_1-1)} (1 - q_z) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q_\tau^n q_z)(1 - q_\tau^n q_z^{-1}). \quad (2.1)$$

但し, $B_2(X) = X^2 - X + 1/6$ とし, $r, w \in \mathbb{C}$ に対して $q_w^r = e^{2\pi i r w}$ とする.

§4 において Stark 単数をこの Siegel 関数を用いて構成する．そこで本節では、その際に必要となる Siegel 関数の性質について述べる．まず次は定義から直ちに従う．

命題 2.1. (1) $m = (m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2$ に対して

$$g_{u+m}(\tau) = (-1)^{m_1 m_2 + m_1 + m_2} e^{\pi i (m_2 u_1 - m_1 u_2)} g_u(\tau).$$

$$(2) g_{-u}(\tau) = -g_u(\tau).$$

2.1 Kronecker の第二極限公式

$\tau = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}, y > 0$) と $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2$ に対して

$$\zeta(s, u, \tau) = y^s \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} |(n_1 + u_1)\tau + n_2 + u_2|^{-2s} \quad (s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(s) > 1) \quad (2.2)$$

とおく．

命題 2.2. $\zeta(s, u, \tau)$ は s に関して複素平面全体に有理型に接続され、

$$\zeta(s, u, \tau) \sim -\log |g_u(\tau)|^2 \cdot s \quad (s \rightarrow 0) \quad (2.3)$$

を満たす．

(2.3) は Kronecker の第二極限公式と呼ばれる．証明については [7, §2,3] を参考にせよ．そこでは証明の一部で発散級数を用いた形式的な議論を行っているが、容易に修正できる．

注意 2.1. Kronecker の第二極限公式とは、元々は

$$E(s, u, \tau) = y^s \sum_{\substack{n_1, n_2 \in \mathbb{Z} \\ (n_1, n_2) \neq (0,0)}} \frac{e^{-2\pi i (n_1 u_2 - n_2 u_1)}}{|n_1 \tau + n_2|^{2s}}$$

に関する公式

$$E(1, u, \tau) = -\pi \log |g_u(\tau)|^2$$

を意味する [3, 6]．この式と (2.3) が同値であることは、函数等式

$$\pi^{-s} \Gamma(s) \zeta(s, u, \tau) = \pi^{-(1-s)} \Gamma(1-s) E(1-s, u, \tau)$$

[6, Chapter I, §5] から直ちに分かる．

2.2 モジュラー群に関する変換公式

$\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ とおく．

命題 2.3. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ に対して

$$g_u(A\tau) = \omega(A)g_{uA}(\tau) \quad (u \in \mathbb{R}^2, \tau \in \mathbb{H}) \quad (2.4)$$

を満たす A だけで定まる 1 の 12 乗根 $\omega(A)$ が存在する. 但し, $A\tau = (a\tau + b)/(c\tau + d)$, $uA = (au_1 + cu_2, bu_1 + du_2)$ である.

Stark の論文 [7, p.208] では Jacobi の三重積公式を認めてこれを証明している. 本稿では, そこで触れられている Siegel [6] の方法を参考までに紹介する.

命題 2.3 の証明. $D = \{(z, \tau) \in \mathbb{C} \times \mathbb{H} : z \notin \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}\}$ とおく. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ と $(z, \tau) \in D$ に対して

$$\omega(A, z, \tau) = \frac{g_{vA^{-1}}(A\tau)}{g_v(\tau)}$$

を考える. 但し $v = (v_1, v_2)$ は $z = v_1\tau + v_2$ を満たす実数の組とする.

まず $\omega(A, z, \tau)$ は (z, τ) に関して D 上正則である. 実際, D 上で正則かつ零にはならない函数

$$g(z, \tau) = -q_\tau^{1/12} q_z^{-1/2} (1 - q_z) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q_\tau^n q_z) (1 - q_\tau^n q_z^{-1})$$

を用いると, $g_v(\tau) = e^{\pi i v_1 z} g(z, \tau)$ より

$$\omega(A, z, \tau) = e^{-\pi i c z^2 / (c\tau + d)} \frac{g(z / (c\tau + d), A\tau)}{g(z, \tau)}$$

と表示できるからである.

次に D 上で $|\omega(A, z, \tau)| = 1$ となることを Kronecker の極限公式を利用して示す. $\operatorname{Re}(s) > 1$ のとき, $(v'_1, v'_2) := vA^{-1}$ とおくと

$$\begin{aligned} \zeta(s, vA^{-1}, A\tau) &= (\operatorname{Im} A\tau)^s \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} |(n_1 + v'_1)A\tau + n_2 + v'_2|^{-2s} \\ &= (\operatorname{Im} \tau)^s \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} |(an_1 + cn_2 + v_1)\tau + bn_1 + dn_2 + v_2|^{-2s} \\ &= \zeta(s, v, \tau) \end{aligned}$$

が成り立つ. 従って, 命題 2.2 より

$$-\log |g_{vA^{-1}}(A\tau)|^2 = -\log |g_v(\tau)|^2,$$

故に $|\omega(A, z, \tau)| = 1$ を得る.

以上より, 最大値の原理から $\omega(A, z, \tau)$ は $(z, \tau) \in D$ に関して定数である. 従って, (2.4) を満たすような A だけで定まる複素数 $\omega(A)$ が存在する. $\omega(A)$ が 1 の 12 乗根であることを示すには, Γ の生成元 $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ に対して言えば十分である. T については, 定義から直接 $\omega(T) = e^{\pi i/6}$ を示せる. 一方, S については, (2.4) において $u = (1/2, 1/2)$, $\tau = i$ とすることで

$$\omega(S) = \frac{g_{(1/2, 1/2)}(i)}{g_{(1/2, -1/2)}(i)} = -i$$

を得る. 但し, 二番目の等号については命題 2.1 を用いた. 以上より $\omega(A)$ は 1 の 12 乗根である. □

$\omega(A)$ を具体的に記述するために, まず Dedekind の η -函数

$$\eta(\tau) = q_\tau^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q_\tau^n) \quad (\tau \in \mathbb{H})$$

の変換公式を復習する.

命題 2.4. 任意の $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ に対して

$$\eta(A\tau) = \varepsilon(A) \sqrt{c\tau + d} \eta(\tau)$$

を満たす 1 の 24 乗根 $\varepsilon(A)$ が存在する. 但し $z \in \mathbb{C}^\times$ に対して $-\pi < \arg z \leq \pi$ とする. 特に

$$\varepsilon(A) = \begin{cases} \left(\frac{d}{c}\right) i^{\frac{1-c}{2}} e^{\frac{\pi i}{12}[c(a+d)-(c^2-1)bd]-\frac{\pi i}{4}} & (c \text{ は正の奇数}), \\ \left(\frac{c}{d}\right) i^{\frac{d-1}{2}} e^{\frac{\pi i}{12}[d(b-c)-(d^2-1)ac]} & (d \text{ は正の奇数}) \end{cases}$$

が成り立つ. ここで $(\frac{\cdot}{\cdot})$ は Jacobi 記号を意味する. 但し, 任意の整数 n に対して $(\frac{n}{1}) = 1$ とする.

証明については [8, §38] を参照せよ.

命題 2.5. 任意の $A \in \Gamma$ に対して $\omega(A) = \varepsilon(A)^2$ が成り立つ.

証明. (2.4) において, $u_1 = 0$ とおき, その後で $u_2 = 0$ における微分係数を比較する. ここで

$$\left. \frac{\partial}{\partial u_2} g_{(0, u_2)}(\tau) \right|_{u_2=0} = 2\pi i \eta(\tau)^2 \quad (2.5)$$

に注意すれば, $\eta(A\tau)^2 = \omega(A)(c\tau + d)\eta(\tau)^2$ を得る. 故に $\omega(A) = \varepsilon(A)^2$ である. $\square$

3 モジュラー函数

正整数 N に対して $\zeta_N = e^{2\pi i/N}$ とおき, $\Gamma(N)$ をレベル N の主合同部分群とする:

$$\Gamma(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) : a \equiv d \equiv 1, b \equiv c \equiv 0 \pmod{N} \right\}.$$

レベル N のモジュラー函数であって各尖点での q -展開の係数が全て $\mathbb{Q}(\zeta_N)$ に含まれるもの全体のなす体を $\mathcal{F}_N$ と表す. 即ち $g \in \mathcal{F}_N$ であることは次の三つの条件を満たすことと同値である.

- (i) g は $\mathbb{H}$ 上の有理型函数である.
- (ii) 全ての $A \in \Gamma(N)$ に対して $g(A\tau) = g(\tau)$.
- (iii) 任意の $B \in \Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ に対して

$$g(B\tau) = \sum_{n=l}^{\infty} c_n q_\tau^{n/N} \quad (l \in \mathbb{Z}, c_n \in \mathbb{Q}(\zeta_N)) \quad (3.1)$$

の形に展開される.

$\mathcal{F}_N$ の部分環 $\mathcal{R}_N$ を次で定義する:

$$\mathcal{R}_N = \{g \in \mathcal{F}_N : g \text{ は } \mathbb{H} \text{ 上正則であって, (3.1) の各係数 } c_n \text{ は全て } \mathbb{Z}[\zeta_N] \text{ に含まれる}\}.$$

本稿で必要な $\mathcal{R}_N$ の元を挙げる.

命題 3.1. $u \in \mathbb{Q}^2 \setminus \mathbb{Z}^2$ とし, $N = \min\{n \in \mathbb{Z} : n > 0, nu \in \mathbb{Z}^2\}$ とおく.

- (1) $g_u \in \mathcal{R}_{12N^2}$. 更に N が素数巾でなければ $g_u \in \mathcal{R}_{12N^2}^\times$.
- (2) $g_u^{12N} \in \mathcal{R}_N$. 更に N が素数巾でなければ $g_u^{12N} \in \mathcal{R}_N^\times$.
- (3) $\sqrt{2}\eta(2\tau)/\eta(\tau) \in \mathcal{R}_{48}$.

証明. (1) g_u が $\mathbb{H}$ 上正則であることは定義 (2.1) から明らか. また §2 で述べた g_u の性質より, $A \in \Gamma(12N^2)$ に対して $g_u(A\tau) = g_{uA}(\tau) = g_u(\tau)$ となる. 従って条件 (ii) を満たす. 条件 (iii) については, B が単位行列ならば, 定義の無限積を級数に展開することで, 負ノミ項が有限個しかなく, 各係数が $\mathbb{Z}[\zeta_{12N^2}]$ に含まれることを確認できる. 一般の $B \in \Gamma$ に対しては, 命題 2.3 より $g_u(B\tau) = \omega(B)g_{uB}(\tau)$ だから, 結局は単位行列の場合に帰着される.

最後に N が素数巾でないとき $g_u^{-1} \in \mathcal{R}_{12N^2}$ であることを示す. g_u^{-1} が $\mathbb{H}$ 上正則であることは定義から分かり, 条件 (ii) を満たすことは既に示したことから明らかである. 条件 (iii) については, $g_u(B\tau)$ を (3.1) の形に $q_\tau^{1/(12N^2)}$ -展開したとき, その最低次の係数 c_l が単数であれば良い. $v = (v_1, v_2) := uB$ とおくと $g_u(B\tau) = \omega(B)g_v(\tau)$ より,

$$c_l = (1 \text{ の } 12N^2 \text{ 乗根}) \times \begin{cases} 1 - e^{2\pi i v_2} & v_1 \in \mathbb{Z}, \\ 1 & v_1 \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

と書ける. $v_1 \in \mathbb{Z}$ のときは $v_2 = r/N$ ($r \in \mathbb{Z}, (r, N) = 1$) だから, N が素数巾でなければ c_l は単数である.

(2) は同様に示せる.

(3) $g(\tau) = \sqrt{2}\eta(2\tau)/\eta(\tau)$ とおく. g が $\mathbb{H}$ 上正則であることは明らか. 条件 (ii) については, より一般の $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(2)$ (即ち $A \in \Gamma, c \equiv 0 \pmod{2}$) に対して,

$$g(A\tau) = e^{-\frac{2\pi i}{3}[d(b-c)-(d^2-1)ac]} e^{\frac{\pi i}{8}[3d(2b+c)+d^2-1]} g(\tau)$$

となることが知られている [8, p.133 (4)]. これを示すためには, $A' = \begin{pmatrix} a & 2b \\ c/2 & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ とおき, $\eta(2(A\tau)) = \eta(A'(2\tau))$ と書き換えてから命題 2.4 を適用すれば良い. 従って, 特に $A \in \Gamma(48)$ ならば $g(A\tau) = g(\tau)$ である. 最後に条件 (iii) について考える. $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと, 任意の $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ に対して $CB = B'C'$ を満たす $B' \in \Gamma$ と $C' = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$ ($(\alpha, \beta, \delta) \in \{(1, 0, 2), (1, 1, 2), (2, 0, 1)\}$) を取れる. このとき

$$\eta(2(B\tau)) = \eta(CB\tau) = \eta(B'C'\tau) = \varepsilon(B')\sqrt{(c\tau + d)/\delta}\eta(C'\tau)$$

であるから

$$g(B\tau) = \varepsilon(B')\varepsilon(B)^{-1}\sqrt{2/\delta}\frac{\eta(\frac{\alpha}{\delta}\tau + \frac{\beta}{\delta})}{\eta(\tau)}$$

と書ける. この表示を用いれば, 条件 (iii) を満たし, 更に各係数が整数であることは容易に分かる. □

定理 2 の証明には、モジュラー函数の特殊値の代数性やその値への Galois 群の作用を具体的に知ることが必要である。以下において、それに関する結果を幾つか引用する。証明については [7, §4] を参照せよ^{*1}。

$\mathcal{F}_N/\mathcal{F}_1$ は Galois 拡大であり、 $\mathcal{F}_N = \mathcal{F}_1(g_u^{12N} \mid u \in N^{-1}\mathbb{Z}^2)$ が成り立つ。そして、行列式が N と互いに素な $A \in M_2(\mathbb{Z})$ に対して $g_u^{12N} \mapsto g_{uA}^{12N}$ によって $\text{Gal}(\mathcal{F}_N/\mathcal{F}_1)$ の元が一つ定まる。その元を一般の $g \in \mathcal{F}_N$ に作用させたときの像を $g \circ A$ と書くことにする。

命題 3.2 (cf. [7, Theorem 3]). N を正整数とする。 $\mathfrak{b}$ を k の分数イデアルとし、 z_1, z_2 ($z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\theta := z_1/z_2 \in \mathbb{H}$) をその整数底とする。また $\mathfrak{p}$ を k の一次の素イデアルとする。 $p = N(\mathfrak{p})$ とおき、 $(p, dN) = 1$ を仮定する。但し d は虚二次体 k の判別式を意味する。更に $B \in M_2(\mathbb{Z})$ を次を満たすように選ぶ: $B \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ は $\bar{\mathfrak{p}}\mathfrak{b}$ の整数底であり、かつ $\det B = p$ である。ここで $\bar{\mathfrak{p}}$ は $\mathfrak{p}$ の共役イデアルを表す。このとき、任意の $g \in \mathcal{R}_N$ に対して $g(\theta) \in \mathcal{O}_{k_N}$ (即ち $g(\theta)$ は N を法とする ray class field k_N の整数) であり、

$$g(\theta)^p \equiv [g \circ (pB^{-1})](B\theta) \pmod{\mathfrak{p}}$$

を満たす。

より一般的な定式化 (志村の相互法則) については [3, 5] を参照せよ。

4 定理 2 の証明

虚二次体 k に含まれる 1 の中根全体を $\mu(k)$ で表し、 k の整イデアル $\mathfrak{f} \neq (1)$ に対して $\mu(\mathfrak{f}) = \{\zeta \in \mu(k) : \zeta \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}\}$, $e(\mathfrak{f}) = |\mu(\mathfrak{f})|$ とおく。また f を $\mathfrak{f}$ に含まれる最小の正整数とする。以下の証明において、 $e(\mathfrak{f})$ の値によって扱いが異なる部分が生じるので、まず最初に $k, \mathfrak{f}$ を次のように分類しておく (証明は単純なので省略する)。

補題 4.1. $\mathfrak{f} \neq (1)$ を仮定すると次が成り立つ。

- $e(\mathfrak{f}) = 4 \Leftrightarrow k = \mathbb{Q}(\sqrt{-1}), \mathfrak{f} = (1 + \sqrt{-1})$.
- $e(\mathfrak{f}) = 3 \Leftrightarrow k = \mathbb{Q}(\sqrt{-3}), \mathfrak{f} = ((3 + \sqrt{-3})/2)$.
- $e(\mathfrak{f}) = 2 \Leftrightarrow$ 「 $k \neq \mathbb{Q}(\sqrt{-1}), N(\mathfrak{f}) = 2$ 」または「 k は任意, $\mathfrak{f} = (2)$ 」.
- $e(\mathfrak{f}) = 1 \Leftrightarrow k, \mathfrak{f}$ は上記の条件を満たさない。

まず $e(\mathfrak{f}) = 3, 4$ のときを考える。このとき補題 4.1 から $K = k_{\mathfrak{f}} = k$ である。従って、命題 1.1 (1) より定理 2 が成り立つことが分かる。もちろん $\zeta'_S(0, 1)$ を直接計算することもできて、その結果、Stark 単数として

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 + \sqrt{-1} & (e(\mathfrak{f}) = 4), \\ (3 + \sqrt{-3})/2 & (e(\mathfrak{f}) = 3) \end{cases}$$

を取ることが分かる。

^{*1} 但し、そこでの $\Gamma(N)$ は、本稿での $\pm\Gamma(N)$ を意味することに注意せよ。

これ以降は $e(f) = 1, 2$ を仮定する. 定理 2 を証明するためには, 次の二つを示せば十分である.

(1) ある $E \in U^v$ が存在して, 任意の $\sigma \in G$ に対して

$$\log |E^\sigma|^2 = -12fe(f)\zeta'_S(0, \sigma) \quad (4.1)$$

が成り立つ.

(2) $\varepsilon^n = E^e$ かつ $K(\varepsilon^{1/e})/k$ が Abel 拡大となるような $\varepsilon \in K$ が存在する. 但し $n = 12fe(f)$ とする.

注意 4.1. 以下の (1) の証明は $e(f) = 3, 4$ のときでも有効である.

4.1 (1) の証明

$\sigma \in G$ に対して, $\mathfrak{f}$ と素な k の整イデアル $\mathfrak{a}$ で $\sigma_{\mathfrak{a}} = \sigma$ となるものを一つ選ぶと

$$\zeta_S(s, \sigma) = \sum_{\substack{\mathfrak{b} \subset \mathcal{O}_k \\ (\mathfrak{b}, S)=1 \\ \sigma_{\mathfrak{b}} = \sigma_{\mathfrak{a}}}} N(\mathfrak{b})^{-s} = \sum_{\substack{(\alpha) \\ \alpha \in 1 + \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{f}}} N(\alpha\mathfrak{a})^{-s} = \frac{1}{e(\mathfrak{f})} \sum_{\alpha \in 1 + \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{f}} N(\alpha\mathfrak{a})^{-s}$$

と書ける. ここで $\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{f} = [z_1, z_2]$ ($z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\theta := z_1/z_2 \in \mathbb{H}$) とする. 但し $[z_1, z_2]$ は $\mathbb{Z}z_1 + \mathbb{Z}z_2$ を意味する. このとき

$$e(\mathfrak{f})\zeta_S(s, \sigma) = N(\mathfrak{a})^{-s} \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} |n_1 z_1 + n_2 z_2 + 1|^{-2s} = (N(\mathfrak{a})|z_2|^2 \operatorname{Im}(\theta))^{-s} \zeta(s, u, \theta)$$

となる. 但し, $\zeta(s, u, \tau)$ は (2.2) で定義された関数であり, $u = (u_1, u_2)$ は $1 = u_1 z_1 + u_2 z_2$ を満たす有理数の組である. 特に $\min\{n \in \mathbb{Z} : n > 0, nu \in \mathbb{Z}\} = f$ を満たす. 従って, Kronecker の第二極限公式 (2.3) より

$$e(\mathfrak{f})\zeta'_S(0, \sigma) = -\log |g_u(\theta)|^2$$

が成り立つ.

ここで $E(\sigma) = E_{\mathfrak{f}}(\sigma) := g_u(\theta)^{12f}$ とおく. これは $z_1, z_2, \mathfrak{a}$ の取り方に依らない. 実際, まず $\mathfrak{a}$ を固定したままで z_1, z_2 の代わりに w_1, w_2 を取ると, $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ を満たす $A \in \Gamma$ が存在し, $1 = v_1 w_1 + v_2 w_2$ ($v = (v_1, v_2) \in \mathbb{Q}^2$) とすると $v = uA^{-1}$ となる. ここで命題 2.3 より $g_v(w_1/w_2)^{12f} = g_{uA^{-1}}(A\theta)^{12f} = g_u(\theta)^{12f}$ となる. 従って, $E(\sigma)$ は z_1, z_2 の取り方に依らない. 更に $\mathfrak{a}$ の代わりに $\mathfrak{b}$ を取ると, $\mathfrak{b} = \alpha\mathfrak{a}$ ($\alpha \in 1 + \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{f}$) と書けるので, $w_1 = \alpha^{-1}z_1, w_2 = \alpha^{-1}z_2$ とすれば $\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{f} = [w_1, w_2]$. そして $1 = v_1 w_1 + v_2 w_2$ ($v = (v_1, v_2) \in \mathbb{Q}^2$) とすると, $v_1 z_1 + v_2 z_2 = \alpha \in 1 + \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{f}$ だから $v \equiv u \pmod{\mathbb{Z}^2}$ である. よって, 命題 2.1 より $g_v(w_1/w_2)^{12f} = g_v(\theta)^{12f} = g_u(\theta)^{12f}$ となり, $E(\sigma)$ は $\mathfrak{a}$ の取り方にも依らない.

特に $E = E_{\mathfrak{f}} := E(1)$ とおく. いま

$$\log |E(\sigma)|^2 = -12fe(\mathfrak{f})\zeta'_S(0, \sigma)$$

であるので, 後は $E(\sigma) \in \mathcal{O}_K$, $E^\sigma = E(\sigma)$ ($\forall \sigma \in G$), $E \in U^v$ を順に示していけば良い. そのために $N = f$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{f}$, $g = g_u^{12f}$ として命題 3.2 を適用する. 結果として次を得る:

(a) $E(\sigma) \in \mathcal{O}_{k_f}$.

(b) $\mathfrak{p}$ を k の一次の素イデアルとする. $(N(\mathfrak{p}), df) = 1$ ならば $E(\sigma)^{N(\mathfrak{p})} \equiv E(\sigma\sigma_{\mathfrak{p}}) \pmod{\mathfrak{p}}$.

実際, (a) は明らかである. (b) については, $p = N(\mathfrak{p})$ とおくと, $\mathfrak{p}$ を法として

$$E(\sigma)^p = g_u(\theta)^{12fp} \equiv [g_u^{12f} \circ (pB^{-1})](B\theta) = g_{upB^{-1}}(B\theta)^{12f}$$

が成り立つが, 更に, $\sigma_{\mathfrak{ap}} = \sigma\sigma_{\mathfrak{p}}$ であること, $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = p^{-1}B\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ とおくと $w_1/w_2 = B\theta$, $(\mathfrak{ap})^{-1}\mathfrak{f} = [w_1, w_2]$ であること, 最後に $1 = upB^{-1}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ であることから, $g_{upB^{-1}}(B\theta)^{12f} = E(\sigma\sigma_{\mathfrak{p}})$ となるので良い.

まず $E(\sigma) \in \mathcal{O}_K$ を示す. 任意の $\tau \in \text{Gal}(k_f/K)$ に対して, k の一次の素イデアル $\mathfrak{p}$ が $(N(\mathfrak{p}), df) = 1$, $\tau = (\mathfrak{p}, k_f/k)$ を満たすならば, $\sigma_{\mathfrak{p}} = (\mathfrak{p}, K/k) = \tau|_K = 1$ だから

$$E(\sigma)^\tau \equiv E(\sigma)^{N(\mathfrak{p})} \equiv E(\sigma\sigma_{\mathfrak{p}}) = E(\sigma) \pmod{\mathfrak{p}}$$

である. Chebotarev の密度定理から, このような $\mathfrak{p}$ は無限に存在するので $E(\sigma)^\tau = E(\sigma)$ でなければならない. よって $E(\sigma) \in K$, 故に $E(\sigma) \in \mathcal{O}_K$ である.

次に $E(\sigma) = E^\sigma$ ($\forall \sigma \in G$) であることは, 再び Chebotarev の密度定理から, k の一次の素イデアル $\mathfrak{p}$ で $(N(\mathfrak{p}), df) = 1$, $\sigma = \sigma_{\mathfrak{p}}$ を満たすものは無限に存在し, そのような $\mathfrak{p}$ に対して

$$E^\sigma \equiv E^{N(\mathfrak{p})} \equiv E(\sigma_{\mathfrak{p}}) = E(\sigma) \pmod{\mathfrak{p}}$$

となることから分かる.

最後に $E \in U^v$ を示す. $|S| \geq 3$ のときは,

$$\sum_{\sigma \in G} \zeta_S(s, \sigma) = \sum_{\substack{\mathfrak{b} \subset \mathcal{O}_k \\ (\mathfrak{b}, S)=1}} N(\mathfrak{b})^{-s} = \zeta_k(s) \prod_{\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{f}} (1 - N(\mathfrak{p})^{-s})$$

($\zeta_k(s)$ は k の Dedekind ゼータ函数) により

$$\sum_{\sigma \in G} \zeta'_S(0, \sigma) = 0$$

である. ここで (4.1) を適用して整理すれば $|N_{K/k}E| = 1$ を得る. 故に $E \in \mathcal{O}_K^\times = U^v$ が成り立つ. $|S| = 2$ の場合は, 少し複雑な計算が必要となるので, 一旦保留して §5 であらためて示す.

注意 4.2. もちろん $S = \{\mathfrak{p}, \infty\}$ の場合も同様の計算を行うことは出来る. 実際に試してみると

$$\sum_{\sigma \in G} \zeta'_S(0, \sigma) = \zeta_k(0) \log N(\mathfrak{p}) = -\frac{h_k}{e_k} \log N(\mathfrak{p})$$

となる. 但し, h_k は k の類数であり, $e_k = |\mu(k)|$ である. そして $[K:k] = [k_{\mathfrak{f}}:k] = h_k \varphi(\mathfrak{f}) / (e_k/e(\mathfrak{f}))$ (φ は Euler 函数, 即ち $\varphi(\mathfrak{f}) = N(\mathfrak{f}) \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{f}} (1 - N(\mathfrak{p})^{-1})$) に注意すれば,

$$|N_{K/k}E|^{2\varphi(\mathfrak{f})} = N(\mathfrak{p})^{12f[K:k]}$$

を得る. しかし, この結果から直接 $E \in U^v$ を示すのは不可能であろう.

4.2 (2) の証明

まず最初に, E の n 乗根は k のある Abel 拡大体に含まれることを示す. ここで $e(f) = 1, 2$ の場合分けが必要となる. $e(f) = 1$ (即ち $n = 12f$) のとき, $E = g_u(\theta)^{12f} = g_u(\theta)^n$ ($u \in f^{-1}\mathbb{Z}^2$, $\theta \in k \cap \mathbb{H}$) と書けたが, $g_u, \zeta_n \in \mathcal{R}_{12f^2}$ だから $g_u(\theta), \zeta_n \in k_{12f^2}$ である. 従って, E の n 乗根は全て k_{12f^2} に含まれる. $e(f) = 2$ のときは, E をもう少し詳しく表示する必要がある. まず補題 4.1 より, $f = 2$ (即ち $n = 48$) であり, $\mathfrak{f} = [\omega, 2]$ ($\omega \in \mathbb{H}$) と書ける. $\mathfrak{a} = (1)$ とおき, $z_1 = \omega, z_2 = 2$ とすれば, $\theta = \omega/2, u = (0, 1/2)$ となるので

$$E = g_{(0,1/2)}(\theta)^{12f} = \left(\sqrt{2} \frac{\eta(2\theta)}{\eta(\theta)} \right)^n$$

が成り立つ. $\sqrt{2}\eta(2\tau)/\eta(\tau), \zeta_n \in \mathcal{R}_{48}$ だから E の n 乗根は全て k_{48} に含まれる.

E の n 乗根の一つを δ とおいて固定する. 上の議論より $K(\delta)/k$ は Abel 拡大である. ここで

$$\mathbf{P} = \{\mathfrak{p} : K(\delta) \text{ で不分岐な } k \text{ の素イデアルで, } (\mathfrak{p}, n) = 1, \sigma_{\mathfrak{p}} = 1 \text{ を満たす}\}$$

とおく. このとき, $\mathfrak{p} \in \mathbf{P}$ に対して, $E^{N(\mathfrak{p})-1}$ は K の n 乗元である. 実際, $\sigma = (\mathfrak{p}, K(\delta)/k)$ とおくと, 仮定から $\sigma|_K = 1$ だから

$$E^{N\mathfrak{p}-1} = E^{N\mathfrak{p}}/E^{\sigma} = (\delta^{N\mathfrak{p}}/\delta^{\sigma})^n$$

となる. よって $\delta^{N\mathfrak{p}}/\delta^{\sigma} \in K$ を言えば良い. まず任意の $\tau \in \text{Gal}(K(\delta)/K)$ に対して

$$(\delta^{\tau})^n = (\delta^n)^{\tau} = E^{\tau} = E = \delta^n$$

であるから, $\delta^{\tau} = \omega\delta$ を満たす 1 の n 乗根 $\omega \in K(\delta)$ が存在する. ここで $\omega^{\sigma} \equiv \omega^{N\mathfrak{p}} \pmod{\mathfrak{p}}$ であるが, $(\mathfrak{p}, n) = 1$ より結局 $\omega^{\sigma} = \omega^{N\mathfrak{p}}$ となるので

$$\left(\frac{\delta^{N\mathfrak{p}}}{\delta^{\sigma}} \right)^{\tau} = \frac{(\delta^{\tau})^{N\mathfrak{p}}}{(\delta^{\tau})^{\sigma}} = \frac{\omega^{N\mathfrak{p}}\delta^{N\mathfrak{p}}}{\omega^{\sigma}\delta^{\sigma}} = \frac{\delta^{N\mathfrak{p}}}{\delta^{\sigma}}$$

が成り立つ. 故に $\delta^{N\mathfrak{p}}/\delta^{\sigma} \in K$ である.

一般に「正整数 a, b に対して E^a, E^b が共に K の n 乗元であれば $E^{\gcd(a,b)}$ もそうである」から, $e' = \gcd\{N(\mathfrak{p}) - 1 : \mathfrak{p} \in \mathbf{P} \text{ かつ } (\mathfrak{p}, e) = 1\}$ とおけば $E^{e'}$ は K の n 乗元である. ここで $e' = e$ を示す. まず $\zeta_e \in K$ より, $\mathfrak{p} \in \mathbf{P}$ に対して $\zeta_e = \zeta_e^{\sigma_{\mathfrak{p}}} \equiv \zeta_e^{N\mathfrak{p}} \pmod{\mathfrak{p}}$ である. 従って, 更に $(\mathfrak{p}, e) = 1$ であれば, $\zeta_e = \zeta_e^{N\mathfrak{p}}$, 即ち $N\mathfrak{p} \equiv 1 \pmod{e}$ が成り立つ. 故に $e|e'$ である. 次にこの逆を示す. $L = K(\delta, \zeta_{e'})$ とおく. Chebotarev の密度定理より, 任意の $\tau \in \text{Gal}(L/K)$ に対して, k の素イデアル $\mathfrak{p}$ で L で不分岐かつ $(\mathfrak{p}, en) = 1$, $\tau = (\mathfrak{p}, L/k)$ を満たすものが無限に存在する. このような $\mathfrak{p}$ は, もちろん $\mathfrak{p} \in \mathbf{P}$, $(\mathfrak{p}, e) = 1$ を満たすので, $N\mathfrak{p} - 1$ は e' の倍数となる. 従って $\zeta_{e'}^{\tau} \equiv \zeta_{e'}^{N\mathfrak{p}} = \zeta_{e'} \pmod{\mathfrak{p}}$ であるので, 結局 $\zeta_{e'}^{\tau} = \zeta_{e'}$ が成り立つ. 故に $\zeta_{e'} \in K$ となり, $e'|e$ を得る.

以上により E^e は K の n 乗元である. 即ち, ある $\varepsilon \in K$ が存在して $\varepsilon^n = E^e$ が成り立つ. 更に, 最初に示したことから, $K(\varepsilon^{1/e})/k$ が Abel 拡大となることが分かる.

5 $|S| = 2$ の場合

§4.1 では「 $|S| = 2$ のとき $E \in U^v$ となる」ことの証明を保留した. この節では, それを行うためにより強い主張である次を示す.

定理 3 (cf. [4, p.18, Remarque] 又は [2, p.246, Theorem 3.2]). $S = \{\mathfrak{p}, \infty\}$, 即ち $\mathfrak{f} = \mathfrak{p}^\nu$ (ν は正整数) のとき

$$(E_{\mathfrak{f}})^{\varphi(\mathfrak{f})} = \mathfrak{p}^{12f}$$

である. 但し, $E_{\mathfrak{f}}$ は §4.1 で導入した値であり, φ は Euler 関数である. また f は $\mathfrak{f}$ に含まれる最小の正整数を意味する.

定理 3 の証明は §5.2 で行う. その際に Siegel 関数の或る性質 (命題 5.1) が必要となるので, それを §5.1 でまえもって示しておく.

5.1 準備

複素平面上の格子 L に対し, その基底として $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ をとる. 但し $\omega_1/\omega_2 \in \mathbb{H}$ を仮定する. このとき $L = [\omega_1, \omega_2]$ と書くことにする. L に関する二つの関数を導入する:

$$\Delta(L) = \omega_2^{-12} \eta(\omega_1/\omega_2)^{24}, \quad g(t, L) = g_u(\omega_1/\omega_2)^{12} \quad (t \in \mathbb{C}).$$

但し $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ は $t = u_1\omega_1 + u_2\omega_2$ を満たすようにとる. 命題 2.3 と命題 2.4 より, この二つの関数は L の基底の取り方に依らない. また $c \in \mathbb{C}^\times$ に対して

$$\Delta(cL) = c^{-12} \Delta(L), \quad g(ct, cL) = g(t, L) \quad (5.1)$$

であることも容易に分かる.

命題 5.1. $L \subset L'$ を複素平面上の二つの格子とし, N を $NL' \subset L$ を満たす正整数とする. L'/L の完全代表系の一つを $0 = t_1, t_2, \dots, t_n$ ($n = [L' : L]$) とする. このとき

$$\prod_{i=2}^n g(t_i, L)^N = \left(\frac{\Delta(L')}{\Delta(L)} \right)^N \quad (5.2)$$

が成り立つ. 更に $t \in \mathbb{C}$ がある正整数 M に対して $Mt \in L$ を満たすとき, $N|M$ となるように M を取っておけば

$$\prod_{i=1}^n g(t + t_i, L)^M = g(t, L')^M \quad (5.3)$$

が成り立つ.

以下, 添え字の見づらさを避けるために, 必要に応じて $g_u(\tau)$ を $g(u_1, u_2, \tau)$ と書くことにする.

補題 5.2. 正整数 m に対して

$$g_u(\tau/m) = (-1)^{m-1} e^{\frac{\pi i}{2}(m-1)u_2} \prod_{l=0}^{m-1} g\left(\frac{l+u_1}{m}, u_2, \tau\right) \quad (5.4)$$

が成り立つ.

証明. 定義式 (2.1) より

$$g_u(\tau) = -q_\tau^{B_2(u_1)/2} e^{\pi i u_2(u_1-1)} \prod_{n=0}^{\infty} (1 - e^{2\pi i((n+u_1)\tau+u_2)}) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i((n-u_1)\tau-u_2)})$$

と書けるので

$$g_u(\tau/m) = -q_\tau^{B_2(u_1)/2m} e^{\pi i u_2(u_1-1)} \prod_{n=0}^{\infty} (1 - e^{2\pi i(\frac{n+u_1}{m}\tau+u_2)}) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i(\frac{n-u_1}{m}\tau-u_2)})$$

である. ここで最初の無限積は, $n = km + l$ ($k = 0, 1, \dots; l = 0, \dots, m-1$) とおくと

$$\prod_{l=0}^{m-1} \prod_{k=0}^{\infty} (1 - e^{2\pi i((k+\frac{l+u_1}{m})\tau+u_2)})$$

となり, 二番目の無限積は, $n = km - l$ ($k = 1, 2, \dots; l = 0, \dots, m-1$) とおくと

$$\prod_{l=0}^{m-1} \prod_{k=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i((k-\frac{l+u_1}{m})\tau-u_2)})$$

となる. 従って

$$\begin{aligned} g_u(\tau/m) &= -q_\tau^{B_2(u_1)/2m} e^{\pi i u_2(u_1-1)} \prod_{l=0}^{m-1} \left\{ \prod_{k=0}^{\infty} (1 - e^{2\pi i((k+\frac{l+u_1}{m})\tau+u_2)}) \prod_{k=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i((k-\frac{l+u_1}{m})\tau-u_2)}) \right\} \\ &= (-1)^{m-1} e^{\frac{\pi i}{2}(m-1)u_2} \prod_{l=0}^{m-1} g\left(\frac{l+u_1}{m}, u_2, \tau\right) \end{aligned}$$

である. □

補題 5.3. 正整数 m に対して

$$\prod_{l=1}^{m-1} g\left(\frac{l}{m}, 0, \tau\right) = (-1)^{m-1} \frac{\eta(\tau/m)^2}{\eta(\tau)^2}$$

が成り立つ.

証明. (5.4) において $u_1 = 0$ とおき, その後で $u_2 = 0$ における微分係数を比較すれば良い. ここで (2.5) が成り立つことに注意せよ. □

命題 5.1 の証明. 最初に (5.3) を示す. $[L' : L] = 1$ ならば, $L' = L$ だから, (5.3) は自明に成り立つ. $[L' : L] > 1$ の場合は, $[L' : L]$ の約数の個数による帰納法で示す. そのためにまず $[L' : L] = p$ (有理素数) に

対して証明する. (5.1) より $L' = [\tau, 1]$, $L = [p\tau, 1]$ ($\tau \in \mathbb{H}$) として良い. このとき, $j\tau$ ($j = 0, 1, \dots, p-1$) は L'/L の完全代表系である. 命題 2.1 より, (5.3) の左辺は L'/L の完全代表系の取り方には依らないので, $t = u_1 p\tau + u_2$ を満たす $(u_1, u_2) \in M^{-1}\mathbb{Z}^2$ をとれば,

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^p g(t + t_i, L)^M &= \prod_{j=0}^{p-1} g(t + j\tau, [p\tau, 1])^M = \prod_{j=0}^{p-1} g\left(u_1 + \frac{j}{p}, u_2, p\tau\right)^{12M} \\ &= g(pu_1, u_2, \tau)^{12M} = g(t, L')^M \end{aligned}$$

となる. ここで三番目の等号に関しては (5.4) を利用した. よって, $[L' : L]$ が素数ならば (5.3) は成り立つ.

$[L' : L]$ が合成数である場合は, それを割る素数 p を一つ選び, $L' \supset L_1 \supset L$, $[L_1 : L] = p$ を満たす格子 L_1 を一つ取る. ここで L'/L_1 と L_1/L の完全代表系をそれぞれ v_j ($1 \leq j \leq n/p$), w_k ($1 \leq k \leq p$) とすると, $v_j + w_k$ たちは L'/L の完全代表系となるから, 帰納法の仮定より

$$\prod_{i=1}^n g(t + t_i, L)^M = \prod_{j=1}^{n/p} \prod_{k=1}^p g(t + v_j + w_k, L)^M = \prod_{j=1}^{n/p} g(t + v_j, L_1)^M = g(t, L')^M$$

を得る. 故に, 一般の場合においても (5.3) は成り立つ.

次に (5.2) を同様の手順で示す. $[L' : L] = 1$ ならば自明である. $[L' : L] = p$ (有理素数) の場合は, $L' = [\tau, 1]$, $L = [p\tau, 1]$ と仮定して良い. このとき, 補題 5.3 より,

$$\prod_{i=2}^p g(t_i, L)^N = \prod_{j=1}^{p-1} g(j\tau, [p\tau, 1])^N = \prod_{j=1}^{p-1} g\left(\frac{j}{p}, 0, p\tau\right)^{12N} = \left(\frac{\eta(\tau)^2}{\eta(p\tau)^2}\right)^{12N} = \left(\frac{\Delta(L')}{\Delta(L)}\right)^N$$

となる. $[L' : L]$ が合成数である場合は, それを割る素数 p を一つ定め, $L' \supset L_1 \supset L$, $[L_1 : L] = p$ を満たす格子 L_1 を一つ取る. そして L'/L_1 と L_1/L の完全代表系をそれぞれ v_j ($1 \leq j \leq n/p$), w_k ($1 \leq k \leq p$) とする. 但し $v_1 = w_1 = 0$ としておく. このとき, 帰納法の仮定から

$$\begin{aligned} \prod_{i=2}^n g(t_i, L)^N &= \prod_{j=2}^{n/p} \prod_{k=1}^p g(v_j + w_k, L)^N \cdot \prod_{k=2}^p g(w_k, L)^N \\ &= \prod_{j=2}^{n/p} g(v_j, L_1)^N \cdot \left(\frac{\Delta(L_1)}{\Delta(L)}\right)^N \\ &= \left(\frac{\Delta(L')}{\Delta(L_1)}\right)^N \cdot \left(\frac{\Delta(L_1)}{\Delta(L)}\right)^N = \left(\frac{\Delta(L')}{\Delta(L)}\right)^N \end{aligned}$$

である. ここで二番目の等号に関して (5.3) を用いた. 以上より (5.2) は一般に成立する. $\square$

5.2 証明

これまでのように k を虚二次体, $\mathfrak{f}$ を k の整イデアル $\neq (1)$ とし, $K = k_{\mathfrak{f}}$ とおく. $\sigma \in G = \text{Gal}(K/k)$ に対して, $\sigma_{\mathfrak{a}} = \sigma$ を満たす $\mathfrak{f}$ と素な k の整イデアル $\mathfrak{a}$ を一つ選べば, $E_{\mathfrak{f}}(\sigma) = g(1, \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{f})^f$ と書ける. ここで f は $\mathfrak{f}$ に含まれる最小の正整数である.

補題 5.4. 任意の $\sigma \in G$ に対して $E_{\mathfrak{f}}(\sigma)/E_{\mathfrak{f}}(1) \in \mathcal{O}_K^\times$ が成り立つ.

証明. §4.1 において $E_{\mathfrak{f}}(\sigma) \in \mathcal{O}_K$ を既に示しているので, ここでは $E_{\mathfrak{f}}(\sigma)/E_{\mathfrak{f}}(1)$ が単数であることを言えば良い. k の一次の素イデアル $\mathfrak{q}$ で $(N(\mathfrak{q}), f) = 1$, $\sigma_{\mathfrak{q}} = \sigma$ を満たすものを一つ選ぶ. $q = N(\mathfrak{q})$ とおく. $L = \mathfrak{f}$, $L' = \mathfrak{q}^{-1}\mathfrak{f}$, $t = 1$ として命題 5.1 を適用すると

$$\prod_{j=1}^q g(1+t_j, \mathfrak{f})^{qf} = g(1, \mathfrak{q}^{-1}\mathfrak{f})^{qf}$$

を得る. 但し $0 = t_1, t_2, \dots, t_q$ は L'/L の完全代表系とする. よって

$$\left(\frac{E_{\mathfrak{f}}(\sigma)}{E_{\mathfrak{f}}(1)} \right)^q = \prod_{j=1}^q g(1+t_j, \mathfrak{f})^{qf}$$

である. ここで $\mathfrak{f} = [\beta_1, \beta_2]$ とおき, 各 t_j ($j \neq 1$) に対して $1+t_j = u_1\beta_1 + u_2\beta_2$ を満たすように $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{Q}^2$ を定めると, $qf(1+t_j) \in \mathfrak{f}$, $q(1+t_j), f(1+t_j) \notin \mathfrak{f}$ だから $\min\{n \in \mathbb{Z} : n > 0, nu \in \mathbb{Z}^2\}$ は素数中でない. 従って, 命題 3.1 より $g_u^{12qf} \in \mathcal{R}_{qf}^\times$ なので, 命題 3.2 から $g(1+t_j, \mathfrak{f})^{qf} = g_u(\beta_1/\beta_2)^{12qf}$ は単数である. 従って, $E_{\mathfrak{f}}(\sigma)/E_{\mathfrak{f}}(1)$ も単数である. $\square$

定理 3 の証明. ν に関する帰納法で示す. まず $\nu = 1$ 即ち $\mathfrak{f} = \mathfrak{p}$ の場合を考える. $0 = u_1, u_2, \dots, u_{N(\mathfrak{p})}$ を $\mathcal{O}_k/\mathfrak{p}$ の完全代表系とする. $i \geq 2$ のとき, $\sigma_{u_i} := ((u_i), K/k) \in G$, $\sigma_{u_i}|_{k_1} = 1$ であるが, 逆に $\sigma \in G$ が $\sigma|_{k_1} = 1$ を満たすならば $\sigma_{u_i} = \sigma$ なる i はちょうど $e_k/e(\mathfrak{p})$ 個存在する. よって

$$\prod_{\substack{\sigma \in G \\ \sigma|_{k_1} = 1}} E_{\mathfrak{p}}(\sigma)^{e_k/e(\mathfrak{p})} = \prod_{i=2}^{N(\mathfrak{p})} E_{\mathfrak{p}}(\sigma_{u_i}) = \prod_{i=2}^{N(\mathfrak{p})} g(1, u_i^{-1}\mathfrak{p})^f$$

が成り立つ. ここで (5.1) と (5.2) を適用すれば

$$\prod_{\substack{\sigma \in G \\ \sigma|_{k_1} = 1}} E_{\mathfrak{p}}(\sigma)^{e_k/e(\mathfrak{p})} = \prod_{i=2}^{N(\mathfrak{p})} g(u_i, \mathfrak{p})^f = \frac{\Delta(\mathcal{O}_k)^f}{\Delta(\mathfrak{p})^f}$$

となる. 従って, 補題 5.4 と

$$\left(\frac{\Delta(\mathcal{O}_k)}{\Delta(\mathfrak{p})} \right) = \mathfrak{p}^{12}$$

[2, p.246, Theorem 3.1] によって

$$(E_{\mathfrak{p}})^{[k_{\mathfrak{p}}:k_1]e_k/e(\mathfrak{p})} = \mathfrak{p}^{12f}$$

を得る. 故に $(E_{\mathfrak{p}})^{\varphi(\mathfrak{p})} = \mathfrak{p}^{12f}$ である.

次に $\mathfrak{f}' = \mathfrak{p}^\nu$ ($\nu \geq 1$) の場合に成り立つとして $\mathfrak{f} = \mathfrak{p}^{\nu+1}$ の場合を示す. v_i ($i = 1, \dots, N(\mathfrak{p})$) を $\mathfrak{f}'/\mathfrak{f}$ の完全代表系とし, $u_i = 1 + v_i$ とおく. このとき, 同様にして

$$\prod_{\substack{\sigma \in G \\ \sigma|_{k_{\mathfrak{f}'}} = 1}} E_{\mathfrak{f}}(\sigma)^{e(\mathfrak{f}')/e(\mathfrak{f})} = \prod_{i=1}^{N(\mathfrak{p})} g(1, u_i^{-1}\mathfrak{f})^f = \prod_{i=1}^{N(\mathfrak{p})} g(1+v_i, \mathfrak{f})^f = g(1, \mathfrak{f}')^f = E_{\mathfrak{f}'}^{f/f'}$$

が成り立つ. 但し f' は $\mathfrak{f}'$ に含まれる最小の正整数とする. 従って, 補題 5.4 より

$$(E_{\mathfrak{f}})^{N(\mathfrak{p})} = (E_{\mathfrak{f}})^{[k_{\mathfrak{f}}:k_{\mathfrak{f}'}]e(\mathfrak{f}')/e(\mathfrak{f})} = (E_{\mathfrak{f}'})^{f/f'}$$

となり, 帰納法の仮定から $(E_{\mathfrak{f}})^{\varphi(\mathfrak{f})} = \mathfrak{p}^{12f}$ を得る. □

参考文献

- [1] S. Dasgupta, Stark's Conjectures, thesis, 1999.
- [2] D. S. Kubert and S. Lang, Modular Units, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1981.
- [3] S. Lang, Elliptic Functions, Second Edition, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, London, Paris, Tokyo, 1987.
- [4] G. Robert, Unités elliptiques et formules pour le nombre de classes des extensions abéliennes d'un corps quadratique imaginaire, Bull. Soc. Math. France, Mémoire **36**, 1973.
- [5] G. Shimura, Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1971.
- [6] C. L. Siegel, Advanced Analytic Number Theory, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1980.
- [7] H. M. Stark, L -functions at $s = 1$. IV. First Derivatives at $s = 0$, Adv. Math. **35** (1980), 197–235.
- [8] H. Weber, Lehrbuch der Algebra, vol. III, Third Edition, Chelsea, New York, 1961.