

p^n 掬れ係数エタルコホモロジーに対する Lefschetz 跡公式

高田芽味 (九州大学大学院数理学府博士後期課程 1 年)*

有限体上定義されるスキームに対する Lefschetz 跡公式である藤原の跡公式の p^n 掬れ係数版について紹介します。本稿は、第 20 回 (2012 年) 度整数論サマースクール「Stark 予想」での院生・ポスドクの時間において講演した内容をまとめ直したものです。Stark 予想に関する素晴らしい勉強会を企画・運営して戴き、また講演の機会を戴き、オーガナイザーの皆様に感謝の意を申し上げます。

記法

- p, ℓ を異なる素数, q を p のある冪, $\mathbb{F}_q$ を位数 q の有限体とする。 $\mathbb{F}_q$ の代数閉包 k を一つ固定する。
- $\mathcal{X}_0$ を $\mathbb{F}_q$ 上の対象とする。 $\mathcal{X}$ で、 $\mathcal{X}_0$ の $\mathbb{F}_q \rightarrow k$ での底変換を表す: $\mathcal{X} := \mathcal{X}_0 \otimes_{\mathbb{F}_q} k$ 。
- $\mathbb{F}_q$ 上のスキーム U_0 に対し、 $\mathrm{Fr}_U: U \rightarrow U$ を q 乗相対 Frobenius 射とする。
- 出てくる層はエタル層、コホモロジーはエタルコホモロジーであると仮定する。

1 はじめに

有限体上定義されるスキームに対して成り立つ Lefschetz 跡公式として、藤原の跡公式というものがある。それを説明するために、かなり特殊な状況のもとでこの跡公式を述べる。

定理 ([Fu, Cor. 5.4.5], 特殊版). U_0 を $\mathbb{F}_q$ 上有限型分離的かつ滑らかなスキーム, $f_0: U_0 \rightarrow U_0$ を $\mathbb{F}_q$ 上の射とする。このとき、ある正整数 M が存在し、任意の正整数 $m \geq M$ に対し、

$$\sum_i (-1)^i \mathrm{Tr}((f \circ \mathrm{Fr}_U^m)^* | H_c^i(U, \mathbb{Q}_\ell)) = \# \mathrm{Fix}(f \circ \mathrm{Fr}_U^m)$$

が成り立つ。

つまり、コホモロジー群の自己準同型の跡の交代和が固定点の個数と一致するという主張が、考えている射を十分 Frobenius 射で捻ると成り立つ、という定理である。この定理は、種々の Langlands 対応の証明に次のように応用されている。まず志村多様体などのエタルコホモロジーによって、Langlands 対応の候補を構成する。次にそれが Langlands 対応が持つべき性質を備えていることを示すのに、藤原の跡公式 (および Arthur-Selberg 跡公式) を用いるのである。

藤原の跡公式は ℓ 進エタルコホモロジーに対する主張だが、筆者は p^n 掬れ係数エタルコホモロジーに対して同様の主張を証明することが出来たので、ここに紹介する。

* email: m-takata@math.kyushu-u.ac.jp

2 準備

2.1 コンパクト台高次順像

コンパクト台高次順像について復習しておく．次の定理を用いる：

定理 (永田のコンパクト化定理, [Na], [Co]). S を準分離的かつ準コンパクトなスキーム, U を S 上有限型分離的なスキームとする．このとき, U を S 上開部分スキームとして含む S 上固有なスキーム X が存在する．

S, U, X を上の通りとする． $f: U \rightarrow S, g: X \rightarrow S$ を構造射, $j: U \hookrightarrow X$ を開埋め込みとする． i を整数とする． U 上の捩れ層 $\mathcal{F}$ に対し, $R^i f_! \mathcal{F} := (R^i g_*) \circ j_! \mathcal{F}$ と定め, $\mathcal{F}$ の f によるコンパクト台高次順像と呼ぶ． $R^i f_! \mathcal{F}$ は, 標準的な同型を除き, (U, f) のコンパクト化 (X, g) の取り方に依らない．

U' を S 上有限型分離的なスキーム, $h: U' \rightarrow U$ を S 上の固有射とする．永田のコンパクト化定理より, S 上固有なスキーム X' および固有射 $h_X: X' \rightarrow X$ で, 次の図式を可換にするものが存在する：

$$\begin{array}{ccccc}
 U' & \xrightarrow{h} & U & & \\
 \downarrow j' & \searrow f' & \swarrow f & & \downarrow j \\
 & & S & & \\
 \downarrow j' & & \parallel & & \downarrow j \\
 X' & \xrightarrow{h_X} & X & & \\
 \downarrow g' & \searrow g & & & \\
 & & S & &
 \end{array}$$

このとき, 次の合成で定まる標準的射 $R^i f_! \mathcal{F} \rightarrow R^i f'_! h^* \mathcal{F}$ を h^* と書く：

$$\begin{aligned}
 R^i f_! \mathcal{F} &= R^i g_* j_! \mathcal{F} \rightarrow R^i g_* j_! h^* \mathcal{F} = R^i g_* j_! h^* \mathcal{F} = R^i g_* (jh)_! h^* \mathcal{F} \\
 &= R^i g_* h_{X!} j'_! h^* \mathcal{F} = R^i g_* h_{X*} j'_! h^* \mathcal{F} \rightarrow R^i g'_* j'_! h^* \mathcal{F} = R^i f'_! h^* \mathcal{F}.
 \end{aligned}$$

S が分離閉体のスペクトラムの場合, 大域切断関手は S 上の層の圏と加群の圏の間の圏同値を定める． $R^i f_! \mathcal{F}$ の大域切断を $H_c^i(U, \mathcal{F})$ と書き, U の $\mathcal{F}$ 係数コンパクト台コホモロジーと呼ぶ．

2.2 correspondence

S を分離閉体のスペクトラム, U, V を S 上の有限型分離的なスキームとする． S 上スキームの射 $a: V \rightarrow U \times_S U$ を **correspondence** と呼ぶ． $\text{Fix } a$ を, 次のカルテシアンな図式で定まるスキームとする：

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Fix } a & \longrightarrow & U \\
 \downarrow & & \downarrow \Delta_{U/S} \\
 V & \xrightarrow{a} & U \times_S U.
 \end{array}$$

但し $\Delta_{U/S}$ は対角射を表す．また，次のように a_1, a_2 を定める：

$$\begin{array}{ccc}
 & V & \\
 a_1 \swarrow & \downarrow & \searrow a_2 \\
 & U \times_S U & \\
 \text{pr}_1 \swarrow & & \searrow \text{pr}_2 \\
 U & & U
 \end{array}$$

以後， a_1 が固有射， a_2 がエタール射であることを仮定する． $\mathcal{F}$ を U 上の捩れ層とする．層の準同型 $u \in \text{Hom}(a_1^* \mathcal{F}, a_2^* \mathcal{F})$ は **cohomological correspondence** と呼ばれる． u に対し， $H_c^i(U, \mathcal{F})$ の自己準同型 $u_!$ を次の合成として定める：

$$H_c^i(U, \mathcal{F}) \xrightarrow{a_1^*} H_c^i(V, a_1^* \mathcal{F}) \xrightarrow{u} H_c^i(V, a_2^* \mathcal{F}) \xrightarrow{a_{2*}} H_c^i(U, \mathcal{F}).$$

ここで， a_{2*} は trace map $\mathcal{F} \rightarrow a_{2!} a_2^* \mathcal{F}$ から誘導される写像である^{*1}．例えば， $\mathcal{F}$ が定数層で a_2 が恒等射の場合， u を恒等射とすると， $u_!$ は 2.1 で定義した a_1^* と一致する．

注意． $u_!$ は，より一般に a_2 が準有限射でも， $a_2^!$ という関手を用いて同様に構成できる．

2.3 Frobenius correspondence

Cohomological correspondence で重要な例として，Frobenius correspondence がある． U_0 を $\mathbb{F}_q$ 上のスキーム $\mathcal{F}_0$ を U_0 上の層とする．このとき，correspondence $(\text{Fr}_U, \text{id}_U): U \rightarrow U \times_k U$ に対する cohomological correspondence $\text{Fr}_{\mathcal{F}}: \text{Fr}_U^* \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ が得られる^{*2}．これを， $\mathcal{F}$ の **Frobenius correspondence** と呼ぶ．簡単の為， $\text{Fr}_{\mathcal{F}}$ を単に Fr と書くことにする．

3 主定理

U_0, V_0 を $\mathbb{F}_q$ 上有限型分離的なスキーム， $a_0: V_0 \rightarrow U_0 \times_{\mathbb{F}_q} U_0$ を $\mathbb{F}_q$ 上のスキームの射とする．正整数 m に対し， $a^{(m)}$ で a の m 回 Frobenius 捻りを表す： $a^{(m)} := (a_1 \circ \text{Fr}_V^m, a_2)$ ．

定理 1 ([Ta, Th. 6.1]). $\mathcal{F}_0$ を U_0 上のスムーズな構成可能 p 捩れ層とする．スキーム X_0, Y_0 及び $\mathbb{F}_q$ 上スキームの射 $b_0: Y_0 \rightarrow X_0 \times_{\mathbb{F}_q} X_0$ が存在し，次を満たすとする：

- U_0, V_0 はそれぞれ X_0, Y_0 の $\mathbb{F}_q$ 上の開部分スキームである．
- 図式

$$\begin{array}{ccc}
 V_0 & \xrightarrow{a_0} & U_0 \times_{\mathbb{F}_q} U_0 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 Y_0 & \xrightarrow{b_0} & X_0 \times_{\mathbb{F}_q} X_0
 \end{array}$$

はカルテシアン，

^{*1} Trace map に関しては [SGA4, VII. 5] 参照．

^{*2} [SGA4 $\frac{1}{2}$, Rapport 1.2] 参照．

- a_1 は固有射, b_2 はエタール射, b は閉埋め込み,
- $X \setminus U$ は Cartier 因子,
- X_0 上のスムーズな構成可能 p 捫れ層 $\mathcal{G}_0$ が存在し, $\mathcal{G}_0|_{U_0} = \mathcal{F}_0$ が成り立つ.

このとき, 任意の整数 $m \geq 1$ 及び $u_0 \in \text{Hom}(a_{01}^* \mathcal{F}_0, a_{02}^* \mathcal{F}_0)$ に対し, 次の等式が成り立つ:

$$\sum_i (-1)^i \text{Tr}((u \circ \text{Fr}^m)_! | H_c^i(U, \mathcal{F})) = \sum_{P \in \text{Fix } a(m)} \text{Tr}((u \circ \text{Fr}^m)_P | \mathcal{F}_P).$$

注意. Frobenius correspondence の場合, 即ち $a = (\text{Fr}_U, \text{id}_U)$, $u = \text{Fr}_{\mathcal{F}}$ の場合は, 既に [SGA4 $\frac{1}{2}$, Fonct. L] において示されている. [DL] の手法を用いることにより, $a_2 = \text{id}$, a_1 が位数有限の自己同型射の場合は Frobenius correspondence の場合に帰着できる. これらの場合において, コンパクト化に関する仮定は必要ない.

p^n 捫れ層に対しても同様の主張が成立するが, こちらは定理 1 より強い仮定の下でしか証明できていない.

定理 2 ([Ta, Th. 7.1]). X_0, Y_0 を $\mathbb{F}_q$ 上の固有かつ滑らかなスキーム, $b_0: Y_0 \rightarrow X_0 \times_{\mathbb{F}_q} X_0$ を $\mathbb{F}_q$ 上のスキームの射, $\mathcal{G}_0$ を X_0 上の構成可能局所自由 p^n 捫れ層とする. また, 以下を仮定する:

- b_2 はエタール, b は閉埋め込み,
- $\mathbb{F}_q$ 上の組 $(X_0, Y_0, b_0, \Phi_{X_0})$ の $W_n(\mathbb{F}_q)$ への持ち上げ $(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0, \tilde{b}_0, \Phi_{\tilde{X}_0})$ が存在する. ここで, $\Phi_{X_0}: \mathcal{O}_{X_0} \rightarrow \mathcal{O}_{X_0}$ は p 乗写像である. また, $(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0, \tilde{b}_0)$ は (X_0, Y_0, b_0) と同様の性質をもつ.
- $H^i(X, \mathcal{G})$ は自由 $\mathbb{Z}/p^n$ 加群, $H^i(\tilde{X}, \mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_{\tilde{X}})$ は自由 $W_n(k)$ 加群である.

このとき, ある正整数 M が存在し, 任意の整数 $m \geq M$ 及び $u_0 \in \text{Hom}(b_{01}^* \mathcal{G}_0, b_{02}^* \mathcal{G}_0)$ に対し, 次の等式が成り立つ:

$$\sum_i (-1)^i \text{Tr}((u \circ \text{Fr}^m)_! | H^i(X, \mathcal{G})) = \sum_{P \in \text{Fix } b(m)} \text{Tr}((u \circ \text{Fr}^m)_P | \mathcal{G}_P).$$

注意. 藤原の跡公式と異なり, 定理 2 は正整数 M が層 $\mathcal{G}_0$ に依った形でしか証明できていない.

証明について言及しておく. 証明は Frobenius correspondence の場合の方法 [SGA4 $\frac{1}{2}$, Fonct. L] を一般化して得られる. $m = 1$ としてよい. 簡単の為, 定理 1 で $U_0 = X_0$, $V_0 = Y_0$ である場合を考える. Artin-Schreier 完全列

$$0 \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_X \xrightarrow{1-\Phi} \mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_X \longrightarrow 0$$

(但し $\Phi: \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X$ は p 乗写像) によって得られるコホモロジー群の長完全列

$$\cdots \longrightarrow H^i(X, \mathcal{G}) \longrightarrow H^i(X, \mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_X) \xrightarrow{1-\Phi} H^i(X, \mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_X) \longrightarrow \cdots$$

において, 任意の i に対し $1 - \Phi$ は全射となる. また, 図式

$$\begin{array}{ccc} H^i(X, \mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_X) & \xrightarrow{\Phi} & H^i(X, \mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_X) \\ \downarrow u'_* & & \downarrow u'_* \\ H^i(X, \mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_X) & \xrightarrow{\Phi} & H^i(X, \mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_X) \end{array}$$

は可換である．ここで $u' = u \otimes \text{id}_{\mathcal{O}_Y}$ であり， u'_* は $u_!$ と同様にして得られる $H^i(X, \mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_X)$ の自己準同型である．よって，次のような横の列が完全である可換図式が得られる：

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^i(X, \mathcal{G}) & \longrightarrow & H^i(X, \mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_X) & \xrightarrow{1-\Phi} & H^i(X, \mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_X) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow u_! & & \downarrow u'_* & & \downarrow u'_* \\ 0 & \longrightarrow & H^i(X, \mathcal{G}) & \longrightarrow & H^i(X, \mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_X) & \xrightarrow{1-\Phi} & H^i(X, \mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_X) \longrightarrow 0. \end{array}$$

これより

$$\sum_i (-1)^i \text{Tr}((u \circ \text{Fr})_! \mid H^i(X, \mathcal{G})) = \sum_i (-1)^i \text{Tr}((u' \circ \text{Fr})_* \mid H^i(X, \mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_X))$$

が得られる^{*3}．上式の右辺に **Woods Hole 跡公式** を適用すると，定理 1 の右辺が得られる．

定理 3 (Woods Hole 跡公式，[Ta, Th. 4.1])． S を局所 Artin 環のスペクトラム， X, Y を S 上の固有かつ滑らかなスキーム， $\mathcal{K}$ を X 上の局所自由層とする． $b: Y \rightarrow X \times_S X$ を S 上の閉埋め込みで，次を満たすと仮定する：

- b_2 はエタール射，
- $db_1: b_1^* \Omega_{X/S} \rightarrow \Omega_{Y/S}$ はゼロ写像．

このとき，任意の層の準同型 $v \in \text{Hom}(b_1^* \mathcal{K}, b_2^* \mathcal{K})$ に対し，次の等式が成り立つ：

$$\sum_i (-1)^i \text{Tr}(v_* \mid H^i(X, \mathcal{K})) = \sum_{\beta \in \pi_0(\text{Fix } b)} \text{Tr}_{\beta/S}(\text{Tr}(v_\beta \mid \mathcal{K}_\beta)).$$

但し β を下に付けることで，閉埋め込み $\beta \hookrightarrow Y$ による引き戻しを表す．

参考文献

- [Co] B. Conrad, *Deligne's notes on Nagata compactifications*, J. Ramanujan Math. Soc. **22** (2007), no. 3, 205–257.
- [DL] P. Deligne, G. Lusztig, *Representations of reductive groups over finite fields*, Ann. of Math. **103** (1976), 103–161.
- [Fu] K. Fujiwara, *Rigid geometry, Lefschetz-Verdier trace formula and Deligne's conjecture*, Inv. Math. **127** (1997), 489–533.
- [Na] M. Nagata, *A generalization of the imbedding problem of an abstract variety in a complete variety*, J. Math. Kyoto. Univ. **3** (1963), 89–102.
- [Ta] M. Takata, *Deligne's conjecture on the Lefschetz trace formula for p^n -torsion etale cohomology*, preprint, arXiv:1205.1753.
- [SGA4] *Théorie des topos et cohomologie étale des Schémas*, Lecture Notes in Math. **269** (1972), **270** (1972), **305** (1973), Springer-Verlag,
- [SGA4 $\frac{1}{2}$] P. Deligne, *Cohomologie étale*, Lecture Notes in Math. **569**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977.

^{*3} [Ta, Lemma 5.3] 参照．