# WILES の BIG GALOIS REPRESENTATION

山上 敦士　　(京都産業大学)

## 1. Introduction

本稿は、第 20 回整数論サマースクールでの発表内容をまとめたものであり, Wiles の論文 [18]

"On ordinary $\lambda$-adic representations associated to modular forms"

に従い, Wiles による $\Lambda$-adic ordinary newform $\mathcal{F}$ に付随する ordinary な Galois 表現 $\rho_{\mathcal{F}}$ の構成について概説する. 本稿は [20] の内容から必要と思われる箇所を抽出し, それらに加筆修正して作成されたものであり, 定義や術語の解説などの詳細については [20] の該当箇所をご参照いただきたい.

以下, $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ をそれぞれ, 有理整数環, 有理数体とし, $\bar{\mathbb{Q}}$ を $\mathbb{Q}$ の代数的閉包とする. 素数 $p$ に対し, $\mathbb{Z}_p$ と $\mathbb{Q}_p$ をそれぞれ $p$-進整数環, $p$-進数体とし, $\mathbb{Q}_p$ の代数的閉包を $\bar{\mathbb{Q}}_p$ とする. 以下, 体の埋め込み $\bar{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_p$ を固定しておく.

$F$ を有限次総実代数体とし, $\mathcal{O}_F$ をその整数環とする. $\mathcal{O}_F$ の $(0)$ とは異なる任意の ideal $\mathfrak{a}$ に対して, 剰余環 $\mathcal{O}_F/\mathfrak{a}$ の位数を $N\mathfrak{a}$ とかく. $\bar{\mathbb{Q}}$ での $F$ の代数的閉包を $\bar{F}$ とかく. また, $\mathbb{A}_F$ を $F$ 上の adele 環とする.

一般に, $\mathcal{O}_F$ の ideal $\mathfrak{c}$, 整数 $k \geq 2$, mod $\mathfrak{c}\mathfrak{S}_\infty$ の ray class character $\psi$ に対し (ここで, $\mathfrak{S}_\infty$ は $F$ のすべての無限素点の積を表す), parallel weight $k$, level $\mathfrak{c}$, character $\psi$ の Hilbert cusp forms, そして, それらに作用する Hecke 作用素 $T(\mathfrak{a})$, $S(\mathfrak{a})$ ($\mathfrak{a}$ は $\mathcal{O}_F$ の ideal) が定義される. Wiles の論文 [18] では, 考える Hilbert cusp forms はすべて parallel weight なので, 以下 parallel という言葉を省略して単に weight と呼ぶことにする.

$\mathbf{f}$ を weight $k$, level $\mathfrak{c}$, character $\psi$ の Hilbert cusp form とする. [16, Section 2] で, $\mathbf{f}$ に付随する **Dirichlet 級数**

$$D(s, \mathbf{f}) = \sum_{(0) \neq \mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_F : \mathrm{ideal}} c(\mathfrak{a}, \mathbf{f})(N\mathfrak{a})^{-s}$$

が定義されている. ここで, 各 $c(\mathfrak{a}, \mathbf{f})$ は $\mathbf{f}$ の Fourier 展開係数を用いて適切に定められた複素数である. とくに, $\mathbf{f}$ が **Hilbert eigenform**, つまり上述の Hecke 作用素すべてに対する同時固有形式であり, **正規化**

*Date*: September 10, 2012.

**されている**, つまり $c(\mathcal{O}_F, \mathbf{f}) = 1$ である場合, $\mathcal{O}_F$ の任意の ideal $\mathfrak{a}$ に対し,

$$T(\mathfrak{a})\mathbf{f} = c(\mathfrak{a}, \mathbf{f})\mathbf{f}$$

が成り立ち, さらに $\mathfrak{a}$ が $\mathfrak{c}$ と互いに素なとき,

$$S(\mathfrak{a})\mathbf{f} = \psi(\mathfrak{a})\mathbf{f}$$

が成り立つ. このとき, Shimura により, $\mathbf{f}$ の **Hecke 体**

$$K_{\mathbf{f}} := \mathbb{Q}(c(\mathfrak{a}, \mathbf{f}) |\ \mathfrak{a} : \text{ideal})$$

は $\mathbb{Q}$ 上の有限次拡大で総実代数体か CM 体になり, その中で, $c(\mathfrak{a}, \mathbf{f})$ は代数的整数であることが示されている (cf. [16, Proposition 1.3]). したがって, 上で固定した体の埋め込み $\bar{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_p$ により, $c(\mathfrak{a}, \mathbf{f})$ を $p$-進数とみなすこともできる.

以下、Hilbert cusp forms を $p$-進解析的に補間する “$\Lambda$-adic forms” と呼ばれる対象を定義する. そのために改めて, 状況設定を行う.

$\mathfrak{n}$ を $\mathcal{O}_F$ の整 idear とし,

$$\chi : \varprojlim_{r \geq 0} I_{\mathfrak{n}p^r} \to \bar{\mathbb{Q}}_p^\times$$

を conductor $\mathfrak{n}$ の strict ideal class character とする. ここで, $I_{\mathfrak{n}p^r}$ は $F$ の strict ray class group mod $\mathfrak{n}p^r$ である.

$p \neq 2$ のとき $\boldsymbol{p} := p$ とおき, $p = 2$ のとき $\boldsymbol{p} := 4$ とおく. $p$-進単数群の分解

$$\mathbb{Z}_p^\times = \mu_{\varphi(\boldsymbol{p})} \times (1 + \boldsymbol{p}\mathbb{Z}_p)$$

の各成分への射影をそれぞれ

$$\omega(a) \in \mu_{\varphi(\boldsymbol{p})}, \quad \langle a \rangle \in 1 + \boldsymbol{p}\mathbb{Z}_p \quad (a \in \mathbb{Z}_p^\times)$$

とおく. ここで, $\varphi$ は Euler 関数を表し, $\mu_{\varphi(\boldsymbol{p})}$ は 1 の $\varphi(\boldsymbol{p})$-乗根全体のなす部分群を表す. さらに, $u = 1 + \boldsymbol{p}$ とおく. これは $1 + \boldsymbol{p}\mathbb{Z}_p$ の位相的生成元, つまり, 等式

$$1 + \boldsymbol{p}\mathbb{Z}_p = u^{\mathbb{Z}_p} := \{u^z \mid z \in \mathbb{Z}_p\}$$

が成立することが知られている (cf. [7, Section 7.1]). また,

$$\text{mod } \boldsymbol{p} : \mathbb{Z}_p^\times \to (\mathbb{Z}/\boldsymbol{p}\mathbb{Z})^\times$$

を $\mu_{\varphi(\boldsymbol{p})}$ に制限したものが同型であり (cf. [10, 命題 2.17(2)]), その逆写像のことも

$$\omega : (\mathbb{Z}/\boldsymbol{p}\mathbb{Z})^\times \xrightarrow{\sim} \mu_{\varphi(\boldsymbol{p})} \hookrightarrow \mathbb{Z}_p^\times$$

とかいて, 上述の射影

$$\omega : \mathbb{Z}_p^\times \to \mu_{\varphi(\boldsymbol{p})}$$

とともに **Teichmüller character** という. このとき, $\omega$ は $(\mathbb{Z}/\boldsymbol{p}\mathbb{Z})^\times$ の character たちを生成する.

$\mathcal{O}_\chi := \mathbb{Z}_p[\chi]$ とおき, $\mathcal{O}_\chi$-係数の 1 変数形式的冪級数環を $\Lambda_\chi := \mathcal{O}_\chi[\![T]\!]$ とおく. $\Lambda_\chi$ に値をもつ $\chi$ に付随した character

$$\boldsymbol{\chi} : \varprojlim_{r \geq 0} I_{\mathfrak{n}p^r} \to \Lambda_\chi^\times$$

を, $\mathfrak{n}p$ と互いに素な整 ideal $\mathfrak{a}$ に対して,

$$\boldsymbol{\chi}(\mathfrak{a}) := \chi(\mathfrak{a})(1+T)^a$$

とおくことで定義する. ここで, $a \in \mathbb{Z}_p$ は $\mathfrak{a}$ に対して, $\langle N\mathfrak{a} \rangle = u^a$ という関係式を通してただ一通りに定まる $p$-進整数である.

**Definition 1.1.** (1) ([18, Section 1.2]) $2 \leq k \in \mathbb{Z}$ と 1 の $p^r$-乗根 $\zeta \in \bar{\mathbb{Q}}_p$ $(r \geq 0)$ の組 $(k, \zeta)$ 全体のなす集合を

$$\mathfrak{X} := \{(k,\zeta) |\ k \geq 2,\ \zeta^{p^r} = 1 \text{ for some } r \geq 0\}$$

とおき, 任意の $(k, \zeta) \in \mathfrak{X}$ に対し, $\mathcal{O}_\chi$-algebra 準同型

$$\nu_{k,\zeta} : \Lambda_\chi \to \mathcal{O}_\chi[\zeta]; \quad T \mapsto \zeta u^{k-2} - 1$$

が定まる.

$\mathcal{O}_F$ の ideal 上の関数

$$\mathcal{F} : \{0 \neq \mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_F : \text{ ideal}\} \to \Lambda_\chi; \quad \mathfrak{a} \mapsto c(\mathfrak{a}, \mathcal{F})$$

が次の条件を満たすとき, $\mathcal{F}$ を **level $\mathfrak{n}p$, character $\boldsymbol{\chi}$ の $\Lambda$-adic form** と呼ぶ:

(条件) 有限個を除くすべての $(k, \zeta) \in \mathfrak{X}$ $(\zeta^{p^r} = 1)$ に対して, ある level $\mathfrak{n}p^{r+1}$, character $\chi_{k,\zeta} := N^{2-k} \cdot (\nu_{k,\zeta} \circ \boldsymbol{\chi})$ の Hilbert cusp form $\mathbf{f}_{k,\zeta}$ で, (0) とは異なる $\mathcal{O}_F$ の任意の ideal $\mathfrak{a}$ に対し

$$c(\mathfrak{a}, \mathbf{f}_{k,\zeta}) = \nu_{k,\zeta}(c(\mathfrak{a}, \mathcal{F}))$$

が成り立つものが存在する.

ここで現れる Hilbert cusp form $\mathbf{f}_{k,\zeta}$ を $\nu_{k,\zeta}(\mathcal{F})$ とも表し, $\mathcal{F}$ の $\nu_{k,\zeta}$ による**特殊化** とよぶ. 上の条件の中で, 特殊化に用いられた有限個を除く $(k, \zeta)$ 全体のなす $\mathfrak{X}$ の部分集合を $A_\mathcal{F}$ とおく.

level $\mathfrak{n}p$, character $\boldsymbol{\chi}$ の $\Lambda$-adic forms 全体のなす $\Lambda_\chi$-加群を $\mathcal{S}_{\Lambda_\chi}(\mathfrak{n}p, \boldsymbol{\chi})$ とおく. 各 $(k, \zeta) \in A_\mathcal{F}$ における特殊化と可換な Hecke 作用素 $T(\mathfrak{a})$, $S(\mathfrak{a})$ ($\mathfrak{a}$ は $F$ の整 ideal) が, $\mathcal{S}_{\Lambda_\chi}(\mathfrak{n}p, \boldsymbol{\chi})$ 上に定まる. つまり, 各 $\mathcal{F} \in \mathcal{S}_{\Lambda_\chi}(\mathfrak{n}p, \boldsymbol{\chi})$ に対し,

$$\nu_{k,\zeta}(T(\mathfrak{a})\mathcal{F}) = T(\mathfrak{a})\nu_{k,\zeta}(\mathcal{F}), \quad \nu_{k,\zeta}(S(\mathfrak{a})\mathcal{F}) = S(\mathfrak{a})\nu_{k,\zeta}(\mathcal{F})$$

が成り立つ.

(2) ([18, Section 1.2]) ある適切な位相のもと, Hilbert cusp forms のなす空間上に定まる **Hida 作用素**

$$e := \lim_{a \to \infty} T(p)^{a!}$$

が, $\mathcal{S}_{\Lambda_\chi}(\mathfrak{n}p,\boldsymbol{\chi})$ 上にも定まり, 各 $(k,\zeta)\in A_{\mathcal{F}}$ における特殊化と可換, つまり,

$$\nu_{k,\zeta}(e\mathcal{F})=e\nu_{k,\zeta}(\mathcal{F})\quad(\mathcal{F}\in\mathcal{S}_{\Lambda_\chi}(\mathfrak{n}p,\boldsymbol{\chi}))$$

を満たす ([18, Proposition 1.2.1]). このとき,

$$\mathcal{S}^0_{\Lambda_\chi}(\mathfrak{n}p,\boldsymbol{\chi}):=e\mathcal{S}_{\Lambda_\chi}(\mathfrak{n}p,\boldsymbol{\chi})$$

とおき, **Λ-adic ordinary cusp forms** の空間という. $e$ と各 Hecke 作用素は可換になるので, $\mathcal{S}^0_{\Lambda_\chi}(\mathfrak{n}p,\boldsymbol{\chi})$ 上にも Hecke 作用素が作用する.

ちなみに, [18, Section 1.4] において, 等式

$$\mathcal{S}^0_{\Lambda_\chi}(\mathfrak{n}p,\boldsymbol{\chi})=\cup_{r\geq 0}\mathcal{S}^0_{\Lambda_\chi}(\mathfrak{n}p^r,\boldsymbol{\chi})$$

が成立することが証明されているため, 本講演では始めから考える level を $\mathfrak{n}p$ に限定することにした.

(3) ([18, Section 1.5]) 正規化された Λ-adic eigenform $\mathcal{F}\in\mathcal{S}^0_{\Lambda_\chi}(\mathfrak{n}p,\boldsymbol{\chi})$ が **Λ-adic newform** であるとは, 各 $(k,\zeta)\in A_{\mathcal{F}}$ に対し, $\nu_{k,\zeta}(\mathcal{F})$ が $p$-stabilized newform となることである. ここで, Hilbert eigenform が **$p$-stabilized newform** であるとは, $p$ の外では new であり, $\mathcal{O}_F$ の $p$ を割る任意の素 idear $\mathfrak{p}$ に対して $T(\mathfrak{p})$-固有値が $p$-進 unit であることを意味する ([18, Section 1.2]).

**Remark 1.1.** Hida の [7, Chapter 7] における Λ-adic forms の解説では, Wiles の流儀とは異なり, 特殊化に $u^{k-2}$ ではなく $u^k$ を用いていることに注意.

**Example 1.1.** $F=\mathbb{Q}$ のときには, Definition 1.1 (1) と同等の意味で, Λ-adic form を

$$\mathcal{F}=\sum_{a=1}^{\infty}c(a,\mathcal{F})q^a$$

と Fourier 展開の形で定義することができる. ここでは, [7, Proposition 7.1.1] に従う形で, cusp form ではなく Eisenstein series を $p$-進解析的に補間するものではあるが, 各 $c(a,\mathcal{F})$ が具体的に得られるという点で優れているので, Λ-adic form の具体例として **Λ-adic Eisenstein series** を紹介する.

$(\mathbb{Z}/\boldsymbol{p}\mathbb{Z})^\times$ の trivial character $\mathbf{1}_{\boldsymbol{p}}$ に対し, Kubota-Leopoldt の $p$-進 $L$-関数を用いて, ある $\Phi(T)\in\mathbb{Z}_p[\![T]\!]$ で

$$c(0,\mathcal{E}):=\frac{\Phi(u^2(1+T)-1)}{2(u^2(1+T)-1)}$$

とおいたとき, 任意の $(k,\zeta)\in\mathfrak{X}$ (ここで, $\zeta$ は 1 の原始 $p^r$ 乗根とする) に対し, $\psi_{k,\zeta}:\mathbb{Z}_p^\times\to(\mathbb{Z}/p^r\boldsymbol{p}\mathbb{Z})^\times\to\bar{\mathbb{Q}}_p^\times$ を $\psi_{k,\zeta}(u):=\zeta,\ \psi_{k,\zeta}|_{\mu_{\varphi(\boldsymbol{p})}}=\mathbf{1}_{\boldsymbol{p}}$

として定義したもとで, 等式

$$\nu_{k,\zeta}(c(0,\mathcal{E})) = \frac{L(1-k,\psi_{k,\zeta}\omega^{-k})}{2}$$

が成立するものが構成される (cf. [7, Theorem 3.5.2]). ここで, $L(s,\psi_{k,\zeta}\omega^{-k})$ は $\psi_{k,\zeta}\omega^{-k}$ に付随する $L$-関数である.

一方で, 群の同型

$$\mathbb{Z}_p \xrightarrow{\sim} 1+\boldsymbol{p}\mathbb{Z}_p; \quad z \mapsto u^z$$

の逆写像を

$$s : 1+\boldsymbol{p}\mathbb{Z}_p \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p$$

とおき, 各 $a \geq 1$ に対し,

$$c(a,\mathcal{E}) := \sum_{0<d|a,\ (d,p)=1} d^{-1}(u^2(1+T))^{s(\langle d\rangle)} \in \mathbb{Z}_p[\![T]\!]$$

とおけば, 任意の $(k,\zeta) \in \mathfrak{X}$ に対し,

$$\nu_{k,\zeta}(c(a,\mathcal{E})) = \sum_{0<d|a,\ (d,p)=1} (\psi_{k,\zeta}\omega^{-k})(d)d^{k-1}$$

となる.

以上の考察から,

$$\mathcal{E} := c(0,\mathcal{E}) + \sum_{a=1}^{\infty} c(a,\mathcal{E})q^a$$

とおけば, 任意の $(k,\zeta) \in \mathfrak{X}$ (ここで, $\zeta$ は 1 の原始 $p^r$ 乗根とする) に対し,

$$\nu_{k,\zeta}(\mathcal{E}) = \frac{L(1-k,\psi_{k,\zeta}\omega^{-k})}{2} + \sum_{a=1}^{\infty}\Big(\sum_{0<d|a,\ (d,p)=1} (\psi_{k,\zeta}\omega^{-k})(d)d^{k-1}\Big)q^a$$

は weight $k$, level $p^r\boldsymbol{p}$, character $\psi_{k,\zeta}\omega^{-k}$ の Eisenstein series となることがわかる. これらは eigenforms であり, 各 $q^a$ の係数が $T(a)$-固有値となる.

厳密に言えば, 定数項の補間を与える $c(0,\mathcal{E})$ が分母に $T$ を含むので $\mathbb{Z}_p[\![T]\!]$ の元ではないのだが, 各 $(k,\zeta) \in \mathfrak{X}$ により Eisenstein series $\nu_{k,\zeta}(\mathcal{E})$ に特殊化することができるという意味で, 分母の $T$ は許しつつ $\mathcal{E}$ を $\Lambda$-adic form の具体例としてみなすことにしておきたい.

$\mathcal{F}_{\Lambda_\chi}$ を $\Lambda_\chi$ の商体とし, $L$ を $F_{\Lambda_\chi}$ の任意の有限次拡大とする. $\mathcal{O}_L$ を $\Lambda_\chi$ の $L$ における整閉包とし, $\mathcal{O}_L$-係数の $\Lambda$-adic ordinary cusp forms の空間を

$$\mathcal{S}^0_{\mathcal{O}_L}(\mathfrak{n}p,\boldsymbol{\chi}) := \mathcal{S}^0_{\Lambda_\chi}(\mathfrak{n}p,\boldsymbol{\chi}) \otimes_{\Lambda_\chi} \mathcal{O}_L$$

とおく．各 $(k,\zeta) \in \mathfrak{X}$ に対し, $\Lambda_\chi$ の素 ideal $\mathrm{Ker}(\nu_{k,\zeta})$ を $P_{k,\zeta}$ とおく．また, $\mathcal{O}_L$-algebra 準同型

$$\tilde{\nu}_{k,\zeta} : \mathcal{O}_L \to \bar{\mathbb{Q}}_p$$

を $\tilde{\nu}_{k,\zeta}|_{\Lambda_\chi} = \nu_{k,\zeta}$ となるように取っておき, $\mathcal{O}_L$ の素 ideal $\mathrm{Ker}(\tilde{\nu}_{k,\zeta})$ を $\tilde{P}_{k,\zeta}$ とおく．このとき, $\tilde{\nu}_{k,\zeta}(\mathcal{O}_L)$ は $\mathbb{Q}_p$ のある有限次拡大の整数環であり, $\mathcal{O}_L[\zeta]$ を含むことに注意.

ここで, 以上の設定のもと, 本講演の主定理を紹介する:

**Theorem 1.1.** *$\mathcal{F} \in \mathcal{S}^0_{\mathcal{O}_L}(\mathfrak{n}p, \boldsymbol{\chi})$ を level $\mathfrak{n}p$, character $\chi$ をもつ $\mathcal{O}_L$-係数の $\Lambda$-adic newform とする．このとき,*

(1) (=[18, Theorem 4 in Introduction=Theorem 2.2.1]) $\mathcal{F}$ **に付随する** Galois 表現 $\rho_{\mathcal{F}}$, すなわち, $L$-係数の既約な 2 次元 Galois 表現

$$\rho_{\mathcal{F}} : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \to \mathrm{GL}_2(L)$$

で, 次の二つの条件

(i) $\mathfrak{n}p$ の外不分岐, つまり, $\mathcal{O}_F$ の $\mathfrak{n}p$ を割らない任意の素 ideal $\mathfrak{q}$ における惰性群 $I_{\mathfrak{q}}$ に制限したとき,

$$\rho_{\mathcal{F}}|_{I_{\mathfrak{q}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる;

(ii) $\mathcal{O}_F$ の $\mathfrak{n}p$ を割らない任意の素 ideal $\mathfrak{q}$ に対し,

$$\mathrm{Trace}(\rho_{\mathcal{F}}(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{q}})) = c(\mathfrak{q}, \mathcal{F}),$$
$$\det(\rho_{\mathcal{F}}(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{q}})) = \chi(\mathfrak{q}) N\mathfrak{q}$$

を満たすものが存在する．ここで, $\mathrm{Frob}_{\mathfrak{q}}$ は $\mathfrak{q}$ における Frobenius 元を表す.

(2) (=[18, Theorem 2.2.2]) (1) の $\rho_{\mathcal{F}}$ について, $\mathcal{O}_F$ の $p$ を割る任意の素 ideal $\mathfrak{p}$ において, ある二つの characters $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ で, とくに $\varepsilon_2$ は不分岐で $\varepsilon_2(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}}) = c(\mathfrak{p}, \mathcal{F})$ を満たすものにより,

$$\rho_{\mathcal{F}}|_{D_{\mathfrak{p}}} \cong \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & * \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}$$

とかける．この状況を $\mathfrak{p}$ **で ordinary である**という.

**Remark 1.2.** この定理は, $F = \mathbb{Q}$ の場合には Hida [5] により証明されている.

**Remark 1.3.** Wiles [18] の本来の目的は, Hilbert $p$-stabilized newform $\mathbf{f}$ に付随する ordinary な Galois 表現 $\rho_{\mathbf{f}}$ を構成することであった ([18, Theorem 1 (i)=Theorem 2.1.2, Theorem 2=Theorem 2.1.4]). その目的

は, おおよそ次のように $\Lambda$-adic newform に付随する Galois 表現を用いて達せられている:

[18, Theorem 1.4.1] において, $\mathbf{f}$ に対し, ある $\Lambda$-adic newform $\mathcal{F}$ が存在し,

$$\mathbf{f} = \tilde{\nu}_{k,1}(\mathcal{F})$$

が成り立つことが証明される. このとき, 上記の定理により, $\mathcal{F}$ に付随する ordinary な Galois 表現 $\rho_{\mathcal{F}}$ が構成されており, その $L$ 上の表現空間内に $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$-不変な $\mathcal{O}_L$-lattice をとることができて, それを $\tilde{\nu}_{k,1}$ で特殊化することで $\rho_{\mathbf{f}}$ が得られる.

以上のように, 一つの Galois 表現 $\rho_{\mathcal{F}}$ から無数の Galois 表現 $\rho_{\tilde{\nu}_{k,\zeta}(\mathcal{F})}$ たちが生じることから, 本講演のタイトルにあるように, $\rho_{\mathcal{F}}$ のことを **big Galois representation** と呼ぶ.

## 2. 特別な場合

記号は前節と同じものを用いる. 本節では, Theorem 1.1 をある特別な場合に証明する. この特別な場合での結果は, 次節で一般の場合に Theorem 1.1 を証明する際に鍵となるものであり, 本節は Theorem 1.1 の証明の第一段階となる.

そのために, 以下, 二つの Lemmas を準備する. 一つ目は, 無数の Galois 表現たちを擬表現の理論を用いて貼り合わせることで, 一つの大きな Galois 表現を構成するものである:

**Lemma 2.1** (=[18, Lemma 2.2.3]). $\{P_i\}_{i=1}^{\infty}$ を $\mathcal{O}_L$ の高さ 1 の $p$ の上にない素 ideals の無限集合で, 任意の $i \neq j$ に対し $P_i \cap \Lambda_\chi \neq P_j \cap \Lambda_\chi$ となるものとする. 各 $i$ に対し,

$$\rho_i : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \to \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L/P_i)$$

を連続な Galois 表現で, $F$ の素点の有限集合 $\Sigma_i$ の外不分岐であるものとする. $\mathcal{O}_F$ の各素 ideal $\mathfrak{q}$ に対し, ある $A_{\mathfrak{q}}$, $B_{\mathfrak{q}} \in \mathcal{O}_L$ が存在して, 各 $i$ に対し $\Sigma_i$ に属さない任意の素 ideal $\mathfrak{q}$ について,

$$\mathrm{Trace}(\rho_i(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{q}})) = A_{\mathfrak{q}} \pmod{P_i},$$
$$\det(\rho_i(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{q}})) = B_{\mathfrak{q}} \pmod{P_i}$$

が成り立つと仮定する. さらに, 複素共役 $c \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ に対し, 各 $i$ に対し $\det(\rho_i(c)) = -1$ となると仮定する.

このとき, $\Sigma := \cup_i \Sigma_i$ の外不分岐な $L$-係数の Galois 表現

$$\rho : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \to \mathrm{GL}_2(L)$$

で, $\Sigma$ に属さない $\mathcal{O}_F$ の任意の素 ideal $\mathfrak{q}$ に対し,

$$\mathrm{Trace}(\rho(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{q}})) = A_{\mathfrak{q}},$$
$$\det(\rho(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{q}})) = B_{\mathfrak{q}}$$

を満たすものが存在する.

*Proof.* ここでは簡単のため, $p \neq 2$ としておく ($p = 2$ の場合も同様に証明できる).

各 $i$ に対し, $\mathcal{O}_L/P_i$ は $\mathbb{Q}_p$ のある有限次拡大の整数環となる. その商体を $\mathrm{Frac}(\mathcal{O}_L/P_i)$ とかくことにする. $c^2 = \mathrm{id}$ かつ $\det(\rho_i(c)) = -1$ であるから, $\rho_i$ の表現空間の $\mathrm{Frac}(\mathcal{O}_L/P_i)$ 上の基底をうまく選ぶことで,

$$\rho_i(c) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となるようにできる. この基底のもと, 各 $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ に対し,

$$\rho_i(\sigma) = \begin{pmatrix} a_\sigma & b_\sigma \\ c_\sigma & d_\sigma \end{pmatrix}$$

とおいて, 各 $\sigma,\ \tau \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ に対し,

$$x_{\sigma,\tau} := b_\sigma c_\tau$$

と定義する. 任意の $\sigma, \tau, \gamma, \beta \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ と $\Sigma_i$ に属さない $\mathcal{O}_F$ の任意の素 ideal $\mathfrak{q}$ における惰性群 $I_{\mathfrak{q}}$ の任意の元 $g$ に対し, 以上の定義と $\rho_i$ が $\mathfrak{q}$ で不分岐であることから, 次の data (I) と関係式 (II)-(IV) が得られる:

$$\begin{array}{rl}
\text{(I)} & \text{continuous functions on } \mathrm{Gal}(\bar{F}/F):\ a_\sigma,\ d_\sigma,\ x_{\sigma,\tau}, \\
\text{(II)} & a_{\sigma\tau} = a_\sigma a_\tau + x_{\sigma,\tau}, \quad d_{\sigma\tau} = d_\sigma a_\tau + x_{\tau,\sigma}, \\
 & x_{\sigma\tau,\gamma\beta} = a_\sigma a_\beta x_{\tau,\gamma} + a_\beta d_\tau x_{\sigma,\gamma} + a_\sigma d_\gamma x_{\tau,\beta} + d_\tau d_\gamma x_{\sigma,\beta}, \\
\text{(III)} & a_{\mathrm{id}} = d_{\mathrm{id}} = d_c = a_g = d_g = 1, \quad a_c = -1, \\
 & x_{\sigma,\mathrm{id}} = x_{\mathrm{id},\tau} = x_{\sigma,c} = x_{c,\tau} = x_{\sigma,g} = x_{g,\tau} = 0, \\
\text{(IV)} & x_{\sigma,\tau} x_{\gamma,\beta} = x_{\sigma,\beta} x_{\gamma,\tau}.
\end{array}$$

このとき, data (I) にある $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ 上の連続関数の三つ組

$$\alpha := (a_\sigma, d_\sigma, x_{\sigma,\tau})$$

を $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ の $\mathrm{Frac}(\mathcal{O}_L/P_i)$ への $\Sigma_i$ の外不分岐な**擬表現**という. 一般に, $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ の表現 $\rho$ から, 上述の構成を通して誘導される擬表現を $\tilde{\rho}$ とかくことにする. 擬表現 $\alpha = (a_\sigma, d_\sigma, x_{\sigma,\tau})$ に対して,

$$\mathrm{Trace}\,\alpha(\sigma) := a_\sigma + d_\sigma, \quad \det\alpha(\sigma) := a_\sigma d_\sigma - x_{\sigma,\sigma} \quad (\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F))$$

とおく (cf. [19, Section 1.3] にも擬表現の解説があるのでご参照いただきたい).

さて, 各 $i$ に対し, 上で $\rho_i$ から構成した $\mathrm{Frac}(\mathcal{O}_L/P_i)$ への擬表現 $\tilde{\rho}_i := (a_\sigma, d_\sigma, x_{\sigma,\tau})$ については, $\rho_i(c) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ であるため,

$$\begin{aligned} a_\sigma &= \frac{1}{2}(\mathrm{Trace}(\rho_i(\sigma)) - \mathrm{Trace}(\rho_i(\sigma c))), \\ d_\sigma &= \frac{1}{2}(\mathrm{Trace}(\rho_i(\sigma)) + \mathrm{Trace}(\rho_i(\sigma c))), \\ x_{\sigma,\tau} &= a_{\sigma\tau} - a_\sigma a_\tau \end{aligned}$$

が成り立つので, $\Sigma_i$ が有限集合であることと, $\Sigma_i$ に属さない $\mathcal{O}_F$ の任意の素 ideal $\mathfrak{q}$ で

$$\mathrm{Trace}(\rho_i(\mathrm{Frob}_\mathfrak{q})) = A_q \pmod{P_i} \in \mathcal{O}_L/P_i$$

であること, そして, 2 が $\mathcal{O}_L/P_i$ で可逆であることから, Chebotarev の稠密定理 (cf. [7, Theorem 1.3.1]) により, $\tilde{\rho}_i$ は $\mathrm{Frac}(\mathcal{O}_L/P_i)$ のみならず $\mathcal{O}_L/P_i$ に値をもつ擬表現であることがわかる.

以下, 求める Galois 表現 $\rho : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \to \mathrm{GL}_2(L)$ を構成する手助けとして, まず, $\rho$ から誘導されるものに相当する $\mathcal{O}_L$ への擬表現 $\alpha$ を構成する. そのために, 各 $r \geq 1$ に対し, $\mathcal{O}_L/P_1 \cap \cdots \cap P_r$ への擬表現 $\alpha_r$ で, 任意の $i = 1, \ldots, r$ について,

$$\alpha_r \equiv \tilde{\rho}_i \pmod{P_i}$$

を満たすものがあるとき, 同様の条件を満たす $\mathcal{O}_L/P_1 \cap \cdots \cap P_{r+1}$ への擬表現 $\alpha_{r+1}$ を構成する: $\Sigma_1 \cup \cdots \cup \Sigma_r \cup \Sigma_{r+1}$ に属さない $\mathcal{O}_F$ の任意の素 ideal $\mathfrak{q}$ に対し,

$$\mathrm{Trace}\,\alpha_r(\mathrm{Frob}_\mathfrak{q}) \equiv A_\mathfrak{q} \pmod{P_1 \cap \cdots \cap P_r}$$

であり, 一方,

$$\mathrm{Trace}\,\tilde{\rho}_{r+1}(\mathrm{Frob}_\mathfrak{q}) \equiv A_\mathfrak{q} \pmod{P_{r+1}}$$

であるので,

$$\mathrm{Trace}\,\alpha_r(\mathrm{Frob}_\mathfrak{q}) \equiv \mathrm{Trace}\,\tilde{\rho}_{r+1}(\mathrm{Frob}_\mathfrak{q}) \pmod{(P_1 \cap \cdots \cap P_r) + P_{r+1}}$$

を得る. よって, Chebotarev の稠密定理により, $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ 上で

$$\mathrm{Trace}\,\alpha_r \equiv \mathrm{Trace}\,\tilde{\rho}_{r+1} \pmod{(P_1 \cap \cdots \cap P_r) + P_{r+1}}$$

となる. したがって, $\mathcal{O}_L/(P_1 \cap \cdots \cap P_r) + P_{r+1}$ への擬表現として

$$\alpha_r \equiv \tilde{\rho}_{r+1} \pmod{(P_1 \cap \cdots \cap P_r) + P_{r+1}}$$

が得られて, 剰余環のなす完全列

$$0 \to \mathcal{O}_L/P_1 \cap \cdots \cap P_r \cap P_{r+1} \xrightarrow{(1)} (\mathcal{O}_L/P_1 \cap \cdots \cap P_r) \oplus (\mathcal{O}_L/P_{r+1}) \\ \xrightarrow{(2)} \mathcal{O}_L/((P_1 \cap \cdots \cap P_r) + P_{r+1}) \to 0$$

により, $\mathcal{O}_L/P_1 \cap \cdots \cap P_{r+1}$ への擬表現 $\alpha_{r+1}$ で

$$\alpha_{r+1} \equiv \alpha_r \pmod{P_1 \cap \cdots \cap P_r}, \quad \alpha_{r+1} \equiv \tilde{\rho}_{r+1} \pmod{P_{r+1}}$$

を満たすものが定まる. ここで, 上の完全列を定める準同型 (1), (2) はそれぞれ

$$\begin{aligned} &(1)\ x(\mathrm{mod}\ P_1 \cap \cdots \cap P_r \cap P_{r+1}) \\ &\qquad \mapsto (x(\mathrm{mod}\ P_1 \cap \cdots \cap P_r), x(\mathrm{mod}\ P_{r+1})), \\ &(2)\ (x(\mathrm{mod}\ P_1 \cap \cdots \cap P_r), y(\mathrm{mod}\ P_{r+1})) \\ &\qquad \mapsto (x-y)(\mathrm{mod}\ (P_1 \cap \cdots \cap P_r) + P_{r+1}) \end{aligned}$$

で与えられるものである. 以上の操作を繰り返すことで, 擬表現の無限列 $\{\alpha_r\}_r$ が入手できて, 射影極限 $\varprojlim_r$ をとれば, Weierstrass preparation theorem (cf. [7, Lemma 7.3.1]) により

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} P_i = (0)$$

であるから,

$$\mathcal{O}_L = \varprojlim_r \mathcal{O}_L/P_1 \cap \cdots \cap P_r$$

への擬表現 $\alpha = (a_\sigma, d_\sigma, x_{\sigma,\tau})$ で, $\Sigma$ に属さない $\mathcal{O}_F$ の任意の素 ideal $\mathfrak{q}$ に対し,

$$\mathrm{Trace}\,\alpha(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{q}}) = A_{\mathfrak{q}}, \quad \det \alpha(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{q}}) = B_{\mathfrak{q}}$$

を満たすものが定まる.

すべての $\sigma, \tau \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ に対して $x_{\sigma,\tau} = 0$ ならば,

$$\rho(\sigma) := \begin{pmatrix} a_\sigma & 0 \\ 0 & d_\sigma \end{pmatrix} \quad (\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F))$$

と定義し, ある $\sigma_0, \tau_0 \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ で $x_{\sigma_0,\tau_0} \neq 0$ となるときは,

$$b_\sigma := \frac{x_{\sigma,\tau_0}}{x_{\sigma_0,\tau_0}}, \quad c_\sigma := x_{\sigma_0,\sigma} \quad (\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F))$$

とおいて

$$\rho(\sigma) := \begin{pmatrix} a_\sigma & b_\sigma \\ c_\sigma & d_\sigma \end{pmatrix} \quad (\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F))$$

と定義すれば, $\rho$ は $\tilde{\rho}=\alpha$ となる $\mathrm{GL}_2(L)$ への Galois 表現であり, $\Sigma$ に属さない $\mathcal{O}_F$ の任意の素 ideal $\mathfrak{q}$ における惰性群 $I_{\mathfrak{q}}$ の任意の元 $\sigma$ に対し, 各 $i$ で

$$\rho(\sigma) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{P_i}$$

を満たすので, 等式

$$\rho(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が成立し, $\rho$ は $\mathfrak{q}$ で不分岐となる. さらに

$$\mathrm{Trace}(\rho(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{q}})) = A_{\mathfrak{q}},$$
$$\det(\rho(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{q}})) = B_{\mathfrak{q}}$$

を満たすので, $\rho$ は Lemma 2.1 の条件を満たす. □

次に, 二つ目の Lemma についてであるが, Wiles が論文 [18] を発表する頃までには, weight が 2 以上の Hilbert newform $\mathbf{f}$ について, Shimura [14], Deligne [2], Rogawski-Tunnell [13], Ohta [11] の結果により, 次の二つのうちいずれかの条件が満たされるとき $\mathbf{f}$ に付随する既約な Galois 表現 $\rho_{\mathbf{f}}$ が構成されていた (cf. これらの結果に関する解説は [18, Introduction] を参照のこと. また, Hilbert newforms に付随する Galois 表現の構成に関する近年までの歴史的な流れについては [9, Section 2.3.8] に解説されている):

条件 (I): $[F:\mathbb{Q}]$ は奇数である;
条件 (II): $\mathbf{f}$ に付随する $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ の保型表現 $\pi_{\mathbf{f}}$ が, ある有限素点で special 表現か supercuspidal 表現をもつ.

そこで, ある特別な場合で, Hilbert newforms に付随する Galois 表現が ordinary であることを主張するのが次の二つ目の Lemma である:

**Lemma 2.2** (=[18, Lemma 2.1.5]=[17, Theorem 2.2])**.** *$\mathbf{f}$ を weight 2, character $\psi_{\mathbf{f}}$ の Hilbert newform とし, $p$ を割る $\mathcal{O}_F$ の任意の素 ideal $\mathfrak{p}$ に対し, $\mathbf{f}$ の $T(\mathfrak{p})$-固有値 $c(\mathfrak{p},\mathbf{f})$ が $p$-進 unit であるとする. さらに, $\mathbf{f}$ について, 上述の条件 (I) と (II) のいずれかが成立すると仮定する. 2 次多項式*

$$x^2 - c(\mathfrak{p},\mathbf{f})x + \psi_{\mathbf{f}}(\mathfrak{p})N\mathfrak{p}$$

*の二つの根のうち, $p$-進 unit である方を $\alpha_{\mathfrak{p}}$ とおく ($\alpha_{\mathfrak{p}}$ は $\mathbf{f}$ に付随する $p$-stabilized newform $\mathbf{f}^*$ の $T(\mathfrak{p})$-固有値であることに注意).*

*このとき, $\mathbf{f}$ に付随する $p$-進 Galois 表現 $\rho_{\mathbf{f}}$ を $\mathfrak{p}$ における分解群 $D_{\mathfrak{p}}$ に制限すると, ある二つの characters $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ で, とくに $\varepsilon_2$ は不分岐で*

$\varepsilon_2(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}}) = \alpha_{\mathfrak{p}}$ を満たすものが存在し,

$$\rho_{\mathbf{f}}|_{D_{\mathfrak{p}}} \cong \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & * \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}$$

とかける. つまり, $\rho_{\mathbf{f}}$ は $\mathfrak{p}$ で ordinary である.

*Proof.* 簡単のため, ここでは (I) の場合, つまり $[F:\mathbb{Q}]$ が奇数である場合を考える ((II) の場合でも同様に証明できることが, [18, Lemma 2.1.5] の略証に解説されている). 以下, [17, Theorem 2.2] の証明と [18, Lemma 2.1.5] の略証における解説に従って, (I) の場合の証明を概説したい (詳細はそれぞれの原論文の該当箇所をご参照いただきたい).

Shimura [15], Hida [4], Carayol [1] の結果から, それに付随する $p$-進 Galois 表現が $\rho_{\mathbf{f}}$ の役割を果たすような, $F$ 上定義された Abel 多様体 $A_{\mathbf{f}}$ が存在することが知られている (cf. [17, Theorem 2.1]). このとき, [17, Lemma in Section 2.1] により, $A_{\mathbf{f}}$ は $\mathfrak{p}$ で, good reduction かもしくは, bad reduction の場合には purely multiplicative reduction かあるいは potentially good reduction をもつことが示されている.

(i) purely multiplicative reduction をもつ場合: Raynaud [12, Théorème 1] により, Abel 多様体への Tate curve の理論の一般化がなされているので, $A_{\mathbf{f}}$ に付随する $p$-進 Galois 表現 $\rho_{\mathbf{f}}|_{D_{\mathfrak{p}}}$ が分岐する 1 次元部分表現をもち, それによる商表現が自明な表現となり, $\rho_{\mathbf{f}}$ が $\mathfrak{p}$ で ordinary であることがわかる.

(ii) potentially good reduction をもつ場合: $A_{\mathbf{f}}$ が good reduction をもつような $F_{\mathfrak{p}}$ の有限次拡大 $K$ をうまく選び, $\mathcal{O}_K$ 上と $\mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}$ 上のそれぞれで定義される $A_{\mathbf{f}}$ の Néron models の special fibers への reduction maps を用いた議論と Carayol [1] の結果を合わせて, $A_{\mathbf{f}}$ が $\mathfrak{p}$ で good reduction をもつ場合へと帰着させる (ここの議論が [17, Theorem 2.2] の証明で要となる部分である).

(iii) good reduction をもつ場合: $A_{\mathbf{f}}$ が good reduction をもつ $p$ 以外の素数 $\ell$ で, $A_{\mathbf{f}}$ に付随する $\ell$-進 Galois 表現 における $\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}}$ の特性多項式が $x^2 - c(\mathfrak{p}, \mathbf{f})x + \psi_{\mathbf{f}}(\mathfrak{p})N\mathfrak{p}$ であることが示され (cf. $F=\mathbb{Q}$ の場合におけるこの特性多項式の計算については, たとえば [8, Section 4.2] を参照のこと), [3, Corollary in Section V.2] により, これは $A_{\mathbf{f}}$ の $p$-divisible group $A_{\mathbf{f},p}$ に付随する $p$-進 Galois 表現における $\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}}$ の特性多項式と一致することがわかる.

さらに, 特性多項式 $x^2 - c(\mathfrak{p}, \mathbf{f})x + \psi_{\mathbf{f}}(\mathfrak{p})N\mathfrak{p}$ が $p$-進付値が 0 である根 $\alpha_{\mathfrak{p}}$ と $p$-進付値が正である根の相異なる二つの根をもつことに注意して, [3, Section IV.8] により, $p$-divisible group $A_{\mathbf{f},p}$ の connected-étale 分解

$$0 \to A^0_{\mathbf{f},p} \to A_{\mathbf{f},p} \to A^{\mathrm{et}}_{\mathbf{f},p} \to 0$$

に対応して, 付随する $p$-進 Galois 表現 $\rho_{\mathbf{f}}|_{D_{\mathfrak{p}}}$ は, $\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}}$ が $p$-進付値 0 の根 $\alpha_{\mathfrak{p}}$ によるスカラー倍で作用する不分岐な 1 次元の商表現をもつことが示されている. □

以上の二つの Lemmas を用いて, 特別な場合に Theorem 1.1 を証明しておく. これは, 次節で一般の場合に Theorem 1.1 を証明する際に, $\mathfrak{n}p$ と互いに素な $\mathcal{O}_F$ の無限個の素 ideals $l$ を用いて, “$l$ に関して new” な $\Lambda$-adic eigenforms に付随する Galois 表現に議論を帰着させるうえで, 重要な役割を果たすものである:

**Proposition 2.3** (=[18, Lemma 2.2.4])**.** $\mathcal{F} \in \mathcal{S}^0_{\mathcal{O}_L}(\mathfrak{n}p, \boldsymbol{\chi})$ を $\Lambda$-adic newform とする. 上述の条件 (I) と (II) のうちいずれか一方が, 任意の $(k,\zeta) \in A_{\mathcal{F}}$ における特殊化 $\tilde{\nu}_{k,\zeta}(\mathcal{F})$ に対して満たされていると仮定する. このとき, $\mathcal{F}$ に対して Theorem 1.1 の主張が成立する.

*Proof.* (1) $\rho_{\mathcal{F}}$ の存在について: 任意の $(k,\zeta) \in A_{\mathcal{F}}$ における $\mathcal{F}$ の特殊化 $\tilde{\nu}_{k,\zeta}(\mathcal{F})$ が条件 (I) もしくは (II) を満たすので, Lemma 2.2 の直前で言及したように, $\tilde{\nu}_{k,\zeta}(\mathcal{F})$ に付随する Galois 表現

$$\rho_{k,\zeta} : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \to \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L/\tilde{P}_{k,\zeta})$$

が存在する. とくに, $\rho_{k,\zeta}$ は $\mathfrak{n}p$ の外不分岐であり, 複素共役 $c \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ に対し $\det(\rho_{\mathbf{f}}(c)) = -1$ となることに注意. $\{\tilde{P}_{k,\zeta}\}_{(k,\zeta)\in A_{\mathcal{F}}}$ は $\Lambda_\chi$ に制限したときに高さ 1 で $p$ の上にない相異なる無限個の $\mathcal{O}_L$ の素 ideals の集合なので, Lemma 2.1 を適用することができ, 求める $\mathcal{F}$ に付随する Galois 表現

$$\rho_{\mathcal{F}} : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \to \mathrm{GL}_2(L)$$

が得られる. このとき, しかるべき $(k,\zeta)$ での特殊化 $\rho_{k,\zeta}$ が既約なので, $\rho_{\mathcal{F}}$ も既約であることがわかる.

(2) $\rho_{\mathcal{F}}|_{D_{\mathfrak{p}}}$ の振る舞いについて: $p$ を割る $\mathcal{O}_F$ の任意の素 ideal $\mathfrak{p}$ を一つ取り,

$$\varepsilon : D_{\mathfrak{p}} \to L^\times$$

を不分岐な character で, $\varepsilon(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}}) = c(\mathfrak{p}, \mathcal{F})$ となるものとする. ここで, $D_{\mathfrak{p}}$ の二つの 2 次元表現

$$\rho_{\mathcal{F}},\ (\varepsilon^{-1}\det\rho_{\mathcal{F}} \oplus \varepsilon) : D_{\mathfrak{p}} \to \mathrm{GL}_2(L)$$

を考えると, $D_{\mathfrak{p}}$ 上で

$$\det\rho_{\mathcal{F}} = \varepsilon^{-1}(\det\rho_{\mathcal{F}})\cdot\varepsilon = \det(\varepsilon^{-1}\det\rho_{\mathcal{F}} \oplus \varepsilon)$$

である．また，$k = 2$ としたうえで，無限個の $(2, \zeta) \in A_{\mathcal{F}}$ に対し，Lemma 2.2 により $\rho_{\tilde{\nu}_{2,\zeta}(\mathcal{F})}$ が $\mathfrak{p}$ で ordinary であるので，

$$\begin{aligned}\operatorname{Trace}\rho_{\mathcal{F}}(\operatorname{mod}\tilde{P}_{2,\zeta}) &= \operatorname{Trace}(\rho_{\tilde{\nu}_{2,\zeta}(\mathcal{F})})\\ &= (\varepsilon(\operatorname{mod}\tilde{P}_{2,\zeta}))^{-1}(\det\rho_{\tilde{\nu}_{2,\zeta}(\mathcal{F})}) + \varepsilon(\operatorname{mod}\tilde{P}_{2,\zeta})\\ &= \operatorname{Trace}(\varepsilon^{-1}\det\rho_{\mathcal{F}}\oplus\varepsilon)(\operatorname{mod}\tilde{P}_{2,\zeta})\end{aligned}$$

となり，Weierstrass preparation theorem により，$D_{\mathfrak{p}}$ 上

$$\operatorname{Trace}(\rho_{\mathcal{F}}) = \operatorname{Trace}(\varepsilon^{-1}\det\rho_{\mathcal{F}}\oplus\varepsilon)$$

を得る．したがって，$\rho_{\mathcal{F}}|_{D_{\mathfrak{p}}}$ の semisimplification は $\varepsilon^{-1}\det\rho_{\mathcal{F}}\oplus\varepsilon$ と同値であり，とくに，$\rho_{\mathcal{F}}|_{D_{\mathfrak{p}}}$ は $\varepsilon^{-1}\det\rho_{\mathcal{F}}$ か $\varepsilon$ で作用する 1 次元の部分表現をもつ．ここで，$\rho_{\mathcal{F}}|_{D_{\mathfrak{p}}}$ が $\varepsilon^{-1}\det\rho_{\mathcal{F}}$ で作用する 1 次元の部分表現をもつことが示されれば，一方の $\varepsilon$ は Theorem 1.1 (2) の主張にある $\varepsilon_2$ と同じ性質をもつので，$\varepsilon^{-1}\det\rho_{\mathcal{F}}$ を $\varepsilon_1$ と見立てることで，$\mathcal{F}$ に対して Theorem 1.1 (2) が証明されたことになる．

以下，$\varepsilon_1 := \varepsilon^{-1}\det\rho_{\mathcal{F}}$，$\varepsilon_2 := \varepsilon$ とおく．もし，$\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ ならば何も示すことはない．したがって，$\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ と仮定して，$\varepsilon_1$ で作用する 1 次元の部分表現が存在することを示せばよい．

(1) で擬表現を用いて Lemma 2.1 の証明のように $\rho_{\mathcal{F}}$ を構成した際，各 $\sigma \in \operatorname{Gal}(\bar{F}/F)$ に対し $\rho_{\mathcal{F}}(\sigma)$ の $(1,2)$-成分 $b_\sigma$ の分母に用いられた $\xi := x_{\sigma_0,\tau_0} \in \mathcal{O}_L$ $(\xi \neq 0)$ に着目すれば，$\rho_{\mathcal{F}}$ は $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L[\xi^{-1}])$ に値をとることがわかる．

Weierstrass preparation theorem により，$\xi \notin \tilde{P}_{2,\zeta}$ となる $(2,\zeta) \in A_{\mathcal{F}}$ は無限個存在し，$\rho_{\mathcal{F}}|_{D_{\mathfrak{p}}}$ の表現空間

$$V := \mathcal{O}_L[\xi^{-1}] \oplus \mathcal{O}_L[\xi^{-1}]$$

を，それらの $(2,\zeta)$ で特殊化した $\rho_{\tilde{\nu}_{2,\zeta}(\mathcal{F})}$ の表現空間を

$$V_{2,\zeta} := (\mathcal{O}_L/\tilde{P}_{2,\zeta})[\xi_{2,\zeta}^{-1}] \oplus (\mathcal{O}_L/\tilde{P}_{2,\zeta})[\xi_{2,\zeta}^{-1}]$$

とおく．ここで，$\xi_{2,\zeta}$ は，$\tilde{\nu}_{2,\zeta}(\xi) \in \tilde{\nu}_{2,\zeta}(\mathcal{O}_L)$ の同型 $\tilde{\nu}_{2,\zeta}(\mathcal{O}_L) \cong \mathcal{O}_L/\tilde{P}_{2,\zeta}$ における像を表す．Lemma 2.2 により，各 $(2,\zeta)$ において，$V_{2,\zeta}$ は $D_{\mathfrak{p}}$ が $\tilde{\nu}_{2,\zeta}\circ\varepsilon_1$ で作用する 1 次元部分空間 $W_{2,\zeta}$ をもつ．

Weierstrass preparation theorem により，特殊化の直積

$$\tilde{\nu} := \prod_{(2,\zeta)} \tilde{\nu}_{2,\zeta} : V \to \prod_{(2,\zeta)} V_{2,\zeta}$$

は単射であり，

$$W := \tilde{\nu}^{-1}\Big(\prod_{(2,\zeta)} W_{2,\zeta}\Big)$$

は $D_{\mathfrak{p}}$ が $\prod_{(2,\zeta)} \tilde{\nu}_{2,\zeta} \circ \varepsilon_1$ で作用する $V$ の部分空間で,

$$\tilde{\nu}|_W : W \to \prod_{(2,\zeta)} W_{2,\zeta}$$

も単射となる.

もし $W = V$ ならば, Wierestrass preparation theorem により, $V$ 全体として $D_{\mathfrak{p}}$-作用が $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 \end{pmatrix}$ で与えられてしまい, $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ と仮定していることに反する. 同様に, $W = \{0\}$ であるならば, 商空間 $V/W = V$ 上への $D_{\mathfrak{p}}$-作用 が $\begin{pmatrix} \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}$ で与えられてしまい, やはり $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ と仮定していることに矛盾する. よって, $W$ は $D_{\mathfrak{p}}$ が $\varepsilon_1$ として作用する $V$ の非自明な部分表現であることがわかり, $\rho_{\mathcal{F}}|_{D_{\mathfrak{p}}}$ は $\varepsilon_1$ を 1 次元部分表現としてもつことが示された. □

## 3. Theorem 1.1 の証明

本節では以上の準備のもと, $\Lambda$-adic newform $\mathcal{F}$ に付随する Galois 表現 $\rho_{\mathcal{F}}$ の存在と, $p$ を割る素 ideal $\mathfrak{p}$ で $\rho_{\mathcal{F}}|_{D_{\mathfrak{p}}}$ が ordinary であることを主張する Theorem 1.1 の証明を概説する.

$\mathcal{F} \in \mathcal{S}^0_{\mathcal{O}_L}(\bar{\mathfrak{n}}, \boldsymbol{\chi})$ を Theorem 1.1 の主張にある $\Lambda$-adic newform とする. $F_{\Lambda_\chi}$ 上 $\mathcal{F}$ の Hecke 固有値全体で生成される有限次拡大を $M_{\mathcal{F}}$ とおき, $\mathcal{F}$ の **Hecke 体**と呼ぶ. $M_{\mathcal{F}}$ の中での $\Lambda_\chi$ の整閉包を $\Lambda_{\mathcal{F}}$ とおく:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}_L & \subset & L \\ \text{int.cl.} \cup & & \cup \\ \Lambda_{\mathcal{F}} & \subset & M_{\mathcal{F}} \\ \text{int.cl.} \cup & & \cup \\ \Lambda_\chi & \subset & F_{\Lambda_\chi}. \end{array}$$

$\mathcal{F}$ に付随する Galois 表現を構成する手助けとして, 議論する状況をすでに Galois 表現の存在が知られている場合へと移し替えるために, $\mathfrak{n}p$ と互いに素な $\mathcal{O}_F$ の任意の素 ideal $l$ をとり, 次で定義される "$l$ に関して new" な $\Lambda$-adic eigenforms に着目する. そのために, $\bar{F}_{\Lambda_\chi}$ を $F_\chi$ の代数的閉包とし, $L$ を $\mathcal{S}^0_{\bar{F}_{\Lambda_\chi}}(\mathfrak{n}p, \boldsymbol{\chi}) := \mathcal{S}^0_{\Lambda_\chi}(\mathfrak{n}p, \boldsymbol{\chi}) \otimes_{\Lambda_\chi} \bar{F}_{\Lambda_\chi}$ に属する任意の $\Lambda$-adic eigenforms の Hecke 固有値をすべて含むように大きくしておく (ここで, [18, Theorem 1.2.2] により, $\mathcal{S}^0_{\bar{F}_{\Lambda_\chi}}(\mathfrak{n}p, \boldsymbol{\chi})$ は有限次であることに注意).

**Definition 3.1** ([18, Section 1.6]). $\Lambda$-adic cusp forms からなる有限集合 $\{\mathcal{F}_i(\mathfrak{a}_{ij} z) |\ \mathcal{F}_i$ は $l$ で割り切れる level $\mathfrak{m}_i p$ ($(\mathfrak{m}_i, p) = 1$), character $\boldsymbol{\chi}$ の $\mathcal{O}_L$-係数の $\Lambda$-adic newform で, $\mathfrak{a}_{ij}$ は $\mathfrak{a}_{ij}\mathfrak{m} | \mathfrak{n} l$ を満たす $l$ と互いに

素な $\mathcal{O}_F$ の ideal $\}_{i,j}$ で, $L$ 上生成された空間を $\mathcal{S}_L^0(\mathfrak{n}pl,\boldsymbol{\chi})^{l\text{-new}}$ とおき, $l$ **に関して new** な $\Lambda$-adic cusp forms の空間という. ここで, $\mathcal{F}_i(\mathfrak{a}_{ij}z)$ は, 各 $(k,\zeta)\in A_{\mathcal{F}_i}$ において, $\mathcal{F}_i$ の特殊化 $\mathbf{f}_{k,\zeta}$ と 整 ideal $\mathfrak{a}_{ij}$ に対して定まる Hilbert cusp forms $\mathbf{f}_{k,\zeta}(\mathfrak{a}_{ij}z)$ をその特殊化にもつ $\Lambda$-adic cusp form を表す. 無限個の各 $(k,\zeta)\in\cap_i A_{\mathcal{F}_i}$ において, $\{\mathbf{f}_{k,\zeta}(\mathfrak{a}_{ij}z)\}_{ij}$ たちが 1 次独立であることから, $\mathcal{S}_L^0(\mathfrak{n}pl,\boldsymbol{\chi})^{l\text{-new}}$ の生成系は 1 次独立となることに注意.

$\mathcal{S}_L^0(\mathfrak{n}pl,\boldsymbol{\chi})^{l\text{-new}}$ の基底に現れる各 $\mathcal{F}_i$ について, 任意の $(k,\zeta)\in A_{\mathcal{F}_i}$ における特殊化 $\tilde{\nu}_{k,\zeta}(\mathcal{F}_i)$ は, character の conductor が $l$ と互いに素で, level が $l$ で 1 回だけ割り切れる $p$-stabilized newform であるので, $\tilde{\nu}_{k,\zeta}(\mathcal{F}_i)$ に付随する保型表現は $l$ で special 表現をもつ (cf. [6, Lemma 12.2]). よって, $\mathcal{F}_i$ に対して Proposition 2.3 を適用することができて, $\mathcal{F}_i$ に付随し $p$ を割る $\mathcal{O}_F$ の任意の素 ideal $\mathfrak{p}$ で ordinary な Galois 表現

$$\rho_{\mathcal{F}_i}:\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)\to\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)$$

が存在する.

Definition 3.1 における $\mathcal{S}_L^0(\mathfrak{n}pl,\boldsymbol{\chi})^{l\text{-new}}$ の基底と同じ添え字 $i,j$ を走らせて $\rho_{\mathcal{F}_i}$ たちの直積

$$\rho':=\prod_{i,j}\rho_{\mathcal{F}_i}:\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)\to\mathrm{GL}_2(\prod_{i,j}L)$$

をとり, その表現空間を

$$W:=(\prod_{i,j}L)\oplus(\prod_{i,j}L)=\prod_{i,j}(L\oplus L)$$

とおく. $\mathfrak{n}l$ と互いに素なすべての整 ideal $\mathfrak{m}$ に付随する Hecke 作用素 $T(\mathfrak{m})$, $S(\mathfrak{m})$ たちで $\mathcal{O}_L$ 上生成される $\mathrm{End}(\mathcal{S}_L^0(\mathfrak{n}pl,\boldsymbol{\chi})^{l\text{-new}})$ の $\mathcal{O}_L$-subalgebra を $\boldsymbol{T}$ とおく ($\boldsymbol{T}$ には, $\mathrm{End}(\mathcal{S}_L^0(\mathfrak{n}pl,\boldsymbol{\chi})^{l\text{-new}})\cong M_d(L)$ (ここで, $d$ はしかるべき自然数) を通して $p$-進位相を入れておく). 基底 $\{\mathcal{F}_i(\mathfrak{a}_{ij})\}_{i,j}$ の各元が $\boldsymbol{T}$ に属する任意の Hecke 作用素に対して固有ベクトルであることに注意して, 1 次結合の係数を対応させる $L$-線形同型

$$\mathcal{S}_L^0(\mathfrak{n}pl,\boldsymbol{\chi})^{l\text{-new}}=\oplus_{i,j}L\mathcal{F}_i(\mathfrak{a}_{ij}z)\cong\prod_{i,j}L$$

と $\boldsymbol{T}$ の $\mathcal{S}_L^0(\mathfrak{n}pl,\boldsymbol{\chi})^{l\text{-new}}$ への作用を通して, $\prod_{i,j}L$ を $\boldsymbol{T}$-加群とみなす.

各成分が 1 である元 $x=(1)_{i,j}\in\prod_{i,j}L$ を用いて

$$\varphi:\boldsymbol{T}\to\boldsymbol{T}x;\quad t\mapsto tx$$

とおけば, $\varphi$ は連続な $\boldsymbol{T}$-algebra の同型写像であり, 上で定義した $W$ への $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$-作用 $\rho'$ について, $\mathfrak{n}pl$ と互いに素な $\mathcal{O}_F$ の任意の素 ideal

$\mathfrak{q}$ に対し,

$$\begin{aligned}\mathrm{Trace}(\rho'(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{q}})) &= (c(\mathfrak{q},\mathcal{F}_i))_{i,j} = \varphi(T(\mathfrak{q})),\\ \det(\rho'(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{q}})) &= (\boldsymbol{\chi}(\mathfrak{q})N\mathfrak{q})_{i,j} = \varphi(S(\mathfrak{q})N\mathfrak{q})\end{aligned}$$

となる.

したがって, $\varphi$ を通して擬表現の観点からみたとき, $\rho'$ はあたかも $\boldsymbol{T}$ に付随した Galois 表現であるかのような振る舞いをしている. Theorem 1.1 を証明するという本来の目的のためには, $l$ に関して new である level $\mathfrak{n}pl$ の Hecke 環 $\boldsymbol{T}$ に属する Hecke 作用素たちと, level $\mathfrak{n}p$ の $\Lambda$-adic newform $\mathcal{F}$ の Hecke 固有値を結びつける議論が必要となる. その際, 次で定義される $\mathcal{F}$ に付随する "congruence module" $C_L(l)$ が重要な役割を果たす:

**Definition 3.2** ([18, Section 1.6])**.** $\mathcal{O}_L$-加群

$$H_L(l) := \{\mathcal{H} \in \mathcal{S}^0_L(\mathfrak{n}pl,\boldsymbol{\chi})^{l\text{-new}} \mid \mathcal{G} := \mathcal{H} + u\mathcal{F} + v\mathcal{F}(lz) \in \mathcal{S}^0_{\mathcal{O}_L}(\mathfrak{n}pl,\boldsymbol{\chi}) \\ \text{with some } u, v \in L\}$$

を用いて, $\mathcal{F}$ に付随する **congruence module** を

$$C_L(l) := H_L(l)/(\mathcal{S}^0_L(\mathfrak{n}pl,\boldsymbol{\chi})^{l\text{-new}} \cap \mathcal{S}^0_{\mathcal{O}_L}(\mathfrak{n}pl,\boldsymbol{\chi}))$$

と定義する.

$C_L(l)$ には, その定義により $\boldsymbol{T}$-加群の構造が入り, $\boldsymbol{T}$ の ideal $I$ を

$$I := \mathrm{Ann}(C_L(l)) (= \{t \in \boldsymbol{T} \mid tx = 0,\ \forall x \in C_L(l)\})$$

とおく. 任意の $\mathcal{H} \in H_L(l)$ を $\mathcal{G} \in \mathcal{S}^0_{\mathcal{O}_L}(\mathfrak{n}pl,\boldsymbol{\chi})$ と $u,\ v \in L$ を用いて $\mathcal{H} = \mathcal{G} - u\mathcal{F} - v\mathcal{F}(lz)$ と表しておけば, $\mathfrak{n}l$ と互いに素な $\mathcal{O}_F$ の任意の整 ideal $\mathfrak{m}$ に対して,

$$\begin{aligned}(T(\mathfrak{m}) - c(\mathfrak{m},\mathcal{F}))\mathcal{H} &= (T(\mathfrak{m}) - c(\mathfrak{m},\mathcal{F}))\mathcal{G}\\ &\in \mathcal{S}^0_L(\mathfrak{n}pl,\boldsymbol{\chi})^{l\text{-new}} \cap \mathcal{S}^0_{\mathcal{O}_L}(\mathfrak{n}pl,\boldsymbol{\chi})\end{aligned}$$

となるので, $T(\mathfrak{m}) - c(\mathfrak{m},\mathcal{F}) \in I$ である. よって, $\mathcal{O}_L$-algebra としての構造射 $\mathcal{O}_L \to \boldsymbol{T}/I$ は全射となり, その kernel を $\mathfrak{b}_l$ とおけば, $\mathcal{O}_L$-algebras の同型

$$\psi : \boldsymbol{T}/I \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_L/\mathfrak{b}_l; \quad T(\mathfrak{m}) \mapsto c(\mathfrak{m},\mathcal{F}),\ S(\mathfrak{m}) \mapsto \boldsymbol{\chi}(\mathfrak{m})$$

が誘導される. これで, $l$ に関して new である Hecke 作用素から $\mathcal{F}$ の Hecke 固有値への橋渡しがなされたことになる. ここで, 橋渡しの行先が $\mathcal{O}_L$ 自身ではなく, 剰余環 $\mathcal{O}_L/\mathfrak{b}_l$ とならざるを得ないことに注意. この同型を手掛かりに, Galois 表現 $\rho_{\mathcal{F}}$ の構成に向けて議論を進めよう.

[18, pp.567-570] において, congruence module に関する重要な定理 [18, Theorem 1.6.1] を用いて, 次の事実が証明されている (Wiles は [18, p.567] で, これを証明することが "crucial difficulty" と述べている):

**Claim**. $\mathfrak{n}p$ と互いに素な $\mathcal{O}_F$ の無限個の素 ideals $l$ とそれらに付随して $\mathfrak{b}_l$ を含む高さ 1 の $\mathcal{O}_L$ の素 ideals $Q_l$ で次の二つの条件を満たすものが存在する:

(i) $l$ で添え字付けられた $P_l := Q_l \cap \Lambda_{\mathcal{F}}$ たちは, $\Lambda_{\mathcal{F}}$ の互いに相異なる高さ 1 の素 ideals である;

(ii) $\mathfrak{n}p$ の素因子とこの Claim に現れるすべての $l$ たちからなる $\mathcal{O}_F$ の素 ideals の集合 $\Sigma$ の analytic density は 0 である.

以下, この Claim にある $\mathcal{O}_F$ の素 ideal $l$ と $\mathcal{O}_L$ の素 ideal $Q_l(\supset \mathfrak{b}_l)$ を用いる. また, 擬表現を用いる議論を簡単にするために $p \neq 2$ としておく ($p = 2$ の場合でも同様に議論できる).

$\rho' = \prod_{i,j} \rho_{\mathcal{F}_i}$ を構成する際に, 各 $\rho_{\mathcal{F}_i}$ で複素共役 $c \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ に対する表現行列が $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となるようにあらかじめ表現空間の基底を調整しておいて, Lemma 2.1 の証明と同じように, $\rho'$ から $\mathfrak{n}pl$ の外不分岐な $\prod_{i,j} L$ への擬表現 $\tilde{\rho}'$ を構成すれば, $\mathfrak{n}pl$ と互いに素な $\mathcal{O}_F$ の任意の素 ideal $\mathfrak{q}$ に対し,

$$\mathrm{Trace}\,\tilde{\rho}'(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{q}}) = \varphi(T(\mathfrak{q})),$$
$$\det \tilde{\rho}'(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{q}}) = \varphi(S(\mathfrak{q})N\mathfrak{q})$$

となるので, $\tilde{\rho}'$ は $\boldsymbol{T}x$ に値をもつ. よって, $\tilde{\rho}'$ と $\varphi^{-1}$ を合成することで, $\mathfrak{n}pl$ の外不分岐な $\boldsymbol{T}$ への連続な擬表現 $\alpha_l$ で, $\mathfrak{n}pl$ と互いに素な $\mathcal{O}_F$ の任意の素 ideal $\mathfrak{q}$ に対し,

$$\mathrm{Trace}\,\alpha_l(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{q}}) = T(\mathfrak{q}),$$
$$\det \alpha_l(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{q}}) = S(\mathfrak{q})N\mathfrak{q}$$

となるものが得られる. $\alpha_l$ の値を mod $I$ してから $\psi$ で $\mathcal{O}_L/\mathfrak{b}_l$ につなぎ, さらに mod $Q_l$ することで得られる $\mathcal{O}_L/Q_l$ への擬表現 $\beta_l := \psi(\alpha_l(\mathrm{mod}\ I))(\mathrm{mod}\ Q_l)$ は, $\mathfrak{n}pl$ と互いに素な $\mathcal{O}_F$ の任意の素 ideal $\mathfrak{q}$ に対し,

$$\mathrm{Trace}\,\beta_l(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{q}}) = c(\mathfrak{q}, \mathcal{F}) \pmod{Q_l},$$
$$\det \beta_l(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{q}}) = \boldsymbol{\chi}(\mathfrak{q})N\mathfrak{q} \pmod{Q_l}$$

となる. 各 $c(\mathfrak{q}, \mathcal{F})$, $\boldsymbol{\chi}(\mathfrak{q})N\mathfrak{q}$ は $\Lambda_{\mathcal{F}}$ の元であるので, $\beta_l$ は $\mathfrak{n}pl$ の外不分岐な $\Lambda_{\mathcal{F}}/P_l$ への擬表現となり, $\mathfrak{n}pl$ と互いに素な $\mathcal{O}_F$ の任意の素 ideal $\mathfrak{q}$ に対し,

$$\mathrm{Trace}\,\beta_l(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{q}}) = c(\mathfrak{q}, \mathcal{F}) \pmod{P_l},$$
$$\det \beta_l(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{q}}) = \boldsymbol{\chi}(\mathfrak{q})N\mathfrak{q} \pmod{P_l}$$

を満たす.

Lemma 2.1 の証明における Galois 表現の構成を, Claim の素 ideals $l$ で添え字付けられた $\mathcal{O}_L/P_l$ への連続な擬表現 $\beta_l$ たちに適用することができて, $\Sigma$ の外不分岐な Galois 表現

$$\rho : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \to \mathrm{GL}_2(M_{\mathcal{F}})$$

が存在し, $\Sigma$ に属さない $\mathcal{O}_F$ の任意の素 ideal $\mathfrak{q}$ に対して,

$$\mathrm{Trace}(\rho(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{q}})) = c(\mathfrak{q}, \mathcal{F}),$$
$$\det(\det(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{q}})) = \boldsymbol{\chi}(\mathfrak{q})N\mathfrak{q}$$

を満たす. 一方で, $\mathfrak{n}p$ と互いに素な $\Sigma$ に属する素 ideal $l$ を一つ固定して, $\Sigma \setminus \{l\}$ に対して上述の構成を適用すれば, $\Sigma \setminus \{l\}$ の外不分岐な Galois 表現 $\rho_l : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \to \mathrm{GL}_2(M_{\mathcal{F}})$ で, $\Sigma$ の analytic density が 0 であることに注意して Chebotarev の稠密定理から, $\rho$ と全く同じ trace と determinant をもつものが構成される. [17, Proposition 2.1] により, $\rho$ と $\rho_l$ のいずれも既約なので, これらは同値な表現となる. とくに, $\rho$ は $l$ で不分岐となり, この議論をくり返すことで $\rho$ が $\mathfrak{n}p$ の外不分岐であることがわかる.

さらに, $p$ を割る $\mathcal{O}_F$ の任意の素 ideal $\mathfrak{p}$ に対し, $\rho' = \prod_{i,j} \rho_{\mathcal{F}_i}$ の各成分 $\rho_{\mathcal{F}_i}$ は $\mathfrak{p}$ で ordinary, つまり, ある二つの characters $\varepsilon_{1,i},\ \varepsilon_{2,i} : D_{\mathfrak{p}} \to L^{\times}$ で, とくに $\varepsilon_{2,i}$ は不分岐で $\varepsilon_{2,i}(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}}) = c(\mathfrak{p}, \mathcal{F}_i)$ となるものが存在して,

$$\rho_{\mathcal{F}_i}|_{D_{\mathfrak{q}}} \cong \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,i} & * \\ 0 & \varepsilon_{2,i} \end{pmatrix}$$

とかけるので,

$$\rho'|_{D_{\mathfrak{q}}} \cong \begin{pmatrix} (\varepsilon_{1,i})_{i,j} & * \\ 0 & (\varepsilon_{2,i})_{i,j} \end{pmatrix}$$

となる. 一方で, Claim にある各 $l$ に対して, 環準同型の合成

$$(\prod_{i,j} L \supset)\ \boldsymbol{T}x \xrightarrow{\phi^{-1}} \boldsymbol{T} \xrightarrow{\mathrm{mod}\ I} \boldsymbol{T}/I \xrightarrow{\psi} \mathcal{O}_L/Q_l\ (\supset \Lambda_{\chi}/P_l)$$

のもと, $\rho'$ の構成方法から, $\mathfrak{n}pl$ と互いに素な $\mathcal{O}_F$ の任意の素 ideal $\mathfrak{q}$ に対し,

$$\psi((\varphi^{-1}(\mathrm{Trace}(\rho'(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{q}}))))(\mathrm{mod}\ I)) = \mathrm{Trace}(\rho(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{q}}))(\mathrm{mod}\ P_l),$$
$$\psi((\varphi^{-1}(\det(\rho'(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{q}}))))(\mathrm{mod}\ I)) = \det(\rho(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{q}}))(\mathrm{mod}\ P_l)$$

が成り立つので, Chebotarev の稠密定理により,

$$\psi((\varphi^{-1}(\mathrm{Trace}(\rho')))(\mathrm{mod}\ I)) = \mathrm{Trace}(\rho)(\mathrm{mod}\ P_l),$$
$$\psi((\varphi^{-1}(\det(\rho')))(\mathrm{mod}\ I)) = \det(\rho)(\mathrm{mod}\ P_l)$$

を得る. よって, 無限個の $l$ で $\rho(\mathrm{mod}\ P_l)|_{D_{\mathfrak{p}}}$ の trace と determinant は, 部分表現 $(\varepsilon_{1,i})_{i,j}$ とそれによる商表現 $(\varepsilon_{2,i})_{i,j}$ をもつ $\rho'|_{D_{\mathfrak{p}}}$ の trace と

determinant から環準同型の合成によって誘導されるので, $\rho(\mathrm{mod}\ P_l)|_{D_\mathfrak{p}}$ はそれらに対応する部分表現 $\varepsilon_{1,l}$ と商表現 $\varepsilon_{2,l}$ をもつ. とくに, $\varepsilon_{2,l}$ は不分岐で, $\varepsilon_{2,l}(\mathrm{Frob}_\mathfrak{p}) = c(\mathfrak{p}, \mathcal{F})(\mathrm{mod} P_l)$ を満たす. このとき, Proposition 2.3 の証明の (2) で用いた議論を, $\{\rho(\mathrm{mod}\ P_l)|_{D_\mathfrak{p}}\}_l$ に適用することができて, $\rho$ が $\mathfrak{p}$ で ordinary であることが示される.

以上のことから, $\rho$ は求める $\rho_\mathcal{F}$ の役割を果たすので, Theorem 1.1 は証明された.

## 4. Appendix

本節では付録として, 本講演を準備するにあたり大きく参考にした文献 [19] において, 誤字あるいは脱字などが見受けられる箇所についてまとめておく. [19] を参照する際に, ご参考いただければ幸いと存ずる.

以下, p はページ数, l は行数を表す. ページ数は「$R = T$ の最近の発展ー佐藤・Tate 予想と Serre 予想ー」報告集 (第 1 巻) における全体ページ数を用いることにする. 矢印 “→” の前後には, 前者は訂正前, 後者には訂正後の様子が記述されている.

p. 239, l. 21, $p$ と素 → $p$ と互いに素
p. 239, l. 35, すべて素 → すべての素
p. 241, l. 2, 満たすにより → 満たすものにより
p. 244. l. 15, Theorem 1.6.1 → [27, Theorem 1.6.1]
p. 256, l. 24, $\varprojlim_{r\to\infty} \to \varprojlim_r$
p. 257, l. 1, 非負整数 → 整数
p. 263, l. 25, ideal について → ideal $\mathfrak{n}$ について
p. 265, l. 10-21, $\mathfrak{n} \to \bar{\mathfrak{n}}$
p. 265, l. 25, $p^r \to p^{r+1}$
p. 265, l. 36, $p^r \to p^{r+1}$
p. 266, l. 10, $p^r \to p^{r+1}$
p. 266, l. 14, $p^r \to p^{r+1}$
p. 266, l. 19, $(\mathcal{M}^0_{\Lambda_r}(\bar{\mathfrak{n}}, \boldsymbol{\chi}))/Y(\mathcal{M}^0_{\Lambda_r}(\bar{\mathfrak{n}}, \boldsymbol{\chi})) \to (\mathcal{M}^0_{\Lambda_r}(\bar{\mathfrak{n}}, \boldsymbol{\chi})/Y(\mathcal{M}^0_{\Lambda_r}(\bar{\mathfrak{n}}, \boldsymbol{\chi})))$
p. 266, l. 21, $(\mathcal{M}^0_{\Lambda_r}(\bar{\mathfrak{n}}, \boldsymbol{\chi}))/Y(\mathcal{M}^0_{\Lambda_r}(\bar{\mathfrak{n}}, \boldsymbol{\chi})) \to (\mathcal{M}^0_{\Lambda_r}(\bar{\mathfrak{n}}, \boldsymbol{\chi})/Y(\mathcal{M}^0_{\Lambda_r}(\bar{\mathfrak{n}}, \boldsymbol{\chi})))$
p. 267, l. 1, Lemma7.2.1 → Lemma 7.3.1
p. 270, l. 6-7, 行替えを整理するべき
p. 271, l. 15, 仮定できる → 仮定した
p. 274, l. 12, $\tilde{P}_{\nu_{k'}} \to \tilde{P}_{\nu_{k',1}}$
p. 276, l. 20, $\bar{\mathfrak{n}}fl \to \bar{\mathfrak{n}}l$
p. 277, l. 7, $p^r \to p^{r+1}$
p. 281, l. 10, $\Lambda \to \Lambda_\mathcal{F}$
p. 281, l. 14, $H_\mathcal{H}(l) \to H_\mathcal{F}(l)$
p. 285, l. 4, Proposition 1.6.1 → Proposition 1.16
p. 293, l. 22, $\chi \to \boldsymbol{\chi}$

p. 298, l. 18, $d_\sigma a_\tau \to d_\sigma d_\tau$
p. 300, l. 16, $x_{\sigma_0,\tau} \to x_{\sigma_0,\tau_0}$
p. 301, l. 12, $\chi \to \boldsymbol{\chi}$
p. 301, l. 17-20, 行替えを整理するべき
p. 302, l. 3, $\mathfrak{q} \to \mathfrak{p}$
p. 303, l. 14, $\mathfrak{m}_i$ の newform → $\bar{\mathfrak{m}}_i$ の $\mathcal{O}_L$-係数の $\Lambda$-adic newform
p. 303, l. 16, 有限個の除くすべての $(k,\zeta) \in \mathfrak{X}$ → 任意の $(k,\zeta) \in A_{\mathcal{F}_i}$
p. 304, l. 16, $C_L(\mathcal{F}) \to C_L(l)$
p. 305, l. 2, $\mathcal{O}_L \to \boldsymbol{T}_{\mathfrak{P}}$
p. 305, l. 4, $c(\mathfrak{q},\mathcal{F}) \to T(\mathfrak{q})$
p. 305, l. 5, $\boldsymbol{\chi}(\mathfrak{q}) \to S(\mathfrak{q})$
p. 305, l. 20, $\mathfrak{n} \to \bar{\mathfrak{n}}$
p. 305, l. 33, conguruence → congruence
p. 308, l. 5, $\mathrm{div}(M_{\mathcal{F}}) \to \mathrm{div}_{F_{\Lambda_{\mathcal{F}}}}(N_{M_{\mathcal{F}}/F_{\Lambda_{\mathcal{F}}}}(w_l))$

**謝辞** 2012 年度 (第 20 回) 整数論サマースクール「Stark 予想」にて, 講演させていただく機会を与えていただき, 主催者の皆さんに対しまして, 心より感謝申し上げます.

## References

[1] H. Carayol, Sur les représentations $l$-adiques associées aux formes modulaires de Hilbert, *Ann. Ec. Norm. Super.* (4) **19** (1986), 409-468.
[2] P. Deligne, Formes modulaires et représentations $l$-adiques, *Sém. Bourbaki*, exp. 335, 1969.
[3] D. Demazure, *Lectures on p-divisible groups*, Lecture Notes in Math. Vol. **302**, Springer-Verlag, New York, Heidelberg and Berlin, 1972.
[4] H. Hida, On abelian varieties with complex multiplication as factors of the Jacobians of Shimura curves, *American J. of Math.* **103** (1981), 727-776.
[5] H. Hida, Galois representations into $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p[\![X]\!])$ attached to ordinary cusp forms, *Invent. Math.* **85** (1986), 545-613.
[6] H. Hida, On $p$-adic Hecke algebras for $\mathrm{GL}_2$ over totally real fields, *Ann. of Math.* **128** (1988), 295-384.
[7] H. Hida, *Elementary Theory of L-functions and Eisenstein Series*, LMSST **26**, Cambridge University Press, 1993.
[8] H. Hida, *Geometric Modular Forms and Elliptic Curves*, World Scientific, 2000.
[9] H. Hida, *Hilbert Modular Forms and Iwasawa Theory*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford Science Publications, 2006.
[10] 加藤和也・黒川重信・斎藤毅, 数論 1, 岩波書店, 1996.
[11] M. Ohta, On the zeta function of an abelian scheme over the Shimura curve, *Jpn. J. Math.* **9** (1983), 1-26.
[12] M. Raynaud, Variétés abéliennes et géométrie rigide, in *Actes, Congrés Inter. Math.* Vol. **1** (1970), pp. 473-477.
[13] J.D. Rogawski and J.B. Tunnell, On Artin $L$-functions associated to Hilbert modular forms of weight one, *Invent. Math.* **74** (1983), 1-42.

[14] G. Shimura, *Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions*, Iwanami Shoten and Princeton University Press, Tokyo-Princeton, 1971.

[15] G. Shimura, On elliptic curves with complex multiplication as factors of the jacobians of modular function fields, *Nagoya Math. J.* **43** (1971), 199-208.

[16] G. Shimura, The special values of the zeta functions associated with Hilbert modular forms, *Duke Math. J.* **45** (1978), 637-679.

[17] A. Wiles, On $p$-adic representations for totally real fields, *Ann. of Math.* **123** (1986), 407-456.

[18] A. Wiles, On ordinary $\lambda$-adic representations associated to modular forms, *Invent. Math.* **94** (1988), 529-573.

[19] 山上敦士, Taylor による Hilbert cusp forms に付随する Galois 表現の構成について, in 「$R = T$ の最近の発展ー佐藤・Tate 予想と Serre 予想ー」報告集 第 1 巻 (斎藤毅・山下剛・安田正大 編) pp. 183-236.

[20] 山上敦士, Wiles による Hilbert cusp forms に付随する Galois 表現の構成について, in 「$R = T$ の最近の発展ー佐藤・Tate 予想と Serre 予想ー」報告集 第 1 巻 (斎藤毅・山下剛・安田正大 編) pp. 237-315.

Department of Mathematics, Kyoto Sangyo University, Kyoto, 603-8555, Japan

*E-mail address*: ayama30@cc.kyoto-su.ac.jp