

有理指標に対する Stark 予想の証明

山本 修司

序

本稿では、有理数値を持つ指標に対する Stark 予想の証明を、Tate [T] に沿って解説する（なお Dasgupta [D] も参考にした）。

まず第 1 節で示すべきことを整理する。第 2 節で、準備として Galois コホモロジーについての考察を行い、第 3 節で主定理を証明する。その際、有限群の表現論に関するある事実を用いるが、その証明は第 4 節で与える。

1 主定理

はじめに Stark 予想の状況設定を復習しよう。

K/k を代数体の有限次 Galois 拡大とし、 $G = \text{Gal}(K/k)$ とおく。 S は k の素点の有限集合で、無限素点をすべて含むものとして、 S の元の上にある K の素点全体の集合を S_K で表す。二つの G 加群 X, U を次のように定義する：

$$X = X_{K,S} = \left\{ \sum_{w \in S_K} n_w w \in \bigoplus_{w \in S_K} \mathbb{Z}w \mid \sum_{w \in S_K} n_w = 0 \right\},$$
$$U = U_{K,S} = \{x \in K^\times \mid |x|_w = 1 \text{ for } w \notin S_K\}.$$

すると $\mathbb{Q}X$ と $\mathbb{Q}U$ は $\mathbb{Q}[G]$ 加群として同型となる。そこで $\mathbb{Q}[G]$ 同型 $f: \mathbb{Q}X \xrightarrow{\cong} \mathbb{Q}U$ を一つとる。このとき、 G の ($\mathbb{C}$ 上の有限次元表現の) 指標 χ に対して、Stark regulator $R_S(\chi, f)$ と L 関数の第 1 係数 $c_S(\chi)$ の比として

$$A(\chi) = A_S(\chi, f) = \frac{R_S(\chi, f)}{c_S(\chi)} \in \mathbb{C}^\times$$

が定義され、Stark 予想は

$$A(\chi)^\alpha = A(\chi^\alpha) \quad (\forall \alpha \in \text{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q}))$$

と述べられるのであった．なお χ に対応する表現を (ρ, V) とするとき， $A(\chi)$ を $A(\rho)$ または $A(V)$ と表すことにする．

さて，本稿の目標は次の定理の証明である．

定理 1.1. 指標 χ の値がすべて有理数ならば， $A(\chi)$ は有理数である．

この定理（および一般の Stark 予想）の成立は S および f の取り方によらない．すなわち，ある (S, f) について定理が成り立てば，任意の (S, f) に対しても成り立つことを示すことができる．そこで以下では次のように仮定する：

- (1) S は K/k で分岐する素点をすべて含む．
- (2) $h_{K, S_K} = 1$.
- (3) G 同型 $f: \mathbb{Q}X \rightarrow \mathbb{Q}U$ はある G 準同型 $f: X \rightarrow U$ から誘導された写像である．

次に，本稿で用いられる $A(\chi)$ の性質をまとめておく．

命題 1.2. (1) $A(\chi_1 + \chi_2) = A(\chi_1)A(\chi_2)$.

(2) $A(\text{Ind}_H^G \chi) = A(\chi)$ (H は G の部分群， χ は H の指標)．

(3) $A(\text{Inf}_{G/H}^G \chi) = A(\chi)$ (H は G の正規部分群， χ は G/H の指標)．

(4) $A(\overline{\chi}) = \overline{A(\chi)}$ ，特に $\chi(G) \subset \mathbb{R}$ ならば $A(\chi) \in \mathbb{R}$.

(5) $A(1_G) = \pm(U_{k, S} : f(X_{k, S}))/h_{k, S}$.

これらの性質と次の定理により，有理指標 χ に対する $A(\chi)$ の値は符号を除いて決定される．

定理 1.3. G を有限群， χ をその有理指標とすると，

$$m\chi = \sum_{H < G} n_H \text{Ind}_H^G 1_H$$

を満たす正整数 m および整数 n_H が存在する（右辺の和において H は G の部分群全体を動く）．

証明. G の位数を n とおく．また G 上の関数空間 E を

$$E = \left\{ \theta: G \rightarrow \mathbb{C} \mid \begin{array}{ll} \theta(hgh^{-1}) = \theta(g) & (\forall g, h \in G), \\ \theta(g^a) = \theta(g) & (\forall g \in G, a \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times) \end{array} \right\}$$

で定義する．

まず $\chi \in E$ を示す．すべての指標は類関数なので，二つ目の条件を示せばよい． χ に対応する表現 ρ をとると，任意の $g \in G$ に対して $\rho(g)$ の固有値はいずれも 1 の n 乗根で

ある．そこで $a \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ に対し， μ_n の元を a 乗する $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_n)/\mathbb{Q})$ の元を σ_a とおくと， $\chi(g) \in \mathbb{Q}$ との仮定より $\chi(g^a) = \chi(g)^{\sigma_a} = \chi(g)$ を得る．

特に任意の部分群 $H < G$ に対し， $\text{Ind}_H^G 1_H \in E$ が成り立つ．さらにこれらが $\mathbb{C}$ ベクトル空間 E を張ることを示そう． G 上の関数全体の空間に標準的な内積を入れる．ある 0 でない $\theta \in E$ が存在して，任意の $H < G$ に対して $\text{Ind}_H^G 1_H$ と直交していると仮定しよう．このとき， $\theta(g) \neq 0$ なる $g \in G$ で，位数が最小となるものをとると， $H = \langle g \rangle$ に対して

$$0 = \langle \theta, \text{Ind}_H^G 1_H \rangle_G = \langle \theta|_H, 1_H \rangle_H = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \theta(h) = \frac{\varphi(|H|)}{|H|} \theta(g)$$

となる (φ は Euler の関数)．これは g の取り方に矛盾する．したがって $\{\text{Ind}_H^G 1_H\}_{H < G}$ が E を張ることが示された．

以上により，

$$\chi = \sum_{H < G} \alpha_H \text{Ind}_H^G 1_H$$

を満たす $\alpha_H \in \mathbb{C}$ が存在する．ここで $P: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{Q}$ を $\mathbb{Q}$ 線型な射影とすれば

$$\chi = \sum_{H < G} P(\alpha_H) \text{Ind}_H^G 1_H, \quad P(\alpha_H) \in \mathbb{Q}$$

を得るので，係数の分母を払えばよい． □

注意 1.4. 上の証明から， H として G の巡回部分群のみを考えればよいことが分かる．

2 準備：Galois コホモロジー

まず群のコホモロジーとホモロジーについて簡単に復習しよう．詳しくは [S2] 第3部などを参照されたい．

定義 2.1. G を群とする． G 加群 A に対して $\mathbb{Z}$ 加群 $A^G = \{a \in A \mid ga = a \ (\forall g \in G)\}$ を対応させる関手の右導来関手を $H^r(G, A)$ ($r \geq 0$) で表す．また G 加群 A に対して $\mathbb{Z}$ 加群 $A_G = A / \langle ga - a \mid g \in G, a \in A \rangle$ を対応させる関手の左導来関手を $H_r(G, A)$ ($r \geq 0$) で表す．これらをそれぞれ A を係数とする G のコホモロジー群，ホモロジー群という．

定義 2.2. G を有限群とし， $N_G = \sum_{g \in G} g \in \mathbb{Z}[G]$ とおく． N_G は $\mathbb{Z}$ 加群の準同型 $\tilde{N}_G: A_G \rightarrow A^G$ を誘導する．そこで $r \in \mathbb{Z}$ に対して Tate コホモロジー群 $\hat{H}^r(G, A)$ を

次のように定義する：

$$\hat{H}^r(G, A) = \begin{cases} H^r(G, A) & (r \geq 1), \\ \text{Coker } \tilde{N}_G & (r = 0), \\ \text{Ker } \tilde{N}_G & (r = -1), \\ H_{-r-1}(G, A) & (r \leq -2). \end{cases}$$

このとき、 G 加群の短完全系列 $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ に対して、正負の整数全体にわたる長完全系列

$$\cdots \longrightarrow \hat{H}^r(G, A) \longrightarrow \hat{H}^r(G, B) \longrightarrow \hat{H}^r(G, C) \longrightarrow \hat{H}^{r+1}(G, A) \longrightarrow \cdots$$

が得られる。

定義 2.3. G 加群 A がコホモロジー的に自明であるとは、任意の部分群 $H < G$ および任意の $r \in \mathbb{Z}$ に対して $\hat{H}^r(H, A) = 0$ が成り立つことをいう。

第 1 節の設定に戻って、次の 2 つの短完全系列を考察する：

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}: \quad 0 &\longrightarrow X \longrightarrow Y \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0, \\ \mathfrak{U}: \quad 0 &\longrightarrow U \longrightarrow J_S \xrightarrow{\pi} C_K \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

ここで

$$Y = Y_{K,S} = \bigoplus_{w \in S_K} \mathbb{Z}w, \quad J_S = \prod_{w \in S_K} K_w^\times \times \prod_{w \notin S_K} O_w^\times$$

であり、 ϵ は augmentation map, π はイデール類群 C_K への自然な準同型である ($h_{K,S_K} = 1$ との仮定により π は全射である)。これらの短完全系列から得られる Tate コホモロジーの長完全系列を比較しよう。具体的には、2 次コホモロジーの元

$$\alpha_1 \in \hat{H}^2(G, \text{Hom}(\mathbb{Z}, C_K)), \quad \alpha_2 \in \hat{H}^2(G, \text{Hom}(Y, J_S)), \quad \alpha_3 \in \hat{H}^2(G, \text{Hom}(X, U))$$

を構成し、これらの元とのカップ積によって

$$\begin{array}{ccccccc} \hat{H}^r(G, X) & \longrightarrow & \hat{H}^r(G, Y) & \longrightarrow & \hat{H}^r(G, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & \hat{H}^{r+1}(G, X) \\ \cong \downarrow \cup \alpha_3 & & \cong \downarrow \cup \alpha_2 & & \cong \downarrow \cup \alpha_1 & & \cong \downarrow \cup \alpha_3 \\ \hat{H}^{r+2}(G, U) & \longrightarrow & \hat{H}^{r+2}(G, J_S) & \longrightarrow & \hat{H}^{r+2}(G, C_K) & \longrightarrow & \hat{H}^{r+3}(G, U) \end{array} \quad (2.1)$$

なる可換図式を得たい（ここで、 G 加群 A, B に対して $\text{Hom}(A, B)$ は $\mathbb{Z}$ 加群としての準同型全体を表し、 G 作用 $(\sigma f)(x) = \sigma(f(\sigma^{-1}x))$ によって G 加群とみなすものとする）。

- $\alpha_1 \in \hat{H}^2(G, \text{Hom}(\mathbb{Z}, C_K)) = \hat{H}^2(G, C_K)$ を大域類体論における基本類とする. この元とのカップ積は任意の $r \in \mathbb{Z}$ において同型

$$\cup \alpha_1: \hat{H}^r(G, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} \hat{H}^{r+2}(G, C_K)$$

を引き起こす. 特に $r = -2$ のときは $\hat{H}^{-2}(G, \mathbb{Z}) = G^{\text{ab}}$, $\hat{H}^0(G, C_K) = C_K/\text{NC}_K$ であり, 上の同型の逆写像が類体論の相互写像 $C_K/\text{NC}_K \xrightarrow{\cong} G^{\text{ab}}$ に他ならない.

- k の各素点 v の上にある K の素点 w を 1 つずつ固定すると,

$$Y \cong \prod_{v \in S} \text{Ind}_{G_w}^G \mathbb{Z}, \quad J_S \cong \prod_{v \in S} \text{Ind}_{G_w}^G K_w^\times \times \prod_{v \notin S} \text{Ind}_{G_w}^G O_w^\times$$

と書けるので, Shapiro の補題により

$$\begin{aligned} \hat{H}^r(G, Y) &\cong \prod_{v \in S} \hat{H}^r(G_w, \mathbb{Z}), & \hat{H}^r(G, J_S) &\cong \prod_{v \in S} \hat{H}^r(G_w, K_w^\times), \\ \hat{H}^r(G, \text{Hom}(Y, J_S)) &\cong \prod_{v \in S} \hat{H}^r(G_w, J_S) \end{aligned}$$

が成り立つ ($v \notin S$ のとき K_w/k_v は不分岐なので $\hat{H}^r(G_w, O_w^\times) = 0$ である). そこで $\alpha_{2,w} \in \hat{H}^2(G_w, K_w^\times)$ を局所類体論の基本類とし, $\hat{H}^2(G_w, K_w^\times)$ を $\hat{H}^2(G_w, J_S)$ の直和因子とみなして, 上の 3 つ目の同型によって $(\alpha_{2,w})_w \in \prod_{v \in S} \hat{H}^r(G_w, J_S)$ に対応する元を $\alpha_2 \in \hat{H}^r(G, \text{Hom}(Y, J_S))$ とする. このとき, 図式

$$\begin{array}{ccc} \hat{H}^r(G, Y) & \xrightarrow{\cong} & \prod_{v \in S} \hat{H}^r(G_w, \mathbb{Z}) \\ \downarrow \cup \alpha_2 & & \cong \downarrow \prod (\cup \alpha_{2,w}) \\ \hat{H}^{r+2}(G, J_S) & \xrightarrow{\cong} & \prod_{v \in S} \hat{H}^{r+2}(G, K_w^\times) \end{array}$$

は可換であり, 特に $\cup \alpha_2$ は同型である.

- 可換図式

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_1 \\ 0 & \longrightarrow & U & \longrightarrow & J_S & \longrightarrow & C_K \longrightarrow 0 \end{array}$$

を作る 3 つ組 (f_1, f_2, f_3) 全体のなす G 加群を $\text{Hom}(\mathfrak{X}, \mathfrak{U})$ で表す. このとき

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(\mathfrak{X}, \mathfrak{U}) \longrightarrow \text{Hom}(Y, J_S) \oplus \text{Hom}(\mathbb{Z}, C_K) \longrightarrow \text{Hom}(Y, C_K) \longrightarrow 0$$

なる短完全系列がある（右側の準同型は $(f_2, f_1) \mapsto \pi \circ f_2 - f_1 \circ \epsilon$ で与えられる）．
そのコホモロジーをとると，

$$\hat{H}^1(G, \text{Hom}(Y, C_K)) \cong \prod_{v \in S} \hat{H}^1(G_v, C_K) = 0$$

([CF] Chapter VII, Theorem 9.1) より

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \hat{H}^2(G, \text{Hom}(\mathfrak{X}, \mathfrak{U})) &\longrightarrow \hat{H}^2(G, \text{Hom}(Y, J_S)) \oplus \hat{H}^2(G, \text{Hom}(\mathbb{Z}, C_K)) \\ &\longrightarrow \hat{H}^2(G, \text{Hom}(Y, C_K)) \end{aligned}$$

なる完全系列を得る．ここで局所類体論と大域類体論の整合性から

$$(\alpha_2, \alpha_1) \in \hat{H}^2(G, \text{Hom}(Y, J_S)) \oplus \hat{H}^2(G, \text{Hom}(\mathbb{Z}, C_K))$$

の像が 0 になることがいえるので，この組はある $\hat{H}^2(G, \text{Hom}(\mathfrak{X}, \mathfrak{U}))$ の元から来ていることが分かる．後者の元を $\hat{H}^2(G, \text{Hom}(X, U))$ に射影したものを α_3 とおけば，目的の可換図式 (2.1) が得られる．

定理 2.4. G 加群の完全系列

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

で， A, B が有限生成かつコホモロジー的に自明なものが存在する．

証明. G 加群の完全系列

$$0 \longrightarrow X' \longrightarrow B' \longrightarrow B \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

で， B, B' が $\mathbb{Z}[G]$ 加群として有限生成自由であるものをとる．するとこれら 4 つの加群は $\mathbb{Z}$ 加群として自由なので， $\text{Hom}(-, U)$ を施して得られる複体

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(X, U) \longrightarrow \text{Hom}(B, U) \longrightarrow \text{Hom}(B', U) \longrightarrow \text{Hom}(X', U) \longrightarrow 0$$

は完全となる．また $\text{Hom}(B, U)$ および $\text{Hom}(B', U)$ はコホモロジー的に自明である ([S2] Chapter IX, §3, Proposition 1)．これを 2 つの短完全系列に分割してコホモロジーをとることにより，

$$\hat{H}^{r+2}(G, \text{Hom}(X, U)) \cong \hat{H}^r(G, \text{Hom}(X', U))$$

なる同型を得る．そこで $\alpha_3 \in \hat{H}^2(G, \text{Hom}(X, U))$ に対応する $\hat{H}^0(G, \text{Hom}(X', U)) = \text{Hom}(X', U)^G / \text{Im } \tilde{N}_G$ の元を考え， $\text{Hom}(X', U)^G$ への持ち上げを 1 つとって α とおく．

この G 準同型 $\alpha: X' \rightarrow U$ は全射とは限らないが、適当な有限生成自由 $\mathbb{Z}[G]$ 加群 L をとって X' と B' を $X' \oplus L, B' \oplus L$ に置き換えれば、全射となるように持ち上げ α を選ぶことができる。このとき、 $\cup \alpha_3$ が同型であったことから $\alpha_*: \hat{H}^r(G, X') \rightarrow \hat{H}^r(G, U)$ も同型であり、したがって $\hat{H}^r(G, \text{Ker } \alpha) = 0$ が成り立つ。さらに、ここまでの構成は部分群 $H < G$ への制限と整合しているため、同様に $\hat{H}^r(H, \text{Ker } \alpha) = 0$ となり、 $\text{Ker } \alpha$ がコホモロジー的に自明であることが分かる。そこで

$$0 \rightarrow X'/\text{Ker } \alpha \rightarrow B'/\text{Ker } \alpha \rightarrow B \rightarrow X \rightarrow 0$$

なる完全系列を考えると、 $X'/\text{Ker } \alpha \cong U$ であり、 $B'/\text{Ker } \alpha$ と B は有限生成かつコホモロジー的に自明である。すなわち定理が示された。□

定理 2.4 は、これから証明する定理 2.7 とともに、ある種の指標 χ に対する $A(\chi)$ の値を Herbrand 商で表す等式を示すために用いられる (定理 3.1)。

一般に $\mathbb{Z}$ 加群の準同型 φ に対し、 $\text{Ker } \varphi$ および $\text{Coker } \varphi$ がともに有限群であるとき、位数の比 $q(\varphi) := |\text{Coker } \varphi|/|\text{Ker } \varphi|$ を Herbrand 商という。特に我々は次のようなものを考える：

定義 2.5. G 加群であって、 $\mathbb{Z}$ 加群として有限生成かつ自由であるものの全体のクラスを $\mathcal{M}_G$ とおく。 $M \in \mathcal{M}_G$ に対し、合成写像

$$\text{Hom}(M, X)_G \xrightarrow{\tilde{N}_G} \text{Hom}(M, X)^G \xrightarrow{f_*} \text{Hom}(M, U)^G$$

を f_M で表し、

$$q(M, f) := q(f_M) = \frac{|\text{Coker } f_M|}{|\text{Ker } f_M|}$$

を M の Herbrand 商と呼ぶ。

注意 2.6. f_M は $\mathbb{Q}$ への係数拡大において同型写像を誘導するので、核および余核はともに有限群である。

定理 2.7. $M, M' \in \mathcal{M}_G$ に対し、 $\mathbb{C}M \cong \mathbb{C}M'$ ならば $q(M, f) = q(M', f)$ となる。

$\mathbb{C}M \cong \mathbb{C}M'$ ならば $\mathbb{Q}M \cong \mathbb{Q}M'$ であり、 M と M' は共通の $\mathbb{Q}$ ベクトル空間の格子とみなすことができる。これより、 $M' \subset M$ かつ $(M : M') < \infty$ なる $M, M' \in \mathcal{M}_G$ に対して $q(M, f) = q(M', f)$ を示せば十分である。以下このような M, M' を固定し、 G 加群 C に対して包含写像 $M' \rightarrow M$ から誘導される写像を

$$\varphi^C: \text{Hom}(M, C)^G \rightarrow \text{Hom}(M', C)^G, \quad \varphi_C: \text{Hom}(M, C)_G \rightarrow \text{Hom}(M', C)_G$$

と表す.

補題 2.8. C が有限生成 G 加群 (したがって有限生成 $\mathbb{Z}$ 加群) で, コホモロジー的に自明ならば

$$q(\varphi_C) = q(\varphi^C) = (M : M')^{\text{rank}_{\mathbb{Z}} C / |G|}$$

が成り立つ.

証明. C がコホモロジー的に自明なことから, 特に

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(M, C)_G & \xrightarrow{\tilde{N}_G} & \text{Hom}(M, C)^G \\ \downarrow \varphi_C & & \downarrow \varphi^C \\ \text{Hom}(M', C)_G & \xrightarrow{\tilde{N}_G} & \text{Hom}(M', C)^G \end{array}$$

なる可換図式において, 水平な 2 つの写像 $\tilde{N}_G$ は同型である. よって $q(\varphi_C) = q(\varphi^C)$ が成り立つ.

2 つ目の等号を示す. 完全系列

$$0 \longrightarrow C_2 \longrightarrow C_1 \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

で, C_1 および C_2 が $\mathbb{Z}$ 加群として有限生成自由, かつコホモロジー的に自明なものをとることができる (たとえば有限生成自由 $\mathbb{Z}[G]$ 加群 C_1 から C への全射をとって核を C_2 とおけばよい). このとき $q(\varphi^C) = q(\varphi^{C_1})/q(\varphi^{C_2})$, $\text{rank}_{\mathbb{Z}} C = \text{rank}_{\mathbb{Z}} C_1 - \text{rank}_{\mathbb{Z}} C_2$ なので, C_1, C_2 に対して主張がいえれば C についてもいえる. すなわち, C は $\mathbb{Z}$ 上有限生成自由と仮定してよい. このとき C は $\mathbb{Z}[G]$ 加群として射影的である ([S2] Chapter IX, Theorem 7). このことから, ある整数 $n \geq 0$ と $\mathbb{Z}[G]$ の左イデアル I を, 条件

- $C \cong \mathbb{Z}[G]^n \oplus I$,
- $(\mathbb{Z}[G] : I)$ と $(M : M')$ は互いに素

を満たすようにとることができる ([Sw1] Theorem A). よって結局, 2 つ目の条件をみたく (コホモロジー的に自明な) $I \subset \mathbb{Z}[G]$ に対して $q(\varphi^I) = (M : M')$ を示せばよい.

$\mathbb{Z}[G]$ および I がコホモロジー的に自明なので, $\mathbb{Z}[G]/I$ もそうである. よって 2 つの完全系列

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \text{Hom}(M, I)^G &\longrightarrow \text{Hom}(M, \mathbb{Z}[G])^G \longrightarrow \text{Hom}(M, \mathbb{Z}[G]/I)^G, \\ \text{Hom}(M, I)_G &\longrightarrow \text{Hom}(M, \mathbb{Z}[G])_G \longrightarrow \text{Hom}(M, \mathbb{Z}[G]/I)_G \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

の 3 項は $\tilde{N}_G$ によって同型となり, 短完全系列が得られる. M' についても同様である. 一方 $(\mathbb{Z}[G] : I)$ と $(M : M')$ が互いに素であることから, $\text{Hom}(M, \mathbb{Z}[G]/I) \rightarrow \text{Hom}(M', \mathbb{Z}[G]/I)$ は同型写像である. したがって

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}(M, I)^G & \longrightarrow & \text{Hom}(M, \mathbb{Z}[G])^G & \longrightarrow & \text{Hom}(M, \mathbb{Z}[G]/I)^G \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \varphi^I & & \downarrow \varphi^{\mathbb{Z}[G]} & & \cong \downarrow \varphi^{\mathbb{Z}[G]/I} \\ 0 & \longrightarrow & \text{Hom}(M', I)^G & \longrightarrow & \text{Hom}(M', \mathbb{Z}[G])^G & \longrightarrow & \text{Hom}(M', \mathbb{Z}[G]/I)^G \longrightarrow 0 \end{array}$$

なる可換図式があり, $q(\varphi^I) = q(\varphi^{\mathbb{Z}[G]})$ が成り立つ. すなわち主張は $C = \mathbb{Z}[G]$ の場合に帰着された.

G 加群 N に対して, $\text{Hom}(N, \mathbb{Z}[G])^G$ の元 f を $f(x) = \sum_{\sigma \in G} f_\sigma(x)\sigma$ と書くとき, f に f_1 を対応させることにより, 同型 $\text{Hom}(N, \mathbb{Z}[G])^G \cong \text{Hom}(N, \mathbb{Z})$ が得られる. よって $\text{Hom}(M, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}(M', \mathbb{Z})$ の Herbrand 商を計算すればよい. 完全系列

$$\begin{aligned} 0 &= \text{Hom}(M/M', \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}(M, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}(M', \mathbb{Z}) \\ &\rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(M/M', \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(M, \mathbb{Z}) = 0 \end{aligned}$$

において $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(M/M', \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(M/M', \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ に注意すれば, 求める Herbrand 商は $|M/M'| = (M : M')$ に等しい. 以上で補題が証明された. $\square$

定理 2.7 の証明. 可換図式

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(M, X)_G & \xrightarrow{f_M} & \text{Hom}(M, U)^G \\ \downarrow \varphi_X & & \downarrow \varphi^U \\ \text{Hom}(M', X)_G & \xrightarrow{f_{M'}} & \text{Hom}(M', U)^G \end{array}$$

により, $q(f_M) = q(f_{M'})$ を示すには $q(\varphi_X) = q(\varphi^U)$ を示せばよい.

定理 2.4 のように完全系列

$$0 \rightarrow U \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow X \rightarrow 0$$

をとる. A, B がコホモロジー的に自明であることから, 2 つの完全系列

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Hom}(M, U)^G &\rightarrow \text{Hom}(M, A)^G \rightarrow \text{Hom}(M, B)^G, \\ \text{Hom}(M, A)_G &\rightarrow \text{Hom}(M, B)_G \rightarrow \text{Hom}(M, X)_G \rightarrow 0 \end{aligned}$$

を $\tilde{N}_G$ でつなぐことができる. M' についても同様の構成をして,

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(M, U)^G & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(M, A)^G & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(M, B)_G \longrightarrow \mathrm{Hom}(M, X)_G \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow \varphi^U & & \downarrow \varphi^A & & \downarrow \varphi_B & & \downarrow \varphi_X \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(M', U)^G & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(M', A)^G & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(M', B)_G \longrightarrow \mathrm{Hom}(M', X)_G \longrightarrow 0
\end{array}$$

なる可換図式を得る. これより $q(\varphi^U) \cdot q(\varphi_B) = q(\varphi^A) \cdot q(\varphi_X)$ である. 一方 $\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}} U = \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}} X$ より $\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}} A = \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}} B$ だから, 補題 2.8 より $q(\varphi^A) = q(\varphi_B)$ が成り立つ. したがって $q(\varphi^U) = q(\varphi_X)$ が得られる. すなわち定理が証明された. $\square$

3 主定理の証明

まず次の定理を示す.

定理 3.1. $M \in \mathcal{M}_G$ に対して $A(\mathbb{C}M, f) = \pm q(M, f)$ が成り立つ. 特に $A(\mathbb{C}M, f) \in \mathbb{Q}$ である.

証明. $B(M) = A(\mathbb{C}M, f)/q(M, f)$ とおく. 定理 2.7 により, これは $\mathbb{C}$ 上の表現 $W := \mathbb{C}M$ で定まる. 定理 1.3 より

$$B(M)^m = \prod_{H < G} B(\mathrm{Ind}_H^G \mathbb{Z})^{n_H} \quad (m \in \mathbb{Z}_{>0}, n_H \in \mathbb{Z})$$

と書ける. また命題 1.2 (4) より $B(M) \in \mathbb{R}$ である. よって

- (i) $M \in \mathcal{M}_H$ に対して $B(\mathrm{Ind}_H^G M) = B(M)$,
- (ii) $B(\mathbb{Z}) = \pm 1$

を示せばよい.

(i) を示す. 命題 1.2 (2) より, A は表現の誘導に関して不変である. 一方, 自然な可換図式

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Hom}(\mathrm{Ind} M, X)_G & \xrightarrow{\tilde{N}_G} & \mathrm{Hom}(\mathrm{Ind} M, X)^G & \xrightarrow{f_*} & \mathrm{Hom}(\mathrm{Ind} M, U)^G \\
\cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow \\
\mathrm{Hom}(M, X)_H & \xrightarrow{\tilde{N}_H} & \mathrm{Hom}(M, X)^H & \xrightarrow{f_*} & \mathrm{Hom}(M, U)^H
\end{array}$$

があるので, q も誘導に関して不変である. したがって $B = A/q$ も誘導で不変である.

(ii) を示す. $f_{\mathbb{Z}}$ は

$$X_G \xrightarrow{\tilde{N}_G} X^G \xrightarrow{f} U^G$$

なる合成に他ならない. ここで $\tilde{N}_G: X_G \rightarrow X^G$ の像は $X_{k,S} = \bigoplus_{v \in S} \mathbb{Z}v$ であり, $U^G = U_{k,S}$ である. さらに f は単射である. よって

$$\text{Coker } f_{\mathbb{Z}} = U_{k,S}/f(X_{k,S}), \quad \text{Ker } f_{\mathbb{Z}} = \text{Ker } \tilde{N}_G = \hat{H}^{-1}(G, X)$$

が成り立つ.

さて, 定理 2.4 より $\hat{H}^{-1}(G, X) \cong \hat{H}^1(G, U)$ である. また $h_{k,S_K} = 1$ と仮定したので, S_K と素な分数イデアルの群を I_{K,S_K} とおくと

$$0 \rightarrow U \rightarrow K^{\times} \rightarrow I_{K,S_K} \rightarrow 0$$

は完全系列となる. これからコホモロジー完全系列

$$0 \rightarrow U_{k,S} \rightarrow k^{\times} \rightarrow I_{k,S} \rightarrow H^1(G, U) \rightarrow H^1(G, K^{\times}) = 0$$

が得られる (S がすべての分岐素点を含むので $I_{K,S_K}^G = I_{k,S}$ となる. また最後の項で「Hilbert の定理 90」を用いた). よって $H^1(G, U) \cong \text{Coker}(k^{\times} \rightarrow I_{k,S})$ となり,

$$|\hat{H}^{-1}(G, X)| = |H^1(G, U)| = h_{k,S}$$

を得る.

以上で $q(\mathbb{Z}, f) = (U_{k,S} : f(X_{k,S}))/h_{k,S}$ が示された. これと命題 1.2 (5) を比較すれば $B(\mathbb{Z}) = \pm 1$ が言える. $\square$

それでは, 定理 1.1 を証明しよう.

χ を $G = \text{Gal}(K/k)$ の有理指標として,

$$\chi = \sum_{\theta \in \hat{G}} n_{\theta} \theta$$

と表す ($\hat{G}$ は G の $\mathbb{C}$ 上の既約指標全体の集合とする). すると任意の $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ に対して

$$\sum_{\theta \in \hat{G}} n_{\theta} \theta = \chi = \chi^{\sigma} = \sum_{\theta \in \hat{G}} n_{\theta} \theta^{\sigma}$$

より, 各 $\theta \in \hat{G}$ に対して $n_{\theta^{\sigma}} = n_{\theta}$ が成り立つ. したがって χ が $\text{Tr}_{\mathbb{Q}(\theta)/\mathbb{Q}} \theta$ の整数係数一次結合で表されることが分かる. よって命題 1.2 (1) より, $A(\chi, f) \in \mathbb{Q}$ を示すには次の定理を言えば十分である:

定理 3.2. $\theta \in \widehat{G}$ とし, $\psi = \text{Tr}_{\mathbb{Q}(\theta)/\mathbb{Q}} \theta: G \longrightarrow \mathbb{Q}$ とおく. このとき $\mathbb{Q}(\theta)$ の分数イデアル $\mathfrak{a}$ が存在して $A(\psi, f) = \pm N_{\mathbb{Q}(\theta)/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a})$ が成り立つ.

注意 3.3. ψ は G のある表現の指標である (したがって $A(\psi, f)$ が定義される). 実際, θ に対応する行列表現の 1 つを ρ とし, $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\theta)/\mathbb{Q})$ の各元を $\mathbb{C}$ の自己同型に延長して ρ の行列成分に作用させたものたちの直和をとれば, ψ を指標とする表現となる.

証明. 有限群の表現論により, 次の事実が成り立つ (定理 4.4 参照):

正整数 m が存在して, $m\theta$ は G の $\mathbb{Q}(\theta)$ 上の既約表現の指標, $m\psi$ は $\mathbb{Q}$ 上の既約表現の指標となる. 後者の表現を W として $D = \text{End}_{\mathbb{Q}[G]}(W)$ とおくと, D は斜体であり, その中心 $E := Z(D)$ は $\mathbb{Q}(\theta)$ と同型である. さらに $[D : E] = m^2$ が成り立つ.

$\varphi = m\psi$ とおくと, $A(\psi, f)^m = A(\varphi, f)$ かつ $A(\psi, f) \in \mathbb{R}$ なので, $A(\varphi, f) = \pm (N_{\mathbb{Q}(\theta)/\mathbb{Q}} \mathfrak{a})^m$ なる $\mathfrak{a}$ が存在することを示せばよい.

D の極大 O_E 整環 Λ をとる. また格子 $M_0 \subset W$ を 1 つとり, $M = \mathbb{Z}[G] \cdot M_0 \cdot \Lambda$ とおく (G は左から, D は右から W に作用しているとする). すると M は $\mathbb{Z}[G]$ および Λ の作用で閉じた格子となる. よって定理 3.1 より

$$A(\varphi, f) = \pm q(M, f) = \pm \frac{|\text{Coker } f_M|}{|\text{Ker } f_M|}$$

が成り立ち, かつ $\text{Coker } f_M$ および $\text{Ker } f_M$ はそれぞれ位数有限な Λ 加群である.

いま T を任意の位数有限な Λ 加群とし, $|T| = N\mathfrak{a}^m$ を満たすイデアル $\mathfrak{a} \subset O_E$ が存在することを示そう. T の組成列 $0 = T_0 \subset T_1 \subset \cdots \subset T_l = T$ をとり, $i = 1, \dots, l$ に対して $S_i = T_i/T_{i-1}$, $\mathfrak{p}_i = \text{Ann}_{O_E} S_i$ とおく. S_i は単純 Λ 加群なので $\mathfrak{p}_i$ は O_E の極大イデアルである. よって, 以下に引用する定理 3.4 により, $|S_i| = |O_E/\mathfrak{p}_i|^m = N\mathfrak{p}_i^m$ が成り立つ. したがって $|T| = N(\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_l)^m$ となる. 以上で定理が示された. $\square$

定理 3.4 ([Sw2] Theorem 7.1). R を Dedekind 整域, L をその商体とする. また $\mathfrak{p}$ は R の極大イデアルで, 剰余体 $R/\mathfrak{p}$ は有限体であるとする. さらに A を L 上の中心的単純環, $\Lambda \subset A$ を A の極大 R 整環とし, $\dim_L A = n^2$ とおく. このとき, 単純 Λ 加群 S が $\mathfrak{p}S = 0$ を満たすならば, $\dim_{R/\mathfrak{p}} S = n$ が成り立つ.

4 補足：有限群の表現論

ここでは定理 3.2 の証明で用いた事実を示す.

G を任意の有限群とし, G 上の関数の空間 $\text{Map}(G, \mathbb{C})$ における双線型形式を

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} f(s^{-1})g(s)$$

で定める. また F を $\mathbb{C}$ の部分体とする.

定義 4.1. G の F 上の表現の指標で生成される, $\text{Map}(G, \mathbb{C})$ の部分 $\mathbb{Z}$ 加群を $\mathcal{C}_F(G)$ で表し, その元を G の F 上の仮想指標という. また $\mathbb{C}$ 上の仮想指標であって, 値がすべて F に含まれるもの全体のなす $\mathbb{Z}$ 加群を $\mathcal{C}'_F(G)$ で表す.

定義から明らかに $\mathcal{C}_F(G) \subset \mathcal{C}'_F(G)$ である. 次に定義する Schur 指数を用いると, 両者の関係をさらに詳しく記述できる:

定義 4.2. G の F 上の既約表現全体を $\{V_i\}_i$ と書く. また V_i の指標を θ_i とおく. このとき $D_i := \text{End}_{F[G]}(V_i)$ は斜体であり, その中心 $E_i := Z(D_i)$ 上の次数は平方数である: $m_i^2 = [D_i : E_i]$. この正整数 m_i を, F 上の既約指標 θ_i に対する Schur 指数という.

命題 4.3. (1) $\{\theta_i\}_i$ は $\mathcal{C}_F(G)$ の $\mathbb{Z}$ 基底である.

(2) $i \neq j$ のとき $\langle \theta_i, \theta_j \rangle = 0$ である. また $\langle \theta_i, \theta_i \rangle = [D_i : F] = m_i^2 [E_i : F]$ である.

(3) $\{\theta_i/m_i\}_i$ は $\mathcal{C}'_F(G)$ の $\mathbb{Z}$ 基底である.

証明. [S1] Chapter 12, Proposition 32 および Proposition 35 を見よ. □

定理 4.4. θ を G の $\mathbb{C}$ 上の既約指標とする.

(1) G の $F(\theta)$ 上のある既約指標 θ' に対し, その Schur 指数を m とするとき, $\theta = \theta'/m$ が成り立つ.

(2) $\varphi = \text{Tr}_{F(\theta)/F} \theta'$ はある F 上の既約表現 W の指標である.

(3) 斜体 $D := \text{End}_{F[G]}(W)$ の中心を $E := Z(D)$ とおくと, $E \cong F(\theta)$ かつ $[D : E] = m^2$ が成り立つ.

証明. G の $F(\theta)$ 上の既約表現を $\{V_i\}_i$ と書いて, θ_i を V_i の指標とする. また D_i, E_i, m_i はそれぞれ定義 4.2 において F を $F(\theta)$ に置き換えて得られるものとする. すると命題 4.3 (3) より $\theta = \sum_i d_i \theta_i / m_i$ ($d_i \in \mathbb{Z}$) と書くことができる. θ が $\mathbb{C}$ 上の既約指標であ

ることから、命題 4.3 (2) より

$$1 = \langle \theta, \theta \rangle = \sum_i \frac{d_i^2}{m_i^2} \langle \theta_i, \theta_i \rangle = \sum_i d_i^2 [E_i : F(\theta)]$$

が成り立つ。したがってある i に対して $d_j = \pm \delta_{ij}$ かつ $E_i = F(\theta)$ でなければならない。そこで $\theta' = \theta_i$, $m = m_i$ とおくと $\theta = \pm \theta' / m$ となるが, $1 \in G$ を代入すれば $\theta(1), \theta_i(1) > 0$ より符号は $+$ であることが分かる。以上で (1) が示された。

θ' に対応する $F(\theta)$ 上の既約表現を V とおく (上で V_i と書いたものと同じである)。このとき, 上の証明から $Z(\text{End}_{F(\theta)[G]}(V)) = F(\theta)$ が成り立つ。

$\Gamma = \text{Gal}(F(\theta)/F)$ とおく。各 $\sigma \in \Gamma$ によって $F(\theta)$ を $F(\theta)$ 代数とみなしたものを $F(\theta)^\sigma$ で表し, $V^\sigma = V \otimes_{F(\theta)} F(\theta)^\sigma$ とおく。 V 成分への作用によって V^σ は G の $F(\theta)$ 上の表現となり, その指標は $\sigma \circ \theta'$ である。一方, V の係数を F に制限した空間を W とおくと, これは F 上の G の表現であって,

$$W \otimes_F F(\theta) \cong \bigoplus_{\sigma \in \Gamma} V^\sigma$$

が成り立つ。よって W の指標は $\varphi = \text{Tr}_{F(\theta)/F} \theta'$ に等しい。

(2) を示すためには, W が F 上の表現として既約であることをいえばよい。 $W = W_1 \oplus W_2$ と直和分解したとすると, G の $F(\theta)$ 上の表現として

$$(W_1 \otimes_F F(\theta)) \oplus (W_2 \otimes_F F(\theta)) \cong \bigoplus_{\sigma \in \Gamma} V^\sigma$$

なる同型が成り立つ。右辺は $F(\theta)$ 上の表現としての既約分解であり, かつ $V^\sigma \cong V^\tau$ となるのは $\sigma = \tau$ のときのみである。実際このとき $\sigma \circ \theta' = \tau \circ \theta'$ より, $\tau^{-1}\sigma$ は $F(\theta') = F(\theta)$ に自明に作用し, したがって Γ の単位元に等しい。このことと, 左辺の 2 つの直和因子が Γ の作用で閉じていることから, 一方が右辺の既約因子のいずれかを含めばすべての既約因子を含まねばならない。これは $W_1 = W$ または $W_2 = W$ ということを意味する。

$D = \text{End}_{F[G]}(W)$, $E = Z(D)$ とおく。上で示したように, V^σ は互いに同型でない既約表現なので

$$\begin{aligned} D \otimes_F F(\theta) &\cong \text{End}_{F(\theta)[G]}(W \otimes_F F(\theta)) \cong \text{End}_{F(\theta)[G]} \left(\bigoplus_{\sigma \in \Gamma} V^\sigma \right) \\ &\cong \prod_{\sigma \in \Gamma} \text{End}_{F(\theta)[G]}(V)^\sigma \end{aligned}$$

となる．したがって

$$[D : E] \cdot [E : F] = [F(\theta) : F] \cdot [\text{End}_{F(\theta)[G]}(V) : F(\theta)] = [F(\theta) : F] \cdot m^2$$

が成り立つ．また上の同型において中心をとれば

$$E \otimes_F F(\theta) \cong \prod_{\sigma \in \Gamma} F(\theta)^\sigma \cong F(\theta) \otimes_F F(\theta)$$

を得る．これより $[E : F] = [F(\theta) : F]$ ，したがって $[D : E] = m^2$ である．さらにテンソル積の構造射 $E \rightarrow E \otimes_F F(\theta)$ と積 $F(\theta) \otimes_F F(\theta) \rightarrow F(\theta)$ を合成すれば F 代数の射 $E \rightarrow F(\theta)$ が得られ，拡大次数の比較によってこれが同型 $E \cong F(\theta)$ を与えることが分かる．以上で (3) が証明された． $\square$

参考文献

- [CF] J. W. S. Cassels, A. Fröhlich, *Algebraic Number Theory*, Academic Press, 1967.
- [D] S. Dasgupta, Stark's Conjectures, bachelor thesis, 1999.
- [S1] J.-P. Serre, *Linear Representations of Finite Groups*, GTM 42, Springer, 1977.
- [S2] J.-P. Serre, *Local Fields*, GTM 67, Springer, 1979.
- [Sw1] R. G. Swan, Induced representations and projective modules, Ann. of Math. 71 (1960), 552–578.
- [Sw2] R. G. Swan, *K-Theory of finite groups and orders*, LNM 149, Springer, 1970.
- [T] J. Tate, *Les Conjectures de Stark sur les Fonctions L d'Artin en $s = 0$* , Birkhäuser, 1984.