"FAMILIES OF GALOIS REPRESENTATIONS AND SELMER GROUPS" の第１章の概説の講演のレジュメ

平野　雄一

0. 講演の目的

G を群とし, A を Hensel 局所環とする. $\mathfrak{m}$ を A の極大イデアルとし, κ を A の剰余体とする.

本講演の主な目的は, J. Bellaiche 氏と G. Chenevier 氏の文献 "Families of Galois representations and Selmer groups" の第 1 章に基づき, 剰余して無重複な擬指標から表現の拡大を構成することである. つまり, 群環 $A[G]$ から A への d 次元擬指標 $T : A[G] \to A$ が剰余して無重複とする:

$$T \otimes_A \kappa = \mathrm{tr} \circ (\overline{\rho}_1 \oplus \cdots \oplus \overline{\rho}_r)$$

(定義 1.6). 但し, 擬指標は Taylor 氏, Nyssen 氏, Rouquier 氏によって導入されたもの (定義 1.1) で, Wiles 氏による擬表現の一般化である. このとき, 各 i, j に対し, 表現の拡大 $[V] \in \mathrm{Ext}^1_{\kappa[G]}(\overline{\rho}_j, \overline{\rho}_i)$ を構成することが目的である:

$$0 \to \overline{\rho}_i \to V \to \overline{\rho}_j \to 0.$$

1. 記号と定義

擬指標の定義と主結果を述べるために, 記号を準備する.

本講演で扱う環や代数はすべて結合的で単位元をもつとする. 但し, 可換とは限らない. また, 環や代数の射は単位元を保つとする.

$A, \mathfrak{m}, \kappa$ は冒頭で述べた通りとする. R を (可換とは限らない) A 代数とする. R の d 次元表現を R から行列代数 $\mathrm{M}_d(A)$ への A 代数の準同型とする.

$T : R \to A$ を A 線形な中心的関数とする:

$$\text{各 } x, y \in R \text{ に対し, } T(xy) = T(yx).$$

整数 $n \geq 1$ に対し, $S_n(T) : R^n \to A$ を次で定める: $\underline{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in R^n$ に対し,

$$S_n(T)(\underline{x}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma) T^{\sigma}(\underline{x}).$$

但し, σ は n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の元をわたり, $\mathrm{sgn}(\sigma)$ は σ の符号とし, $T^{\sigma} : R^n \to A$ を次で定める: 巡回置換 $\sigma = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_{m-1} & j_m \\ j_2 & j_3 & \cdots & j_m & j_1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_n$ に対し,

$$T^{\sigma}(\underline{x}) = T(x_{j_1} \cdots x_{j_m})$$

とする. 一般の $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対し, σ を互いに共通の文字を含まない巡回置換 σ_i の積の形 $\sigma = \prod_i \sigma_i$ で表し,

$$T^{\sigma}(\underline{x}) = \prod_i T^{\sigma_i}(\underline{x})$$

とする.

定義 1.1. R の d 次元擬指標 (pseudocharacter) $T: R \to A$ を次の 3 条件 (i), (ii), (iii) をみたす A 線形な中心的関数として定める:
 (i) $T(1) = d$;
 (ii) 各 $\underline{x} \in R^{d+1}$ に対し, $S_{d+1}(T)(\underline{x}) = 0$;
 (iii) $d! \in A^{\times}$.
R の d 次元擬指標全体を $\mathrm{PsC}^d(R, A)$ と書く.

$T \in \mathrm{PsC}^d(R, A)$ と $x \in R$ に伴う A 係数 1 変数多項式 $P_{x,T}(X)$ を次で定める:

$$P_{x,T}(X) = X^d + \sum_{k=1}^{d} \frac{(-1)^k}{k!} S_k(T)(x, \cdots, x) X^{d-k} \in A[X].$$

定義 1.2. $T \in \mathrm{PsC}^d(R, A)$ とする. T が Cayley-Hamilton であることを次で定める:

$$各\ x \in R\ に対し,\ P_{x,T}(x) = 0.$$

この組 (R, T) を Cayley-Hamilton 代数という.

事実 1.3. $T \in \mathrm{PsC}^d(R, A)$ とすると, 各 $x, y \in R$ に対し,

$$S_{d+1}(x, \cdots, x, y) = (-1)^d d! \cdot T(P_{x,T}(x) y).$$

例 1.4. $\rho : R \to \mathrm{M}_d(A)$ を d 次元表現とする. 通常のトレース $\mathrm{tr} : \mathrm{M}_d(A) \to A$ に対し,

$$T = \mathrm{tr} \circ \rho$$

とおく. このとき, $T \in \mathrm{PsC}^d(R, A)$ である. $P_{x,T}(X)$ は $\rho(x)$ の特性多項式であり, 次の Cayley-Hamilton 恒等式が成り立つ:

$$各\ x \in R\ に対し,\ P_{x,T}(x) = 0.$$

例 1.5. $T \in \mathrm{PsC}^d(R, A)$ とする. $S = R/\ker(T)$ とおく. 但し, $\ker(T)$ は T の核とする:

$$\ker(T) = \{x \in R \mid 各\ y \in R\ に対し,\ T(xy) = 0\}.$$

$T : R \to A$ から自然に誘導される射も $T : S \to A$ とかく. このとき, $T \in \mathrm{PsC}^d(S, A)$ である. さらに, T は Cayley-Hamilton である.

定義 1.6. $T \in \mathrm{PsC}^d(R, A)$ とする. T が剰余して無重複 (residually multiplicity-free) とは次をみたす絶対既約表現 $\overline{\rho}_i : R \to \mathrm{M}_{d_i}(\kappa)$ $(1 \leq i \leq r)$ が存在することとして定める:
 (i) 各 $i \neq j$ に対し, $\overline{\rho}_i \not\cong \overline{\rho}_j$;
 (ii) $T \otimes_A \kappa = \mathrm{tr} \circ (\overline{\rho}_1 \oplus \cdots \oplus \overline{\rho}_r)$.

2. 主結果

以上の記号と定義のもとで, 主結果を述べる.

<u>**(主結果 1)**</u> $T \in \mathrm{PsC}^d(R, A)$ が Cayley-Hamilton かつ剰余して無重複と仮定する.

(1) 次の 6 条件 (i) から (vi) をみたす冪等元 $e_1, \cdots, e_r \in R$ と $\bar{\rho}_i|_{e_i R e_i}$ の持ち上げ $\psi_i : e_i R e_i \xrightarrow{\sim} \mathrm{M}_{d_i}(A)$ が存在する:
 (i) $e_1 + \cdots + e_r = 1$, $e_i e_j = \delta_{i,j} e_i$ (但し, $\delta_{i,j}$ は Kronecker のデルタとする);
 (ii) 各 i に対し, $T(e_i) = d_i$;
 (iii) 各 $x \in R$ に対し, $T(e_i x e_i) \equiv \mathrm{tr} \circ \bar{\rho}_i(x) \pmod{\mathfrak{m}}$;
 (iv) 各 $x, y \in R$, 各 $i \neq j$ に対し, $T(e_i x e_j y e_i) \in \mathfrak{m}$;
 (v) 各 $x \in R$ に対し, $T(e_i x e_i) = \mathrm{tr} \circ \psi_i(e_i x e_i)$;

(vi) R のある部分 A 加群 $\mathcal{A}_{i,j}$ が存在して次をみたす: 各 i,j,k に対し,

$$\mathcal{A}_{i,j}\mathcal{A}_{j,k} \subset \mathcal{A}_{i,k},\ \ T:\mathcal{A}_{i,i} \xrightarrow{\simeq} A,\ \ T(\mathcal{A}_{i,j}\mathcal{A}_{j,i}) \subset \mathfrak{m};$$
$$e_iRe_j \simeq \mathrm{M}_{d_i,d_j}(\mathcal{A}_{i,j}).$$

特に, A 代数として次の同型が存在する:

$$R \simeq \begin{pmatrix} \mathrm{M}_{d_1}(A) & \cdots & \mathrm{M}_{d_1,d_i}(\mathcal{A}_{1,i}) & \cdots & \mathrm{M}_{d_1,d_r}(\mathcal{A}_{1,r}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{M}_{d_i,d_1}(\mathcal{A}_{i,1}) & \cdots & \mathrm{M}_{d_i}(A) & \cdots & \mathrm{M}_{d_i,d_r}(\mathcal{A}_{i,r}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{M}_{d_r,d_1}(\mathcal{A}_{r,1}) & \cdots & \mathrm{M}_{d_r,d_i}(\mathcal{A}_{r,i}) & \cdots & \mathrm{M}_{d_r}(A) \end{pmatrix}.$$

(2) A が被約かつ全商環 K が有限個の体の直積とする. $S = R/\ker(T)$ とし, $\mathcal{A}_{i,j}$ を (1)(vi) で述べた S の部分 A 加群とする. このとき, 各 $\mathcal{A}_{i,j}$ は K の分数イデアルである. つまり, 非零因子 $f \in A$ が存在し, $f\mathcal{A}_{i,j} \subset A$ が成り立つ.

<u>**(主結果２)**</u> $T \in \mathrm{PsC}^d(R,A)$ を剰余して無重複とする. $S = R/\ker(T)$ とし, e_i (resp. $\mathcal{A}_{i,j}$) を主結果 1 で述べた冪等元 (resp. S の部分 A 加群) とする. $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_1,\cdots,\mathcal{P}_s)$ を $\{1,\cdots,r\}$ の分割とする: $\{1,\cdots,r\} = \mathcal{P}_1 \coprod \cdots \coprod \mathcal{P}_s$. $I_{\mathcal{P}}$ を分割 $\mathcal{P}$ に伴う A のイデアルとして次で定める:

$$I_{\mathcal{P}} = \sum_{(k_1,k_2)} \mathcal{A}_{k_1,k_2}\mathcal{A}_{k_2,k_1} \subset A.$$

但し, (k_1,k_2) は同じ分割 $\mathcal{P}_m$ に入らない整数の組をわたり, 同型 $\mathcal{A}_{k_1,k_1} \simeq A$ のもとで, $I_{\mathcal{P}}$ を A のイデアルとみなす.

各 ℓ に対し, 冪等元 $f_{\mathcal{P}_\ell} \in S$ を次で定める:

$$f_{\mathcal{P}_\ell} = \sum_{n \in \mathcal{P}_\ell} e_n.$$

擬指標 $T_{\mathcal{P}_\ell} : R \to A$ を次の合成で定める:

$$R \twoheadrightarrow S \twoheadrightarrow f_{\mathcal{P}_\ell}Sf_{\mathcal{P}_\ell} \xrightarrow{T} A.$$

但し, １つ目の射は自然な全射, ２つ目の射は $x \mapsto f_{\mathcal{P}_\ell}xf_{\mathcal{P}_\ell}$ で定め, 最後の射は $T: S \to A$ を $f_{\mathcal{P}_\ell}Sf_{\mathcal{P}_\ell}$ に制限したものとする.

以上の設定のもと, 次の２つの主張が成立する:

(1) J を A のイデアルとする. 次の 2 条件 (a), (b) は同値である:

(a) $J \supset I_{\mathcal{P}}$;

(b) 各 ℓ に対し, $T_{\mathcal{P}_\ell} \otimes_A A/J$ は非自明で次の性質 ($\mathrm{dec}_{\mathcal{P}}$) をみたす:

($\mathrm{dec}_{\mathcal{P}}$) (i) $T \otimes_A A/J = \sum_{\ell=1}^{s} T_{\mathcal{P}_\ell} \otimes_A A/J$;

(ii) 各 ℓ に対し, $T_{\mathcal{P}_\ell} \otimes_A \kappa = \sum_{n \in \mathcal{P}_\ell} \mathrm{tr} \circ \overline{\rho}_n$.

(2) $i \in \{1,\cdots,r\}$ とし, $\mathcal{P}$ を $\{i\}$ を含む $\{1,\cdots,r\}$ の分割とする. J を A のイデアルで $J \supset I_{\mathcal{P}}$ とする. このとき, ある表現 $\rho_i : R/J \twoheadrightarrow \mathrm{M}_{d_i}(A/J)$ が存在して次をみたす:

$$T_{\{i\}} = \mathrm{tr} \circ \rho_i;$$
$$\rho_i \otimes_A \kappa = \overline{\rho}_i.$$

(主結果３)　主結果２と同じ記号を用いる. $i, j \in \{1, \cdots, r\}$ を $i \neq j$ とし, $\mathcal{P}$ を $\{i\}$, $\{j\}$ を含む $\{1, \cdots, r\}$ の分割とする. $\mathcal{A}'_{i,j}$ を $\mathcal{A}_{i,j}$ の部分 A 加群として次で定める:

$$\mathcal{A}'_{i,j} = \sum_{k \neq i,j} \mathcal{A}_{i,k}\mathcal{A}_{k,j} \subset \mathcal{A}_{i,j}.$$

(1) 主結果２ (2) と同じ記号のもとで, 次をみたす単射 $\iota_{i,j} : \mathrm{Hom}_A(\mathcal{A}_{i,j}/\mathcal{A}'_{i,j}, A/J) \hookrightarrow \mathrm{Ext}^1_{R/J}(\rho_j, \rho_i)$ が存在する:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_A(\mathcal{A}_{i,j}/\mathcal{A}'_{i,j}, A/J) \arrow[rr, hook, "\iota_{i,j}"] \arrow[dr, "\simeq"'] & & \mathrm{Ext}^1_{R/J}(\rho_j, \rho_i) . \\
& \mathrm{Ext}^1_{S/J}(\rho_j, \rho_i) \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

(2) ある射影的 S 加群 M_j が存在して次をみたす: 各 $f \in \mathrm{Hom}_A(\mathcal{A}_{i,j}/\mathcal{A}'_{i,j}, A/J)$ に対し, $M_j/J \oplus \rho_i$ のある部分 S 加群 Q が存在して次をみたす:

(i) 拡大 $\iota_{i,j}(f) \in \mathrm{Ext}^1_{S/J}(\rho_j, \rho_i)$ は次の形でかける:

$$0 \to \rho_i \to \frac{M_j/J \oplus \rho_i}{Q} \to \rho_j \to 0.$$

(ii) Q の任意の単純 S 部分商は, ある $k \neq j$ に対し, $\overline{\rho}_k$ と同型になる.

3. 主結果の証明の鍵

主結果の証明の鍵は, 剰余して無重複という仮定のもとで, 各 i における行列代数 $\mathrm{M}_{d_i}(\kappa)$ の冪等元 (基本行列) を持ち上げることである. それは次の持ち上げ定理に基づく:

持ち上げ定理 (東屋)　A を Hensel 局所環とする. R を A 上整とする. $\widetilde{R} = R/J(R)$ とする. 但し, $J(R)$ は R の Jacobson 根基とする. $\{\widetilde{e}_{i,j}\}_{1 \leq i,j \leq n}$ を次をみたす $\widetilde{R}$ の元の族とする:

$$\widetilde{e}_{1,1} + \cdots + \widetilde{e}_{n,n} = 1,\ \widetilde{e}_{i,j}\widetilde{e}_{k,\ell} = \delta_{j,k}\widetilde{e}_{i,\ell}.$$

このとき, R の元の族 $\{e_{i,j}\}_{1 \leq i,j \leq n}$ が存在し, 各 $e_{i,j}$ は $\widetilde{e}_{i,j}$ の持ち上げで次をみたす:

$$e_{1,1} + \cdots + e_{n,n} = 1,\ e_{i,j}e_{k,\ell} = \delta_{j,k}e_{i,\ell}.$$