整数論 SAMA- SUKU-RU レジュメ

石川 勲

Contents

1. 記号	1
2. §7.1. p-adic families of Eisenstein series	3
2.1. 保型形式 (modular form) と Hecke 作用素	3
2.2. Eisenstein 級数	5
2.3. Eisenstein 級数の p 進族	7
3. §7.2. The projection to the ordinary part	9
3.1. The ordinary idempotent	9
3.2. ordinary な保型形式の例	10
4. 群コホモロジーと Eichler-志村同型	10
4.1. 群コホモロジーの一般論	10
4.2. $\Gamma_0(\mathbf{p}p^\alpha)$ の群コホモロジーと Eichler-志村同型	12
5. ordinary part の次元の不変性	14
5.1. 主定理と補題	14
5.2. 主定理 (定理 5.1) の証明	16
References	17

1. 記号

本稿で用いる主な記号は以下の通り:

$$
\begin{aligned}
&p : 素数,\\
&\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C} \cong \overline{\mathbb{Q}}_p を固定,\\
&|\cdot|_p : \overline{\mathbb{Q}}_p \to \{0\} \cup p^{\mathbb{Q}} : |p|_p = p^{-1} \text{ と正規化した付値},\\
&\mathbf{p} := \begin{cases} 4 & (p = 2), \\ p & (p > 2), \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\Delta(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}) \middle| \begin{array}{l} c \equiv 0 \mod N \\ (a, N) = 1, ad - bc > 0 \end{array} \right\},
$$

$$
\Gamma_0(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \middle| c \equiv 0 \mod N \right\},
$$

$$
\Gamma_1(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \middle| c \equiv 0,\ d \equiv 1 \mod N \right\},
$$

$\mathscr{H} := \{z \in \mathbb{C} | \mathrm{Im}(z) > 0\}$: 上半平面,

$\omega : \mathbb{Z}_p^\times \to (\mathbb{Z}_p/\mathbf{p}\mathbb{Z}_p)^\times \to \mathbb{Z}_p^\times$: Teichmüller 指標 (練習 1.1)

: しばしば法 $\mathbf{p}$ の Dirichlet 指標ともみなす,

$\langle\cdot\rangle : \mathbb{Z}_p^\times \to 1 + \mathbf{p}\mathbb{Z}_p; x \mapsto x\omega(x)^{-1}$,

$u := 1 + \mathbf{p} \in \mathbb{Z}_p^\times$: $1 + \mathbf{p}\mathbb{Z}_p$ の位相的生成元

i.e. $\mathbb{Z}_p \cong 1 + \mathbf{p}\mathbb{Z}_p;\ x \mapsto u^x := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}\mathbf{p}^n$,

$\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}^\times$: N を法として定義された Dirichlet 指標 (Dirichlet character),

$1_N : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \longrightarrow \{1\} \subset \overline{\mathbb{Q}}^\times$:$N$ を法とした自明 Dirichlet 指標.

また, N を法とした Dirichlet 指標 χ に対して以下のように定める.

(1) $(N, r) > 1$ なる整数 r に対して,

$$\chi(r) = 0$$

とすることにより χ を整数上の関数 $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ と見なす.

(2) $\delta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Delta(N)$ に対して

$$\chi(\delta) := \chi(a)$$

と定義することにより, $\Delta(N)$ から $\mathbb{C}_p^\times$ への半群としての準同型としばしばみなす.

(3) 部分環 $A \subset \mathbb{C}$, $\overline{\mathbb{Q}}_p$ or $\overline{\mathbb{F}}_p$ に対して

$$A[\chi] := A[\{\chi(c)\}_{c \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times}]$$

とする.

さらに,

$$\log_p : \overline{\mathbb{Q}}_p^\times \to \overline{\mathbb{Q}}_p$$

を次で特徴付けられる連続群準同型 (p 進対数写像と呼ぶ) とする:

$$\log_p(1+s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n s^n}{n} \quad (|s|_p < 1)$$
$$\log_p(p) = 0.$$

練習 1.1. p を奇素数とする. $\widetilde{x} \in (\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p)^\times$ に対して, $x \in \mathbb{Z}_p$ を $x = \widetilde{x} \mod p\mathbb{Z}_p$ なる元とする. この時

$$\lim_{n\to\infty} x^{p^n}$$

は収束し, 収束先は x の取り方に依らないことを示せ. この収束先を $\omega(\widetilde{x})$ と定義する ($p = 2$ の時は, ω は自然な射 $(\mathbb{Z}_2/4\mathbb{Z}_2)^\times = \{1, -1\} \hookrightarrow \mathbb{Z}_2^\times$ で定義する).

2. §7.1. p-ADIC FAMILIES OF EISENSTEIN SERIES

2.1. **保型形式 (modular form) と Hecke 作用素.** この節では今回の講演で用いる保型形式に関する知識を簡単に復習する．必要に応じて参照してもらいたい．基本的に命題や定理等の証明は与えない．$k \geq 1$, $f : \mathscr{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ を $\mathscr{H}$ 上の連続関数とし, 任意の $\det(\gamma) > 0$ となるような $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$ に対して

$$f|_k\gamma(z) := \det(\gamma)^{k-1}(cz+d)^{-k}f(\gamma \cdot z)$$

と定める．ここで, $\gamma \cdot z$ は分数変換である．以下, 任意の $\gamma \in \Gamma_1(N)$ に対し, $f|_k\gamma = f$ を仮定する．任意の $\alpha \in SL_2(\mathbb{Z})$ に対して, ある $L \in \mathbb{Z}_{>0}$ が存在して

$$f|_k\alpha \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (z) = f|_k\alpha(z+L) = f|_k\alpha(z)$$

を満たす（練習 2.3）．このような L の中で最小のものを $L_\alpha \in \mathbb{Z}_{>0}$ と置くと, 次の形の Fourier 級数展開を持つ:

$$f|_k\alpha(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n, f|_k\alpha)e^{2\pi inz/L_\alpha}. \tag{2.1}$$

以上を踏まえて, 保型形式の空間を定義する．

定義 2.1 (保型形式の空間)**.** $k \geq 1 \in \mathbb{Z}, N \in \mathbb{Z}_{>0}$ とし $\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}^\times$ を Dirichlet 指標とする．この時, 重さ k, レベル N, 指標 χ の保型形式の空間を

$$\mathcal{M}_k(\Gamma_0(N), \chi) := \left\{ \begin{array}{cl} f & : \mathscr{H} \longrightarrow \mathbb{C} \\ & : \text{解析関数} \end{array} \middle| \begin{array}{l} \chi(\gamma)f|_k\gamma = f \text{ for } \gamma \in \Gamma_0(N), \text{ かつ} \\ \text{Fourier 展開 (2.1) において} \\ a(n, f|_k\alpha) = 0 \text{ for } n < 0, \alpha \in SL_2(\mathbb{Z}) \end{array} \right\}$$

と定義し, 重さ k, レベル N, 指標 χ の尖点（カスプ）形式 (cusp form) の空間を

$$\mathcal{S}_k(\Gamma_0(N), \chi) := \left\{ \begin{array}{cl} f & : \mathscr{H} \longrightarrow \mathbb{C} \\ & : \text{解析関数} \end{array} \middle| \begin{array}{l} \chi(\gamma)f|_k\gamma = f \text{ for } \gamma \in \Gamma_0(N), \text{ かつ} \\ \text{Fourier 展開 (2.1) において} \\ a(n, f|_k\alpha) = 0 \text{ for } n \leq 0, \alpha \in SL_2(\mathbb{Z}) \end{array} \right\}$$

と定義する．

注意 2.2. $\mathcal{M}_k(\Gamma_0(N), \chi)$ 及び $\mathcal{S}_k(\Gamma_0(N), \chi)$ は $\mathbb{C}$ 上有限次元である．

練習 2.3. 関数 $f : \mathscr{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ について 任意の $\gamma \in \Gamma_1(N)$ に対して $f|_k\gamma = f$ を仮定する．任意の $\alpha \in SL_2(\mathbb{Z})$ に対して, ある $L \in \mathbb{Z}_{>0}$ が存在して

$$f|_k\alpha \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (z) = f|_k\alpha(z+L) = f|_k\alpha(z)$$

を満たす事を示せ.

上の定義から保型形式 $f \in \mathcal{M}_k(\Gamma_0(N), \chi)$ は

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n, f)q^n \ (q = e^{2\pi iz}).$$

なる展開を持ち (q-展開と呼ぶ) 自然に $\mathbb{C}$ 係数形式的冪級数環 $\mathbb{C}[[q]]$ の元と思うことができる (q を不定元とみなしている). $\mathcal{M}_k(\Gamma_0(N),\chi)$, $\mathcal{S}_k(\Gamma_0(N),\chi) \subset \mathbb{C}[[q]]$ と見なし保型形式の"係数"の概念を得る:

定義 2.4. 重さ k, レベル N, 指標 χ の $\mathbb{Z}[\chi]$ 係数保型形式の空間及び尖点形式の空間を

$$\mathcal{M}_k\left(\Gamma_0(N),\chi;\mathbb{Z}[\chi]\right) := \mathcal{M}_k(\Gamma_0(N),\chi)\bigcap \mathbb{Z}[\chi][[q]],$$

$$m_k\left(\Gamma_0(N),\chi;\mathbb{Z}[\chi]\right) := \left\{f \in \mathcal{M}_k(\Gamma_0(N),\chi)\middle| a(1,f) \in \mathbb{Q}[\chi], a(n,f) \in \mathbb{Z}[\chi] \text{ for } n > 0\right\},$$

$$\mathcal{S}_k\left(\Gamma_0(N),\chi;\mathbb{Z}[\chi]\right) := \mathcal{S}_k(\Gamma_0(N),\chi)\bigcap \mathbb{Z}[\chi][[q]]$$

と定義する. さらに, A を $\mathbb{Z}[\chi]$ 代数とする. この時, A 係数保型形式, 及び, 尖点形式の空間を

$$\mathcal{M}_k\left(\Gamma_0(N),\chi;A\right) := \mathcal{M}_k\left(\Gamma_0(N),\chi;\mathbb{Z}[\chi]\right) \otimes_{\mathbb{Z}[\chi]} A,$$

$$m_k\left(\Gamma_0(N),\chi;A\right) := m_k\left(\Gamma_0(N),\chi;\mathbb{Z}[\chi]\right) \otimes_{\mathbb{Z}[\chi]} A,$$

$$\mathcal{S}_k\left(\Gamma_0(N),\chi;A\right) := \mathcal{S}_k\left(\Gamma_0(N),\chi;\mathbb{Z}[\chi]\right) \otimes_{\mathbb{Z}[\chi]} A$$

と定義する.

注意 2.5. $\mathcal{M}_k(\Gamma_0(N),\chi;A), m_k(\Gamma_0(N),\chi;A), \mathcal{S}_k(\Gamma_0(N),\chi;A)$ は A 上平坦かつ有限生成である.

注意 2.6. $\mathbb{Z}[\chi] \subset A \subset \mathbb{C}$ の時,

$$\mathcal{M}_k\left(\Gamma_0(N),\chi;A\right) = \mathcal{M}_k(\Gamma_0(N),\chi)\bigcap A[[q]],$$

$$m_k\left(\Gamma_0(N),\chi;A\right) = \left\{f \in \mathcal{M}_k(\Gamma_0(N),\chi)\middle| a(1,f) \in Frac(A), a(n,f) \in A \text{ for } n > 0\right\},$$

$$\mathcal{S}_k\left(\Gamma_0(N),\chi;A\right) = \mathcal{S}_k(\Gamma_0(N),\chi)\bigcap A[[q]]$$

が成立する.

次に Hecke 作用素を定義する.

定義 2.7. l を素数として, 集合 $\Gamma_0(N)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & l \end{pmatrix}\Gamma_0(N)$ の左剰余類分解を

$$\Gamma_0(N)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & l \end{pmatrix}\Gamma_0(N) = \bigsqcup_{j=1}^{r} \Gamma_0(N)\gamma_j$$

とする. この時 $f \in \mathcal{M}_k(\Gamma_0(N),\chi)$ に対して Hecke 作用素 $T(l)$ を

$$f|T(l) := \sum_{j=1}^{r} \chi(\gamma_j) f|_k\gamma_j$$

と定義する. さらに, $T(1) = id$ とし, $m > 1$ に対して $T(l^m)$ を帰納的に

$$T(l^m) := T(l)T(l^{m-1}) - \chi(l)l^{k-1}T(l^{m-2})$$

によって定め (特に, $l|N$ ならば, $T(l^m) := T(l)^m$), 任意の $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して, $n = p_1^{m_1}\dots p_r^{m_r}$ と素因数分解とするとき

$$T(n) := \prod_{j=1}^{r} T(p_j^{m_j})$$

と定義する. ここで, l_1, l_2 を異なる素数とする時, $T(l_1^{m_1})$ と $T(l_2^{m_2})$ は可換である (例えば, 下の命題 2.9 を用いて証明できる). したがって, $T(n)$ は素因数分解の順番によらず well-defined である.

練習 2.8. 任意の素数 q に対して Hecke 作用素 $T(q)$ は左剰余類分解の代表系 $\{\gamma_j\}$ の取り方によらないことを示せ. さらに

$$f|T(q) \in \mathcal{M}_k(\Gamma_0(N), \chi)$$

となることを確かめよ.

Hecke 作用素を q 展開の係数で表現すると以下の命題のようになる:

命題 2.9. $f \in \mathcal{M}_k(\Gamma_0(N), \chi)$ とする. $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して

$$a(m, f|T(n)) = \sum_{0<b|(m,n)} \chi(b) b^{k-1} a\left(\frac{mn}{b^2}, f\right)$$

となる.

したがって 次を得る:

$$\mathcal{S}_k(\Gamma_0(N), \chi)|T(q) \subset \mathcal{S}_k(\Gamma_0(N), \chi),$$
$$\mathcal{M}_k(\Gamma_0(N), \chi; \mathbb{Z}[\chi])|T(q) \subset \mathcal{M}_k(\Gamma_0(N), \chi; \mathbb{Z}[\chi]).$$

定義 2.10. $k \geq 1$, χ を法 N の Dirichlet 指標とする. 任意の $\mathbb{Z}[\chi]$ 代数 A に対して

$$\mathbf{H}_k(\Gamma_0(N), \chi; A) := A[\{T(l) \otimes 1\}_l] \subset End_A(m_k(\Gamma_0(N), \chi; A)),$$
$$\mathbf{h}_k(\Gamma_0(N), \chi; A) := A[\{T(l) \otimes 1\}_l] \subset End_A(\mathcal{S}_k(\Gamma_0(N), \chi; A))$$

と定義する. これらは A 係数 Hecke 環と呼ばれる.

Hecke 環と保型形式は次の定理のような双対の関係にある:

定理 2.11. $k \geq 1$, χ を法 N の *Dirichlet* 指標, A を平坦な $\mathbb{Z}[\chi]$ 代数とする. この時

$$m_k(\Gamma_0(N), \chi, A) \otimes \mathbf{H}_k(\Gamma_0(N), \chi; A) \longrightarrow A; f \otimes T \mapsto a(1, f|T),$$
$$\mathcal{S}_k(\Gamma_0(N), \chi, A) \otimes \mathbf{h}_k(\Gamma_0(N), \chi; A) \longrightarrow A; f \otimes T \mapsto a(1, f|T)$$

は *perfect pairing* である. すなわち, 次の同型が成立する*:*

$$m_k(\Gamma_0(N), \chi; A) \cong Hom_A\left(\mathbf{H}_k(\Gamma_0(N), \chi; A), A\right),$$
$$\mathbf{H}_k(\Gamma_0(N), \chi; A) \cong Hom_A\left(m_k(\Gamma_0(N), \chi; A), A\right),$$
$$\mathcal{S}_k(\Gamma_0(N), \chi; A) \cong Hom_A\left(\mathbf{h}_k(\Gamma_0(N), \chi; A), A\right),$$
$$\mathbf{h}_k(\Gamma_0(N), \chi; A) \cong Hom_A\left(\mathcal{S}_k(\Gamma_0(N), \chi; A), A\right).$$

2.2. **Eisenstein 級数.** $k \geq 1$ を整数, $\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to \overline{\mathbb{Q}}^\times$ を N を法とした原始的 Dirichlet 指標とし, 以下を仮定する:

$$\chi(-1) = (-1)^k.$$

重さ k, 指標 χ の Eisenstein 級数を

$$\begin{aligned} E_k(z, \chi) \quad &:= \quad 2^{-1} L(1-k, \chi) + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1,\chi}(n) q^n \\ &\underset{\text{if } k>2(\text{練習 } 2.13)}{=} \left\{ \frac{N^k (k-1)!}{2\tau(\chi^{-1})\,(-2\pi i)^k} \right\} \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{\chi^{-1}(n)}{(mNz+n)^k}, \end{aligned}$$

と定義する．ここで

$$
\begin{aligned}
L(s,\chi) &: \text{Dirichlet の } L\text{-関数} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} \quad \text{for } \mathrm{Re}(s) > 1, \\
\tau(\chi^{-1}) &:= \sum_{r=1}^{N} \chi^{-1}(r) e^{2\pi i r/N}, \\
\sigma_{k-1,\chi}(n) &:= \sum_{0<d|n} \chi(d) d^{k-1}
\end{aligned}
$$

である．この時 $k \neq 2$ または $\chi \neq 1_1$ の時,

$$E_k(z,\chi) \in \mathcal{M}_k\left(\Gamma_0(N), \chi; \mathbb{Q}[\chi]\right)$$

が成立する (練習 2.14, 2.15).

注意 2.12. $k=2$, $\chi = 1_1$ の時, $z = x + yi$

$$E_2^*(z) := \frac{1}{8\pi y} + E_2(z, 1_1)$$

と置くと, $E_2^*(z)$ は解析的ではないが, $\gamma \in \Gamma_0(1)$ に対して

$$E_2^*(z)|_2\gamma = E_2^*(z)$$

が成立する．

練習 2.13. $\pi\cot(\pi z) := \pi i \dfrac{e^{\pi i z} + e^{-\pi i z}}{e^{\pi i z} - e^{-\pi i z}} = \pi i \left(-1 - 2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{2\pi i n z}\right)$ に関する以下の公式

$$\pi\cot(\pi z) = z^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n} \right\}$$

において z での微分を考えることにより, $k \geq 2$ の時,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^k} = \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} e^{2\pi i n z}$$

が成立することを示せ．また, これを用いて $k > 2$ の時,

$$2^{-1}L(1-k,\chi) + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1,\chi}(n) q^n = \left\{ \frac{N^k (k-1)!}{2\tau(\chi^{-1})\,(-2\pi i)^k} \right\} \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{\chi^{-1}(n)}{(mNz+n)^k}$$

を示せ．

練習 2.14. $k > 2$ とする．この時,

$$E_k(z,\chi) \in \mathcal{M}_k\left(\Gamma_0(N), \chi; \mathbb{Q}[\chi]\right)$$

を確かめよ．

練習 2.15. k を正の整数, χ を法 N の原始的な指標とする．次の実解析的 Eisenstein 級数

$$E(z,s,\chi) := y^s \sum_{(c,d):\text{互いに素}} \frac{\chi^{-1}(d)}{(cNz+d)^k |cNz+d|^{2s}}$$

のフーリエ展開を計算することにより, これは s に関して複素平面全体に有理型に解析接続でき, さらに $s=0$ での値を見る事で $E_k(z,\chi)+\delta_{\chi,1_1}\frac{1}{8\pi y}$ は

$$E(z,0,\chi)$$

に定数倍を除いて一致することを示せ (示さなくて良い.....[M], §7.2. 参照). ここで $\delta_{\chi,1_1}$ は Kronecker 記号である.

練習 2.16. 任意の $k\geq 1$ と法 N の原始的 Dirichlet 指標 χ について,

$$\begin{aligned} &E_k(z,\chi)-\chi(p)p^{k-1}E_k(pz,\chi)\\ &\qquad\qquad = 2^{-1}(1-\chi(p)p^{k-1})L(1-k,\chi)+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\sum_{0<d|n,(p,d)=1}\chi(d)d^{k-1}\right\}q^n \end{aligned}$$

を示せ. さらに <u>全ての</u>$k\geq 1$ と法 N の原始的 Dirichlet 指標 χ について

$$E_k(z,\chi)-\chi(p)p^{k-1}E_k(pz,\chi)\in M_k(\Gamma_0(\mathbf{p}),1_{\mathbf{p}})$$

を示せ ($k\leq 2$ の時は, [M], Theorem 7.2.16).

2.3. **Eisenstein 級数の p 進族.** 以下, a を偶数として原始的な Dirichlet 指標を

$$\chi := \begin{cases} \omega^a : (\mathbb{Z}_p/\mathbf{p}\mathbb{Z}_p)^\times \to \overline{\mathbb{Q}}^\times & \text{if } a\neq 0,\\ 1_1 & \text{if } a=0 \end{cases} \tag{2.2}$$

とする. 任意の $s\in\mathbb{Z}_p$ に対して $\mathbb{Z}_p[[X]]$ の元を

$$(1+X)^s := \sum_{m=0}^{\infty}\begin{pmatrix} s\\ m\end{pmatrix}X^m,$$

と定義する. ここで,

$$\begin{pmatrix} s\\ m\end{pmatrix} := \frac{s(s-1)\cdots(s-m+1)}{m(m-1)\cdots 1}.$$

練習 2.17. 任意の $s\in\mathbb{Z}_p$, $m\in\mathbb{Z}$ に対して

$$\begin{pmatrix} s\\ m\end{pmatrix}\in\mathbb{Z}_p$$

を示せ.

$(d,p)=1$ となる任意の $d\in\mathbb{Z}$ に対して

$$A_d(X) := d^{-1}(1+X)^{\frac{\log_p(\langle d\rangle)}{\log_p(u)}},$$

と定義する. $X=u^k-1$ と置くと

$$\begin{aligned} A_d(u^k-1) &= d^{-1}u^{k\frac{\log_p(\langle d\rangle)}{\log_p(u)}}\\ &= d^{-1}\langle d\rangle^k\\ &= \omega(d)^{-k}d^{k-1} \end{aligned}$$

となる. 次の定理を紹介する:

定理 2.18 (p-adic L-function の存在 [Wa], Theorem 5.11, Proposition 7.6, Theorem 7.10)**.** η を *Dirichlet* 指標とし, さらに偶指標 *(*すなわち, $\eta(-1)=1$*)* とする. $\mathfrak{f}_\eta$ をその導手 *(conductor)* として $\mathfrak{f}_\eta=\mathbf{p}^c p^{c\alpha}N \quad (c=0 \text{ or } 1,\ \alpha\geq 0,\ (N,p)=1)$ とする.

$$\eta_0:(\mathbb{Z}/\mathbf{p}^cN\mathbb{Z})^\times \hookrightarrow (\mathbb{Z}/\mathbf{p}^cN\mathbb{Z})^\times\times(1+\mathbf{p}^c\mathbb{Z}/1+\mathbf{p}^cp^{c\alpha}\mathbb{Z})=(\mathbb{Z}/\mathfrak{f}_\eta\mathbb{Z})^\times \xrightarrow{\eta} \overline{\mathbb{Q}}^\times$$

と置く. この時, ある

$$L_p(\eta)(X)\in\begin{cases}2\mathbb{Z}_p[\eta][[X]] & \text{if } \ \eta_0\neq 1_{\mathbf{p}^cN},\\ \frac{2}{X-\eta(u)+1}\mathbb{Z}_p[\eta][[X]] & \text{if } \ \eta_0=1_{\mathbf{p}^cN}\end{cases}$$

が存在して次を満たす*: Dirichlet* 指標 ξ に対して, $\mathfrak{f}_\xi=p^dp^{d\beta}M \ (d=0 \text{ or } 1,\ \beta\geq 0,\ (M,p)=1)$ とする時,

$$\epsilon:(\mathbb{Z}/\mathfrak{f}_\xi\mathbb{Z})^\times \xrightarrow{\text{自然な射影}} (1+\mathbf{p}^d\mathbb{Z}/1+\mathbf{p}^dp^{d\beta}\mathbb{Z})\hookrightarrow(\mathbb{Z}/\mathfrak{f}_\xi\mathbb{Z})^\times\xrightarrow{\xi}\overline{\mathbb{Q}}^\times$$

と置くと, 任意の $k\geq 1$ に対して,

$$L_p(\eta)(\xi(u)u^k-1)=(1-\eta\epsilon\omega^{-k}(p)p^{k-1})L(1-k,\eta\epsilon\omega^{-k})$$

が成立する. ここで, $\eta\epsilon=\omega^k$ の時は $\eta\epsilon\omega^{-k}(p)=1$ とする.

さて, 任意の $n>0$ に対して,

$$A_\chi(n;X):=\sum_{0<d|n,(p,d)=1}\chi(d)A_d(X)$$

と定義する. すると級数 $E(\chi)(X)\in\frac{1}{X}\mathbb{Z}_p[[X]][[q]]$ ($\chi\neq 1_1$ ならば $\in\mathbb{Z}_p[[X]][[q]]$) が以下のようにして定義できる:

$$E(\chi)(X):=2^{-1}L_p(\chi)+\sum_{n=1}^{\infty}A_\chi(n;X)q^n.$$

$E(\chi)$ について以下の定理が成立する.

定理 2.19. χ や a は *(2.2)* の通りとする. この時, $k\equiv a \mod \phi(\mathbf{p})$ を満たす任意の $k\geq 1$ に対して

$$E(\chi)(u^k-1)=E_k(z,1_1)-p^{k-1}E_k(pz,1_1)\in\mathcal{M}_k\left(\Gamma_0(\mathbf{p}),1_{\mathbf{p}};\mathbb{Q}\right)$$

が成立する. さらに,

$$\psi=\psi_0\cdot\epsilon:(\mathbb{Z}/\mathbf{p}p^\alpha\mathbb{Z})^\times=(\mathbb{Z}/\mathbf{p}\mathbb{Z})^\times\times(1+\mathbf{p}\mathbb{Z}/1+\mathbf{p}p^\alpha\mathbb{Z})\to\overline{\mathbb{Q}}^\times$$

を法 $p^\alpha\mathbf{p}$ の原始的な *Dirichlet* 指標とし,

$$\begin{aligned}\psi_0&:=\psi|_{(\mathbb{Z}/\mathbf{p}\mathbb{Z})^\times\times\{1\}},\\ \epsilon&:=\psi|_{\{1\}\times(1+\mathbf{p}\mathbb{Z}/1+\mathbf{p}p^\alpha\mathbb{Z})}\end{aligned}$$

と定義し, $\chi=\psi_0$ を仮定する. $\alpha>0$ または $k\not\equiv a \mod \phi(\mathbf{p})$ ならば

$$E(\chi)(\psi(u)u^k-1)=E_k(z;\psi\omega^{-k})\in\mathcal{M}_k\left(\Gamma_0(p^\alpha\mathbf{p}),\psi\omega^{-k};\mathbb{Q}[\psi]\right)$$

が成立する.

定理 2.20. χ や a は *(2.2)* の通りとする．

$$\psi = \psi_0 \cdot \epsilon : (\mathbb{Z}/p^{\alpha}\mathbf{p}\mathbb{Z})^{\times} = (\mathbb{Z}/\mathbf{p}\mathbb{Z})^{\times} \times (1+\mathbf{p}\mathbb{Z}/1+p^{\alpha}\mathbf{p}\mathbb{Z}) \to \overline{\mathbb{Q}}^{\times}$$

を法 $p^{\alpha}\mathbf{p}$ の原始的な *Dirichlet* 指標とし，

$$\psi_0 := \psi|_{(\mathbb{Z}/\mathbf{p}\mathbb{Z})^{\times}\times\{1\}},$$
$$\epsilon := \psi|_{\{1\}\times(1+\mathbf{p}\mathbb{Z}/1+p^{\alpha}\mathbf{p}\mathbb{Z})}$$

と定義し，$\chi = \psi_0$ と仮定する．$k \geq 1$ に対して

$$E(\psi_0)(\psi(u)u^k - 1) \in \begin{cases} (\psi(u)u^k-1)^{-1}\mathbb{Z}_{(p)}[\psi][[q]] & \textit{if } a = 0, \\ \mathbb{Z}_{(p)}[\psi][[q]] & \textit{if } a \neq 0 \end{cases}$$

が成立する．

練習 2.21. 定理 2.19, 2.20 を確かめよ．

3. §7.2. The projection to the ordinary part

3.1. **The ordinary idempotent.**

補題 3.1. R を剰余体が有限体である完備ネーター一局所環とし，A を R 上有限かつ単位元をもつ結合的代数とする．$x \in A$ とする時，極限

$$e := \lim_{n\to\infty} x^{n!}$$

が存在し

$$e^2 = e$$

が成り立つ．

Proof. A を $R[x]$ で置き換えることにより，A は可換環であるとしてよい．R は完備ネーター局所環であるから特にヘンゼル環であるため，A は R 上有限な完備ネーター局所環の直積と同型となる．従って $A = R$ と仮定して良い．R の極大イデアルを $\mathfrak{m}$ とする．$x \in \mathfrak{m}$ とすると明らかに e は存在し，$e = 0$ となる．$x \notin \mathfrak{m}$ の時，m を正の整数として $\overline{x}$ を $(R/\mathfrak{m}^m)^{\times}$ における像とする．$(R/\mathfrak{m}^m)^{\times}$ は位数有限の群であるから

$$\lim_n \overline{x}^{n!}$$

は存在し 1 に収束する．R は完備なので結局 e も存在し $e = 1$ となる．後半の主張は上の証明から明らかである． □

系 3.2. R を剰余体が有限体である完備ネーター局所環とし，M を有限 R 加群とする．この時，任意の $x \in End_R(M)$ について，$e := \lim_{n\to\infty} x^{n!}$ が存在して $e^2 = e$ が成立する．さらに x は eM を保ち，$x|_{eM} : eM \to eM$ は同型である．

練習 3.3. 上の系を証明せよ．

$T(p) \in \mathbf{H}_k(\Gamma_0(p^{\alpha}), \chi; \mathbb{Z}_p[\chi])$ に対して

$$e := \lim_n T(p)^{n!} \in \mathbf{H}_k(\Gamma_0(p^{\alpha}), \chi; \mathbb{Z}_p[\chi])$$

と定義する． 系 3.2 により極限 e が存在することが分かる． 任意の $\mathbb{Z}_p[\chi]$ 係数保型形式 $f \in \mathcal{M}_k(\Gamma_0(p^{\alpha}), \chi; \mathbb{Z}_p[\chi])$ に対して

$$f\text{: ordinary} \underset{\text{def}}{\iff} f|e = f$$

と定義する．また,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{H}_k^{ord}(\Gamma_0(p^\alpha),\chi;\mathbb{Z}_p[\chi]) &:= e\mathbf{H}_k(\Gamma_0(p^\alpha),\chi;\mathbb{Z}_p[\chi]),\\
\mathbf{h}_k^{ord}(\Gamma_0(p^\alpha),\chi;\mathbb{Z}_p[\chi]) &:= e\mathbf{h}_k(\Gamma_0(p^\alpha),\chi;\mathbb{Z}_p[\chi]),\\
\mathcal{M}_k^{ord}\left(\Gamma_0(p^\alpha),\chi;\mathbb{Z}_p[\chi]\right) &:= \mathcal{M}_k\left(\Gamma_0(p^\alpha),\chi;\mathbb{Z}_p[\chi]\right)|e,\\
\mathcal{S}_k^{ord}\left(\Gamma_0(p^\alpha),\chi;\mathbb{Z}_p[\chi]\right) &:= \mathcal{S}_k\left(\Gamma_0(p^\alpha),\chi;\mathbb{Z}_p[\chi]\right)|e
\end{aligned}
$$

と定義する．定理 2.11 から以下が分かる:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p[\chi]}\left(\mathbf{H}_k^{ord}(\Gamma_0(p^\alpha),\chi;\mathbb{Z}_p[\chi]),\mathbb{Z}_p[\chi]\right) &\cong \mathcal{M}_k^{ord}\left(\Gamma_0(p^\alpha),\chi;\mathbb{Z}_p[\chi]\right),\\
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p[\chi]}\left(\mathbf{h}_k^{ord}(\Gamma_0(p^\alpha),\chi;\mathbb{Z}_p[\chi]),\mathbb{Z}_p[\chi]\right) &\cong \mathcal{S}_k^{ord}\left(\Gamma_0(p^\alpha),\chi;\mathbb{Z}_p[\chi]\right).
\end{aligned}
$$

3.2. ordinary な保型形式の例.

$\chi:(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbf{p}\mathbb{Z})^\times\to\mathbb{Z}_p[\chi]^\times$ を法 $\mathbf{p}p^\alpha$ の原始的な Dirichlet 指標とする．この時, 次が成立する:

$$E_k(\chi)|T(p)=\sigma_{k-1,\chi}(p)E_k(\chi)=E_k(\chi).$$

練習 3.4.

$$E_k(\chi)|T(p)=\sigma_{k-1,\chi}(p)E_k(\chi)=E_k(\chi)$$

が成立することを命題 2.9 を用いて示せ.

従って次を得る:

$$E_k(\chi)|e=E_k(\chi).$$

故に, $E_k(\chi)$ は ordinary である.

$\beta\geq\alpha$ とする時, $\mathcal{M}_k^{ord}(\Gamma_0(\mathbf{p}p^\beta),\chi;\mathbb{Z}_p[\chi])\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p$ は次のような構造を持つことが知られている.

命題 3.5. *χ を法 $\mathbf{p}p^\alpha$ の原始的な Dirichlet 指標とする。この時 $k\geq 2$, $\beta\geq\alpha$ に対して, 次が成立する:*

$$\mathcal{M}_k^{ord}(\Gamma_0(\mathbf{p}p^\beta),\chi;\mathbb{Z}_p[\chi])\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p=\mathbb{Q}_p[\chi]\cdot E_k(\chi)\oplus\mathcal{S}_k^{ord}(\Gamma_0(\mathbf{p}p^\beta),\chi;\mathbb{Z}_p[\chi])\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p.$$

4. 群コホモロジーと Eichler-志村同型

この章は次章で用いられる群コホモロジーと保型形式の関係についてまとめたものである．次章を読むに当たって必要に応じて参照してもらいたい.

4.1. 群コホモロジーの一般論.

定義 4.1 (群コホモロジー)**.** Γ を群とし, M を右 $\mathbb{Z}[\Gamma]$ 加群とする．この時

$$C^n(\Gamma,M):=\{f:\Gamma^n\longrightarrow M:\ \text{写像}\}$$

とし

$$d^n:C^n(\Gamma,M)\longrightarrow C^{n+1}(\Gamma,M)$$

を $f\in C^n(\Gamma,M)$ に対して

$$
\begin{aligned}
d^nf(\gamma_1,\dots,\gamma_{n+1}) := f(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n)\gamma_{n+1} &+ \sum_{r=0}^{n-1}(-1)^{r+1}f(\gamma_1,\dots,\gamma_{n-r}\gamma_{n-r+1},\dots,\gamma_{n+1})\\
&+(-1)^{n+1}f(\gamma_2,\dots,\gamma_{n+1})
\end{aligned}
$$

と定義する. この時, 任意の n に対して

$$d^{n+1} \circ d^n = 0$$

が成立し, $\{(C^n, d^n)\}_i$ は複体を成す. この複体から定まる n 次コホモロジー群を

$$H^n(\Gamma, M)$$

と書き, 群コホモロジーと呼ぶ.

注意 4.2. 次の同型が成立する:

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}[\Gamma]}(\mathbb{Z}, M) \cong H^n(\Gamma, M).$$

すなわち, $M \mapsto H^n(\Gamma, M)$ は左完全関手

$$(\text{右 }\Gamma\text{-Mod}) \to (\mathrm{Ab}); M \mapsto M^\Gamma := \left\{x \in M \middle| x\gamma = x \text{ for any } \gamma \in \Gamma\right\}$$

から定まる n 次右導来関手である.

部分群の群コホモロジーを考えると以下のような制限写像が定義される:

定義 4.3. Γ, Γ' を群とし $\Gamma' \subset \Gamma$ とする. M を右 $\mathbb{Z}[\Gamma]$ 加群とする. この時, 定義域の制限によって定まる自然な複体の準同型

$$C^n(\Gamma, M) \longrightarrow C^n(\Gamma', M); f \mapsto f|_{\Gamma'^n}$$

から導かれるコホモロジーの準同型を

$$\mathrm{res}^{\Gamma}_{\Gamma'} : H^n(\Gamma, M) \longrightarrow H^n(\Gamma', M)$$

と定義する.

群コホモロジーの Hecke 作用素を以下のように定義する:

定義 4.4 (Hecke 作用素)**.** $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ を群とし, $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \Gamma_3$ なる関係をもつとする. さらに $\sigma \in \Gamma_3$ に対して以下を仮定する (Γ_1, $\sigma^{-1}\Gamma_2\sigma$ は commensurable であるという).

$$[\Gamma_1 : \Gamma_1 \cap \sigma^{-1}\Gamma_2\sigma], [\sigma^{-1}\Gamma_2\sigma : \Gamma_1 \cap \sigma^{-1}\Gamma_2\sigma] < \infty.$$

M を右 $\mathbb{Z}[\Gamma_1, \Gamma_2, \sigma]$ 加群とする (すなわち, M は Γ_1, Γ_2, σ で生成される, Γ_3 の部分半群による右作用をもつとする). この時, 群コホモロジー間の射

$$[\Gamma_2\sigma\Gamma_1] : H^n(\Gamma_2, M) \longrightarrow H^n(\Gamma_1, M)$$

が次のように定義される. まず, 左剰余類集合

$$\Gamma_2 \backslash \Gamma_2\sigma\Gamma_1$$

の代表系を $\{\sigma_j\}_{j=1}^m$ とし, 任意の $\gamma \in \Gamma_1$ に対して

$$\Gamma_2\sigma_j\gamma^{-1} = \Gamma_2\sigma_{j(\gamma)}$$

として $\sigma_{j(\gamma)}$ を定める時, $[f] \in H^n(\Gamma_2, M)$ に対して ($f \in C^n(\Gamma_2, M)$),

$$[\Gamma_2\sigma\Gamma_1]([f]) := \left[(\gamma_i)_{i=1}^n \mapsto \sum_{j=1}^m f\left((\sigma_{j(\gamma_i)}\gamma_i\sigma_j^{-1})_{i=1}^n \right) \sigma_j \right]$$

と定義し,

$$[f] \big| [\Gamma_2\sigma\Gamma_1] := [\Gamma_2\sigma\Gamma_1]([f])$$

と書く．このようにして定まる準同型を総称して Hecke 作用素と呼ぶことにする．

練習 4.5. 定義 4.4 が well-defined であることを示せ (下の注意 4.6 も参照).

注意 4.6. 記号は定義 4.3, 4.4 の通りとする．制限写像及び $[\Gamma_2\sigma\Gamma_1]$ はそれぞれ 0 次右導来関手間の自然変換

$$\begin{array}{lll} M^{\Gamma} \hookrightarrow M^{\Gamma'} & ; x \mapsto x & (M \text{ は右 } \mathbb{Z}[\Gamma] \text{ 加群}), \\ N^{\Gamma_2} \to N^{\Gamma_1} & ; x \mapsto \displaystyle\sum_{j=1}^{m} x\sigma_j & (N \text{ は右 } \mathbb{Z}[\Gamma_1, \Gamma_2, \sigma] \text{ 加群}) \end{array}$$

から一意的に拡張される右導来関手の自然変換である．

4.2. $\Gamma_0(\mathbf{p}p^\alpha)$ **の群コホモロジーと Eichler-志村同型.** 以下では Γ は $\Gamma_0(\mathbf{p}p^\alpha)$ なる形の群のみを考える（より一般の群でも同様の定理が成立する．[S], Chapter 8)．また

$$\Delta(\mathbf{p}p^\alpha) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}) \middle| c \in \mathbf{p}p^\alpha\mathbb{Z}, (a,p) = 1, ad - bc > 0 \right\}$$

であることを思い出す．$\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ に対して Γ を分数変換で作用させるとき, $s \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ の固定部分群を Γ_s とする．

定義 4.7. M を Γ 加群とする．この時パラボリック群コホモロジーを

$$H^1_P(\Gamma, M) := \mathrm{Ker}\left(\prod_{s \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})} res^{\Gamma}_{\Gamma_s} : H^1(\Gamma, M) \longrightarrow \prod_{s \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})} H^1(\Gamma_s, M) \right)$$

によって定義する．

M を右 $\Delta(\mathbf{p}p^\alpha)$ 加群とする．任意の素数 l に対して

$$T(l) := \left[\Gamma_0(\mathbf{p}p^\alpha) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & l \end{pmatrix} \Gamma_0(\mathbf{p}p^\alpha) \right] : H^n(\Gamma_0(\mathbf{p}p^\alpha), M) \longrightarrow H^n(\Gamma_0(\mathbf{p}p^\alpha), M),$$

$$T(l,l) = \begin{cases} \left[\Gamma_0(\mathbf{p}p^\alpha) \begin{pmatrix} l & 0 \\ 0 & l \end{pmatrix} \Gamma_0(\mathbf{p}p^\alpha) \right] & \text{if } l \neq p, \\ 0 & \text{if } l = p \end{cases}$$

と定義する．さらに, $T(1) = id$ とし, $m > 1$ に対して $T(l^m)$ を帰納的に

$$T(l^m) := T(l)T(l^{m-1}) - lT(l,l)T(l^{m-2})$$

によって定め, 任意の $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して, $n = p_1^{m_1} \dots p_r^{m_r}$ と素因数分解とするとき

$$T(n) := \prod_{j=1}^{r} T(p_j^{m_j})$$

と定義する．ここで, l_1, l_2 を異なる素数とする時, $T(l_1^{m_1})$ と $T(l_2^{m_2})$ は可換であることが知られていることに注意する．

注意 4.8.

$$T(l^m) = \left[\Gamma_0(\mathbf{p}p^\alpha) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & l^m \end{pmatrix} \Gamma_0(\mathbf{p}p^\alpha) \right]$$

である．

定義 4.9 ($L(n,\psi;R)$ の定義)**.** R を環, $\psi : \Delta(\mathbf{p}p^\alpha) \longrightarrow R^\times$ を半群の準同型とする. この時, 右 $\Delta(\mathbf{p}p^\alpha)$ 加群 $L(n,\psi;R)$ を

$$L(n,\psi;R) := \bigoplus_{i=0}^{n} RX^iY^{n-i} \otimes \psi,$$

すなわち, R 加群としては, R 係数 2 変数 n 次斉次多項式全体の空間であり, $f(X,Y)$ を R 係数 2 変数 n 次斉次多項式として $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Delta(\mathbf{p}p^\alpha)$ とした時に,

$$f(X,Y)\gamma := \psi(\gamma)f(aX+bY, cX+dY)$$

によって $\Delta(\mathbf{p}p^\alpha)$ の右作用を定める.

$k \geq 2$, χ を法 $\mathbf{p}p^\alpha$ の Dirichlet 指標とする. $\gamma \in \Gamma$, $z \in \mathscr{H}$, $f \in \mathcal{M}_k(\Gamma,\chi) \oplus \mathcal{S}_k(\Gamma,\overline{\chi})^c$ に対して

$$\phi_z(f)(\gamma) := \int_z^{\gamma^{-1}z} f(w)(X-wY)^{k-2}dw \in L(k-2,\chi;\mathbb{C})$$

とする. ここで $\overline{\chi}$ は χ の複素共役であり,

$$\mathcal{S}_k(\Gamma,\overline{\chi})^c := \left\{ \overline{f(-\overline{z})} \;\middle|\; f \in \mathcal{S}_k(\Gamma,\overline{\chi}) \right\}$$

と定義する. また,

$$\chi(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = \chi(a)$$

により χ を $\Delta(\mathbf{p}p^\alpha)$ 上の準同型とみなしている.

補題 4.10. 記号を上の通りとする. この時, $\phi_z(f) \in C^1(\Gamma, L(k-2,\chi;\mathbb{C}))$ に関して次が成立する:

$$\begin{aligned} \phi_z(f) &\in \mathrm{Ker}(d^1) && \textit{for } z \in \mathscr{H}, \\ \phi_z(f) - \phi_{z'}(f) &\in \mathrm{Im}(d^0) && \textit{for } z, z' \in \mathscr{H}, \\ \phi_z(f|T(n)) - \phi_z(f)|T(n) &\in \mathrm{Im}(d^0) && \textit{for } n > 0. \end{aligned}$$

練習 4.11. 上の補題を証明せよ.

上の補題から, 写像

$$\Phi : \mathcal{M}_k(\Gamma,\chi) \oplus \mathcal{S}_k(\Gamma,\overline{\chi})^c \longrightarrow H^1(\Gamma, L(k-2,\chi;\mathbb{C})); f \mapsto \phi_z(f)$$

は z の取り方によらない well-defined な $\mathbb{Z}[\{T(l)\}_l]$ 加群としての準同型である.

定理 4.12 (Eichler-志村同型)**.** 上の準同型 Φ は同型写像である. さらに

$$\Phi(\mathcal{S}_k(\Gamma,\chi) \oplus \mathcal{S}_k(\Gamma,\overline{\chi})^c) = H^1_P(\Gamma, L(k-2,\chi;\mathbb{C}))$$

が成立する.

最後に, 本講演で使う重要な命題を二つ紹介しておく.

命題 4.13 ([S], Proposition 8.6)**.** 自然な射を

$$j : H^1(\Gamma, L(n,\chi;\mathbb{Z}[\chi])) \longrightarrow H^1(\Gamma, L(n,\chi;\mathbb{Q}[\chi]))$$

とする時, $\mathrm{Ker}(j)$ は有限アーベル群であり

$$\mathrm{Im}(j) \otimes_{\mathbb{Z}[\chi]} \mathbb{Q}[\chi] \cong H^1(\Gamma, L(n,\chi;\mathbb{Q}[\chi]))$$

となる.

命題 4.14 ([LFE], Chapter 6, Proposition 1. + α)**.** 任意の右 $\mathbb{Z}_{(p)}[\Gamma]$ 加群 M に対して

$$H^2(\Gamma, M) = 0$$

が成立する.

5. ORDINARY PART の次元の不変性

5.1. **主定理と補題.** この章では次の定理を証明する.

定理 5.1. *任意の $k \geq 2$, 法 $\mathbf{p}p^\alpha$ の Dirichlet 指標 χ に対して*

$$\begin{aligned}
\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p[\chi]}\mathbf{H}_k^{ord}(\Gamma_0(\mathbf{p}p^\alpha), \chi\omega^{-k}; \mathbb{Z}_p[\chi]) &= \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p[\chi]}\mathcal{M}_k^{ord}\left(\Gamma_0(\mathbf{p}p^\alpha), \chi\omega^{-k}; \mathbb{Z}_p[\chi]\right) \\
&= \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{M}_2^{ord}\left(\Gamma_0(\mathbf{p}), \chi_0\omega^{-2}; \mathbb{Z}_p\right), \\
\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p[\chi]}\mathbf{h}_k^{ord}(\Gamma_0(\mathbf{p}p^\alpha), \chi\omega^{-k}; \mathbb{Z}_p[\chi]) &= \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p[\chi]}\mathcal{S}_k^{ord}\left(\Gamma_0(\mathbf{p}p^\alpha), \chi\omega^{-k}; \mathbb{Z}_p[\chi]\right) \\
&= \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{S}_2^{ord}\left(\Gamma_0(\mathbf{p}), \chi_0\omega^{-2}; \mathbb{Z}_p\right)
\end{aligned}$$

が成立する. ここで χ_0 は合成

$$\chi_0 : (\mathbb{Z}/\mathbf{p}\mathbb{Z})^\times \hookrightarrow (\mathbb{Z}/\mathbf{p}\mathbb{Z})^\times \times (1+\mathbf{p}\mathbb{Z}/1+\mathbf{p}p^\alpha\mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}/\mathbf{p}p^\alpha\mathbb{Z})^\times \xrightarrow{\chi} \overline{\mathbb{Q}}^\times$$

によって定義される.

証明の前に二つの補題を証明する:

補題 5.2. *R を剰余体が有限である完備ネーター局所環とし, $\psi : \Delta(\mathbf{p}p^\alpha) \longrightarrow R^\times$ を半群の準同型とする. この時, 任意の $\beta \geq \alpha$ に対して, 制限写像*

$$eH^1(\Gamma_0(\mathbf{p}p^\alpha), L(n,\psi;R)) \xrightarrow{\mathrm{res}^{\Gamma_0(\mathbf{p}p^\alpha)}_{\Gamma_0(\mathbf{p}p^\beta)}} eH^1\left(\Gamma_0(\mathbf{p}p^\beta), L(n,\psi;R)\right)$$

は同型である. ここで $e := \lim_n T(p)^{n!}$ である (系 3.2 も参照).

Proof. 一般に $r \geq \beta - \alpha$ とすると次が成立する (下の練習 5.3):

$$\Gamma_0(\mathbf{p}p^\beta)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^r \end{pmatrix}\Gamma_0(\mathbf{p}p^\alpha) = \bigsqcup_{c \in \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}} \Gamma_0(\mathbf{p}p^\beta)\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & p^r \end{pmatrix}.$$

この両側剰余類分解が誘導する射 (定義 4.4)

$$\left[\Gamma_0(\mathbf{p}p^\beta)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^r \end{pmatrix}\Gamma_0(\mathbf{p}p^\alpha)\right] : H^1(\Gamma_0(\mathbf{p}p^\beta), L(n,\psi;R)) \longrightarrow H^1(\Gamma_0(\mathbf{p}p^\alpha), L(n,\psi;R))$$

を考えると次の等式が導かれる (下の練習 5.4):

$$\begin{aligned}
\mathrm{res}^{\Gamma_0(\mathbf{p}p^\alpha)}_{\Gamma_0(\mathbf{p}p^\beta)} \circ \left[\Gamma_0(\mathbf{p}p^\beta)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^r \end{pmatrix}\Gamma_0(\mathbf{p}p^\alpha)\right] &= T(p^r), \\
\left[\Gamma_0(\mathbf{p}p^\beta)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^r \end{pmatrix}\Gamma_0(\mathbf{p}p^\alpha)\right] \circ \mathrm{res}^{\Gamma_0(\mathbf{p}p^\alpha)}_{\Gamma_0(\mathbf{p}p^\beta)} &= T(p^r).
\end{aligned}$$

故に e を作用させると, 系 3.2 により求める同型が証明される. $\square$

練習 5.3. $r \geq \beta - \alpha \geq 0$ とする時,

$$\Gamma_0(\mathbf{p}p^\beta)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^r \end{pmatrix}\Gamma_0(\mathbf{p}p^\alpha) = \bigsqcup_{c\in\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}} \Gamma_0(\mathbf{p}p^\beta)\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & p^r \end{pmatrix}$$

を証明せよ．（ヒント: $\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^r \end{pmatrix}$ とする．

$$\Gamma_0(\mathbf{p}p^\beta)\backslash\Gamma_0(\mathbf{p}p^\beta)\big(\sigma\Gamma_0(\mathbf{p}p^\alpha)\sigma^{-1}\big)$$

を考えよ).

練習 5.4. 補題 5.2 の証明における等式

$$\mathrm{res}^{\Gamma_0(\mathbf{p}p^\alpha)}_{\Gamma_0(\mathbf{p}p^\beta)} \circ \left[\Gamma_0(\mathbf{p}p^\beta)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^r \end{pmatrix}\Gamma_0(\mathbf{p}p^\alpha)\right] = T(p^r),$$

$$\left[\Gamma_0(\mathbf{p}p^\beta)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^r \end{pmatrix}\Gamma_0(\mathbf{p}p^\alpha)\right] \circ \mathrm{res}^{\Gamma_0(\mathbf{p}p^\alpha)}_{\Gamma_0(\mathbf{p}p^\beta)} = T(p^r)$$

を証明せよ.

補題 5.5. $\psi : \Delta(\mathbf{p}p^\alpha) \longrightarrow {\mathbb{F}_p}^\times$ を半群の準同型とし, $\varpi : \Gamma_0(\mathbf{p}p^\alpha) \xrightarrow{\omega} \mathbb{Z}_p[\chi]^\times \longrightarrow \mathbb{F}_p$ とする．また, <u>右 $\Gamma_0(\mathbf{p}p^\alpha)$ 加群の射</u>*(*下の練習 *5.6* も参照*)* を

$$i : L(n,\psi;\mathbb{F}_p) \longrightarrow L(0,\psi\varpi^n;\mathbb{F}_p); f(X,Y) \mapsto f(1,0)$$

とする．この時, i から誘導される群コホモロジーの射の *ordinary* 部分

$$ei_* : eH^1(\Gamma_0(\mathbf{p}p^\alpha), L(n,\psi;\mathbb{F}_p)) \longrightarrow eH^1(\Gamma_0(\mathbf{p}p^\alpha), L(0,\psi\varpi^n;\mathbb{F}_p))$$

は同型である.

Proof. $\Gamma = \Gamma_0(\mathbf{p}p^\alpha)$ とおく．完全列

$$0 \to ker(i) \to L(n,\psi;\mathbb{F}_p) \xrightarrow{i} L(0,\psi\varpi^n;\mathbb{F}_p) \to 0$$

から次の完全列が得られる:

$$H^1(\Gamma,\ker(i)) \to H^1(\Gamma, L(n,\psi;\mathbb{F}_p)) \xrightarrow{i_*} H^1(\Gamma, L(0,\psi\varpi^n;\mathbb{F}_p)) \to H^2(\Gamma,\ker(i)).$$

従って $q = 1,2$ に対して $eH^q(\Gamma,\ker(i)) = 0$ を示せばよいが, 実際には任意の q について示される．実際, $\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$ とすると $T(p) = [\Gamma_0(\mathbf{p}p^\alpha)\sigma\Gamma_0(\mathbf{p}p^\alpha)]$ であり

$$\ker(i) = \langle X^{n-1}Y, \ldots, Y^n\rangle_{\mathbb{F}_p}$$

であるので $\ker(i)$ において σ は 0 射である．$T(p)$ の定義 (定義 4.4) から直ちに 任意の q に対して

$$eH^q(\Gamma,\ker(i)) = 0$$

となる．故に ei_* は同型射である □

練習 5.6. $\mathcal{O}$ を $\mathbb{Z}_p$ 上有限平坦代数とし, $\psi_1,\psi_2 : \Delta(\mathbf{p}p^\alpha) \longrightarrow \mathcal{O}^\times$ を半群の準同型とする．$n_1 \neq n_2$ ならば,

$$Hom_{\Gamma_0(\mathbf{p}p^\alpha)}(L(n_1,\psi_1;\mathcal{O}), L(n_2,\psi_2;\mathcal{O})) = \{0\}$$

であることを示せ (標数 0 の世界ではウェイトを動かすような操作はできないことを表している).

5.2. 主定理 (定理 5.1) の証明.

PROOF. $\mathbb{Z}_p[\chi]$ の素元を一つ固定し, ϖ とする. Hecke 環と保型形式の rank の等式は定理 2.11 より直ちに従うから, 残りの等式のみ示す. また命題 3.5 より, 任意の $\beta \geq c(\chi)$ ($c(\chi)$ は χ の導手の p の指数) に対して,

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p[\chi]}\mathcal{S}_k^{ord}\left(\Gamma_0(\mathbf{p}p^\beta),\chi\omega^{-k};\mathbb{Z}_p[\chi]\right) = \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p[\chi]}\mathcal{M}_k^{ord}\left(\Gamma_0(\mathbf{p}p^\beta),\chi\omega^{-k};\mathbb{Z}_p[\chi]\right) - 1$$

であるから,

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p[\chi]}\mathcal{M}_k^{ord}\left(\Gamma_0(\mathbf{p}p^\alpha),\chi\omega^{-k};\mathbb{Z}_p[\chi]\right) = \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{M}_2^{ord}\left(\Gamma_0(\mathbf{p}),\chi_0\omega^{-2};\mathbb{Z}_p\right)$$

のみを示せばよい. Eichler-志村同型 (定理 4.12) 及び, 命題 3.5, 4.13 により, 任意の $k \geq 2$ と法 $\mathbf{p}p^\beta$ の Dirichlet 指標 η に対して

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p[\eta]}(eH^1(\Gamma_0(\mathbf{p}p^\beta),L(k-2,\eta;\mathbb{Z}_p[\eta])) = 2\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p[\eta]}\mathcal{M}_k^{ord}(\Gamma_0(\mathbf{p}p^\beta),\eta;\mathbb{Z}_p[\eta]) - 1$$

が成立するから, 群コホモロジーに移って証明を行う. $n = k-2$, $\psi := \chi\omega^{-n-2}$ とし, $\Gamma := \Gamma_0(p^\alpha\mathbf{p})$ と置く. 完全列

$$0 \longrightarrow L(n,\psi;\mathbb{Z}_p[\chi]) \xrightarrow{\varpi} L(n,\psi;\mathbb{Z}_p[\chi]) \longrightarrow L(n,\overline{\psi};\mathbb{F}_p) \longrightarrow 0$$

から次の完全列が得られる (ここで, $\overline{\psi}:\Gamma \overset{\psi}{\to} \mathbb{Z}_p[\chi]^\times \to {\mathbb{F}_p}^\times$ と定義する):

$$H^0(\Gamma,L(n,\overline{\psi};\mathbb{F}_p)) \longrightarrow H^1(\Gamma,L(n,\psi;\mathbb{Z}_p[\chi]))[\varpi] \longrightarrow 0.$$

ここで $(\cdot)[\varpi] := \left\{x \in (\cdot)\middle|\varpi x = 0\right\}$ とおいた. 次の $\mathbf{F}_p$ 系巣での等式

$$\sum_{c=0}^{p-1} X^{n-j}Y^j\begin{pmatrix}1 & c\\ 0 & p\end{pmatrix} = \sum_{c=1}^{p} p^j(X+cY)^{n-j}Y^j = \begin{cases}\in \langle X^{n-1}Y,\ldots,Y^n\rangle_{\mathbb{F}_p} & \text{if } j=0,\\ 0 & \text{if } j>0\end{cases}$$

に注意すると, 定義 4.4 及び練習 5.3 により, $H^0(\Gamma,L(n,\overline{\psi};\mathbb{F}_p))|T(p)^2 = 0$ であるから特に

$$eH^0(\Gamma,L(n,\overline{\psi};\mathbb{F}_p)) = 0$$

であり, したがって

$$eH^1(\Gamma,L(n,\psi;\mathbb{Z}_p[\chi]))[\varpi] = 0$$

となる. これは $eH^1(\Gamma,L(n,\psi;\mathbb{Z}_p[\chi]))$ がねじれを持たないことを示しており, 最初の完全列から導かれる完全列

$$0 \longrightarrow H^1(\Gamma,L(n,\psi;\mathbb{Z}_p[\chi]))\otimes_{\mathbb{Z}_p[\chi]}\mathbb{F}_p \longrightarrow H^1(\Gamma,L(n,\overline{\psi};\mathbb{F}_p)) \longrightarrow H^2(\Gamma,L(n,\psi;\mathbb{Z}_p[\chi]))$$

を考えると, $H^2(\Gamma,L(n,\psi;\mathbb{Z}_p[\chi])) = 0$ (命題 4.14) より,

$$\dim_{\mathbb{F}_p}eH^1(\Gamma,L(n,\overline{\psi};\mathbb{F}_p)) = \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p[\chi]}eH^1(\Gamma,L(n,\psi;\mathbb{Z}_p[\chi])) \tag{5.1}$$

が分かる. 補題 5.5 により

$$\dim_{\mathbb{F}_p}eH^1(\Gamma,L(n,\overline{\psi};\mathbb{F}_p)) = \dim_{\mathbb{F}_p}eH^1(\Gamma,L(0,\overline{\psi}\overline{\omega}^n;\mathbb{F}_p))$$

であり, さらに $\Gamma/\Gamma_1(\mathbf{p}p^\beta) \longrightarrow \Gamma_0(\mathbf{p})/\Gamma_1(\mathbf{p})$ の核は p 群であるから $\overline{\psi}\overline{\omega}^n$ は $\Gamma_0(\mathbf{p})$ を経由することが分かり,

$$\overline{\psi}\overline{\omega}^n = \overline{\chi}_0\overline{\omega}^{-2}$$

となる (ここで $\overline{\chi}_0:\Gamma_0(\mathbf{p}) \overset{\chi_0}{\to} \mathbb{Z}_p[\chi]^\times \to \mathbb{F}_p$ と定義する). 故に, 補題 5.2 により

$$\dim_{\mathbb{F}_p}eH^1(\Gamma,L(0,\overline{\psi}\overline{\omega}^n;\mathbb{F}_p)) \quad = \quad \dim_{\mathbb{F}_p}eH^1(\Gamma_0(\mathbf{p}),L(0,\overline{\chi}_0\overline{\omega}^{-2};\mathbb{F}_p)) \tag{5.2}$$

となる. 等式 (5.1) の証明は n を 0, Γ を $\Gamma_0(\mathbf{p})$, そして群準同型 ψ を $\psi\omega^n = \chi_0\omega^{-2}$ でそれぞれ置き換えても通用するから, (5.2) と合わせると,

$$\dim_{\mathbb{F}_p} eH^1(\Gamma, L(0, \overline{\psi}\overline{\omega}^n; \mathbb{F}_p)) = \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p[\chi]} eH^1(\Gamma_0(\mathbf{p}), L(0, \chi_0\omega^{-2}; \mathbb{Z}_p[\chi]))$$

が分かる. 以上をまとめると,

$$\begin{aligned}\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p[\chi]} eH^1(\Gamma, L(n, \psi; \mathbb{Z}_p[\chi])) &= \dim_{\mathbb{F}_p} eH^1(\Gamma, L(n, \overline{\psi}; \mathbb{F}_p)) \\ &= \dim_{\mathbb{F}_p} eH^1(\Gamma, L(0, \overline{\chi}_0\overline{\omega}^{-2}; \mathbb{F}_p)) \\ &= \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p} eH^1(\Gamma_0(\mathbf{p}), L(0, \chi_0\omega^{-2}; \mathbb{Z}_p))\end{aligned}$$

が得られる. □

References

[LFE] H. Hida, *Elementary theory of L-functions and Eisenstein series*, London Mathematical Society Student Texts 26. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[M] T. Miyake, *Modular Forms*, Springer-Verlag, 2006.

[S] G. Shimura, *Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions*, Princeton University Press, 1971.

[Wa] Lawrence C. Washington, *Introduction to Cyclotomic Fields*, Second Edition, Graduate Texts in Mathematics, ematics 83, Springer-Verlag, New York, 1997, xiv+487 pp.