H. HIDA, "ELEMENTARY THEORY OF L-FUNCTIONS AND EISENSTEIN SERIES" 第 7.3 節と第 7.4 節の概説

小澤友美 (東北大学大学院理学研究科数学専攻博士後期課程 3 年) *

0. 本稿を読み進める/利用する上での留意事項

0.1. **本稿の位置付け，報告集原稿との差異.** 本稿は第 24 回 (2016 年度) 整数論サマースクールにおける，H. Hida, "Elementary Theory of L-functions and Eisenstein Series" ([LFE]) の第 7.3 節と第 7.4 節の概説の 補助資料 である．概説講演では時間の都合上，原典から要点を抜き出して説明するため，[LFE] で扱われていても講演では触れない事柄がある．本稿はあくまで講演の補助資料であるとの立場から，参加者が講演中やその前後に必要な情報を探し出せることを最優先にし，基本的に講演中に触れる事柄の説明に留めた．割愛せざるを得なかった事柄の一部は，練習問題として収録した．

サマースクール報告集では [LFE] の設定や議論の順序に忠実に沿い，必要に応じて原典に書いていない説明を付け加えながら詳細に解説する予定である．

0.2. **本稿の大まかな内容.**

0.2.1. 前半部 ([LFE] §7.3 に相当する部分). 第 1 節で Wiles によって [Wi1] で定式化された "Λ-adic forms" を紹介する．第 2 節では [石川] 定理 5.1 で紹介された

"$\mathcal{M}_k^{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(\mathbf{p}p^\alpha), \chi\omega^{-k}; \mathbb{Z}_p[\chi])$ の自由 $\mathbb{Z}_p[\chi]$ 加群としての階数が
2 以上の重さ k と指標 χ の p 冪部分に依らず一定である"

([LFE] の Theorem 7.2.1 (§7.2, p.202)) という主張を Λ-adic forms の空間の Control Theorem (定理 2.2) として定式化し直す．第 3 節では Λ-adic Hecke algebra, 正規化された Λ-adic Hecke 固有形式についてその定義や基本的な性質を紹介する．

0.2.2. 後半部 ([LFE] §7.4 に相当する部分). 第 4 節では，二つの保型形式 f と h に対して定まる Rankin product L-関数 $D(s, f, h)$ ([LFE] §5.4，特に Corollary 5.4.3; p.156) について，特殊値の代数性などを復習する．第 5 節と第 6 節で，この特殊値の代数的な部分を p-進的に補間する．第 5 節では f を Λ-adic form に置き換えた 1 変数 p-進 L-関数を，第 6 節では f と h をそれぞれ Λ-adic forms に置き換えた 2 変数 p-進 L-関数を構成する．

0.3. **記法と文献の引用について.** 記号については基本的に [石川] を踏襲する．p を素数，$W = 1 + \mathbf{p}\mathbb{Z}_p$ を $\mathbb{Z}_p^\times$ の主単数群として，$u = 1 + \mathbf{p} \in W$ とおく．Teichmüller 指標を $\omega : \mathbb{Z}_p^\times \to (\mathbb{Z}/\mathbf{p}\mathbb{Z})^\times \hookrightarrow \mathbb{Z}_p^\times$ で表し，$x \in \mathbb{Z}_p^\times$ に対し $\langle x \rangle = x\omega(x)^{-1} \in W$ とおく．ϕ を Euler 関数，$\mathbb{Z}_p^\times$ に含まれる 1 の $\phi(\mathbf{p})$ 乗根の集合を $\mu_{\phi(\mathbf{p})}$ とすると，ω を $\mu_{\phi(\mathbf{p})}$ に制限したものは $(\mathbb{Z}/\mathbf{p}\mathbb{Z})^\times$ への同型であり，その逆写像のことも $\omega : (\mathbb{Z}/\mathbf{p}\mathbb{Z})^\times \to \mu_{\phi(\mathbf{p})} \hookrightarrow \mathbb{Z}_p^\times$ と書いて法 $\mathbf{p}$ の Dirichlet 指標とみなす．$\overline{\mathbb{Q}}, \overline{\mathbb{Q}}_p$ をそれぞれ $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}_p$ の代数閉包とする．体の埋め込み $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ と体の同型 $\overline{\mathbb{Q}}_p \cong \mathbb{C}$ をそれぞれ固定し，これらの合成を介して $\overline{\mathbb{Q}}$ を $\mathbb{C}$

Date: August 2, 2016.

* sb2m06[at]math.tohoku.ac.jp ([at] を@に変えてください).

の部分体とみなす．$\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体は全て $\overline{\mathbb{Q}}_p$ の中で考える．$\mathcal{O}$ を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体の整数環とし，$\Lambda = \mathcal{O}[[X]]$ とおく (第 5 節，第 6 節以外は $\mathcal{O} = \mathbb{Z}_p$ として差し支えない).

以下，[LFE] を引用する場合は引用記号 [LFE] を省略する．定理等の番号について，例えば §7.3 にある Theorem 1 を引用する場合, 本稿では Theorem 7.3.1 と記載する．

本稿内での相互参照は，日本語で「第 1 節」「第 1.1 節」「定義 1.1」のように表記する．

1. Λ-adic forms, Hecke operators and the ordinary idempotent

1.1. **Λ-adic forms.** 整数 k と位数有限の指標 $\varepsilon : W \to \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ に対し，$\mathcal{O}$-代数の準同型 $\varphi_{k,\varepsilon} : \Lambda \to \overline{\mathbb{Q}}_p$ を $\varphi_{k,\varepsilon}(X) = \varepsilon(u)u^k - 1$ で定める．$\varepsilon(u)u^k - 1$ の $\mathcal{O}$ 上の最小多項式を $P_{k,\varepsilon}$ とする．すなわち $\ker(\varphi_{k,\varepsilon}) = P_{k,\varepsilon}\Lambda$ である．W が p-副有限なので，上のような指標 ε の位数は p の冪になる．この冪を $p^{r(\varepsilon)}$ と表す．

定義 1.1. $\chi : (\mathbb{Z}/\mathbf{p}\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{Z}_p^\times$ を法 $\mathbf{p}$ の偶指標 $(\chi(-1) = 1)$ とする．特に χ は Teichmüller 指標 ω の冪である．Λ 係数の q に関する 1 変数形式的べき級数

$$F(X;q) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n,F)(X)q^n \in \Lambda[[q]]$$

が指標 χ の Λ-adic form (respectively, Λ-adic cusp form) であるとは，位数有限の指標 $\varepsilon : W \to \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ を固定するごとに，有限個を除くすべての整数 $k \geq 1$ について

$$\varphi_{k,\varepsilon}(F) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{k,\varepsilon}(a(n,F)(X))q^n \in \mathcal{M}_k(\Gamma_0(\mathbf{p}p^{r(\varepsilon)}), \varepsilon\chi\omega^{-k}; \mathcal{O}[\varepsilon])$$

$$\text{(respectively, } \varphi_{k,\varepsilon}(F) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{k,\varepsilon}(a(n,F)(X))q^n \in \mathcal{S}_k(\Gamma_0(\mathbf{p}p^{r(\varepsilon)}), \varepsilon\chi\omega^{-k}; \mathcal{O}[\varepsilon]))$$

が成り立つことをいう．また，指標 χ の Λ-adic form F が ordinary であるとは，位数有限の指標 $\varepsilon : W \to \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ を固定するごとに，有限個を除くすべての整数 $k \geq 1$ に対し

$$\varphi_{k,\varepsilon}(F) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{k,\varepsilon}(a(n,F)(X))q^n \in \mathcal{M}_k^{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(\mathbf{p}p^{r(\varepsilon)}), \varepsilon\chi\omega^{-k}; \mathcal{O}[\varepsilon])$$

が成り立つことをいう．$\mathbf{M}(\chi,\Lambda)$, $\mathbf{S}(\chi,\Lambda)$, $\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(\chi,\Lambda)$, $\mathbf{S}^{\mathrm{ord}}(\chi,\Lambda)$ をそれぞれ Λ-adic forms, Λ-adic cusp forms, Λ-adic ordinary forms, Λ-adic ordinary cusp forms のなす集合とする．指標 χ とべき級数環 Λ について曖昧さがないときは単に $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\chi,\Lambda)$ などと書く．

$\varphi_{k,\varepsilon}(F)$ を F の ($\varphi_{k,\varepsilon}$ での) 特殊化という．以下 Λ-adic forms に対し，これまで考えてきた $\mathcal{M}_k(\Gamma_0(\mathbf{p}p^{r(\varepsilon)}), \varepsilon\chi\omega^{-k}; \mathcal{O}[\varepsilon])$ の元を古典的モジュラー形式 CLASSICAL MODULAR FORMS と呼ぶ．

注意 1.2. (1) 定義 1.1 のような，いわゆる "q-展開の p-進補間" によるモジュラー形式の p-進族の定義は，Wiles が初めて編み出し，[Wi1] で発表された．肥田理論の端緒となった 2 編の論文 [H86a] 及び [H86b] では専ら Hecke 環の p-進的な性質が論じられていて，定義 1.1 の概念は登場しない．

(2) 定義 1.1 は §7.1, p.196 の定義 (Λ) 及び §7.3, p.208 の定義 (Λ′) と見かけが異なるが，ordinary な Λ-adic forms の空間に限ればこれら 3 つの定義は互いに同値であ

る．詳細は §7.3, pp.212–214 の議論，特に Theorem 7.3.2; §7.3, p.214 を参照されたい．

(3) 定義 1.1 で χ を偶指標に限定する理由は，χ が奇指標，すなわち $\chi(-1) = -1$ ならば，整数 $k \geq 1$ と位数有限の指標 $\varepsilon : W \to \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ に対し $\varepsilon\chi\omega^{-k}(-1) = -(-1)^k$, 従って $\mathcal{M}_k(\Gamma_0(\mathbf{p}p^{r(\varepsilon)}), \varepsilon\chi\omega^{-k}; \mathcal{O}[\varepsilon]) = 0$ となり，$\mathbf{M}(\chi, \Lambda)$ が自明だからである．

(4) 定理 2.2 (Control Theorem) で見るように，2 以上の整数 k については，$\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}$ の元の $\varphi_{k,\varepsilon}$ での特殊化の様子が非常によく統制されている．一方で，$k = 1$ の場合の特殊化については事情が異なる．これに関連する話題が，本サマースクールにおける佐々木氏の講演で解説される予定である．

$\mathbf{M}(\chi, \Lambda)$, $\mathbf{S}(\chi, \Lambda)$, $\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(\chi, \Lambda)$, $\mathbf{S}^{\mathrm{ord}}(\chi, \Lambda)$ には Λ の元のスカラー倍により Λ-加群の構造が入る．第 1.3 節で見るように $\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}$ と $\mathbf{S}^{\mathrm{ord}}$ は Λ-加群として有限生成だが，$\mathbf{M}$ と $\mathbf{S}$ についてはレベルの p 冪が大きくなる時の $\mathcal{M}_k(\Gamma_0(\mathbf{p}p^{r(\varepsilon)}), \varepsilon\chi\omega^{-k}; \mathcal{O}[\varepsilon])$ の階数の増大が急激であるため，同様の性質は期待できない．

1.2. **Λ-adic forms の空間の Hecke 作用素.** 次に $\mathbf{M}$ の上に Hecke 作用素を定義する．主単数群 W の位相的生成元として $u = 1 + \mathbf{p}$ を固定していた．写像 $\mathbb{Z}_p \to W; s \mapsto u^s$ は位相群の同型である．この写像の逆写像を $s : W \to \mathbb{Z}_p; x \mapsto s(x) = \log_p(x)/\log_p(u)$ と書く．群準同型 $\kappa : W \to \Lambda^\times$ を $\kappa(x) = (1 + X)^{s(x)}$ で定める．$\mathfrak{m}$ を Λ のただ一つの極大イデアルとすると，κ は W の p-進位相と $\Lambda^\times$ の $\mathfrak{m}$-進位相について連続である．

定義 1.3. n を正の整数とする．べき級数 $F = \sum_{m=0}^{\infty} a(m, F)(X)q^m \in \Lambda[[q]]$ に対し，$F|T(n) \in \Lambda[[q]]$ を以下で定める：

$$a(m, F|T(n))(X) = \sum_{0<b|(m,n), p\nmid b} \kappa(\langle b \rangle)(X)\chi(b)b^{-1}a(mnb^{-2}, F)(X).$$

整数 $k \geq 1$ と指標 ε に対し $\varphi_{k,\varepsilon}(F) \in \mathcal{M}_k(\Gamma_0(\mathbf{p}p^{r(\varepsilon)}), \varepsilon\chi\omega^{-k}; \mathcal{O}[\varepsilon])$ が満たされるとき，$\varphi_{k,\varepsilon}(F|T(n)) = \varphi_{k,\varepsilon}(F)|T(n)$ となる (練習 1.4 (1))．従って $\mathbf{M}, \mathbf{S}, \mathbf{M}^{\mathrm{ord}}, \mathbf{S}^{\mathrm{ord}}$ はそれぞれ $T(n)$ で保たれる．この $T(n)$ を $\mathbf{M}$ の上の Hecke 作用素と言う．

練習 1.4. (1) F が $\mathbf{M}(\chi, \Lambda)$ に属するとき，$\varphi_{k,\varepsilon}(F) \in \mathcal{M}_k(\Gamma_0(\mathbf{p}p^{r(\varepsilon)}), \varepsilon\chi\omega^{-k}; \mathcal{O}[\varepsilon])$ となる整数 $k \geq 1$ と指標 $\varepsilon : W \to \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ を取ると

$$a(m, F|T(n))(\varepsilon(u)u^k - 1) = a(m, \varphi_{k,\varepsilon}(F)|T(n))$$

となることを，計算して確かめよ．このことから $\mathcal{M}_k(\Gamma_0(\mathbf{p}p^{r(\varepsilon)}), \varepsilon\chi\omega^{-k}; \mathcal{O}[\varepsilon])$ の元として $\varphi_{k,\varepsilon}(F|T(n)) = \varphi_{k,\varepsilon}(F)|T(n)$ となることが結論できる．

(2) 整数 $m, n \geq 1$ に対し，$T(m)$ と $T(n)$ の作用が可換であることを示せ．

(3) p と異なる素数 l に対し，$T(l^2) - T(l)^2 = \kappa(\langle l \rangle)(X)\chi(l)l^{-1}$ となることを示せ (この式の右辺は diamond operator を p-進的に補間している)．

1.3. **Λ-adic forms の空間の Λ-加群としての構造.** 次に $\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}, \mathbf{S}^{\mathrm{ord}}$ の Λ-加群としての構造を調べる．次が知られている：

定理 1.5 (Theorem 7.3.1; §7.3, p.209)**.** $\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(\chi, \Lambda)$ と $\mathbf{S}^{\mathrm{ord}}(\chi, \Lambda)$ はそれぞれ有限生成自由 Λ-加群である．

$\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}$ と $\mathbf{S}^{\mathrm{ord}}$ で証明の方法が全く同じなので，以下では $\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}$ について上の定理を示す．Λ は Krull 次元 2 の局所環で UFD，その唯一の極大イデアルを $\mathfrak{m}$ とすると Λ は $\mathfrak{m}$-進位相についてコンパクトであることに注意せよ．証明を次の二段階に分ける：

(1) $\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}$ が有限生成 Λ-加群で Λ-torsion がないことを示す；
(2) $\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}$ が自由 Λ-加群であることを示す．

Proof. (1) M を $\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}$ に含まれる有限生成自由 Λ-加群とし，その Λ-基底を $F_1, F_2, \ldots, F_r$ とする．線形独立性から r 個の整数 $n_1, n_2, \ldots, n_r \geq 0$ が存在して $D(X) = \det(a(n_i, F_j)(X))_{1\leq i,j\leq r}$ が Λ の元として 0 でないようにできる．Weierstrass の p 進準備定理 (Lemma 7.3.1; §7.3, p.209. 練習 1.7 (1) も参照) より $D(X)$ の零点は有限個だから，次の 2 条件を満たす整数 $k \geq 2$ が取れる：

(a) $\varphi_{k,1}(D) \neq 0$;
(b) 任意の i に対し $f_i = \varphi_{k,1}(F_i) \in \mathcal{M}_k^{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(\mathbf{p}), \chi\omega^{-k}; \mathcal{O})$.

このように k を取ると $f_1, f_2, \ldots, f_r$ は $\mathcal{O}$ 上線形独立である．[石川] 定理 5.1 (Theorem 7.2.2; §7.2, p.203) より $\mathcal{M}_k^{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(\mathbf{p}), \chi\omega^{-k}; \mathcal{O})$ の $\mathcal{O}$-加群としての階数は重さ k に依存しない値で上から評価される．そこで M をその階数 r が最大になるように取ると，$\mathbf{L}$ を Λ の商体として，$\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}$ の任意の元 F は F_i たちの $\mathbf{L}$ 上の線形結合で $F = \sum_{i=1}^r x_i F_i$ $(x_i \in \mathbf{L})$ と書ける．その結合係数に関する連立方程式

$$(a(n_i, F_j)(X))_{1\leq i,j\leq r} \cdot {}^t(x_1 \ \cdots \ x_r) = {}^t(a(n_1, F)(X) \ \cdots \ a(n_r, F)(X))$$

を解いて $D(X)\mathbf{M}^{\mathrm{ord}} \subset \oplus_{i=1}^r \Lambda F_i$ を得る．さらに $\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}$ が $\Lambda[[q]]$ の Λ-部分加群であるゆえ Λ-torsion を持たないことと，Λ が Noether 環であることに注意すると，$\mathbf{M}^{\mathrm{ord}} \cong D(X)\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}$ は有限生成 Λ-加群である．

(2) 先の議論により $\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}$ は Λ 上有限生成だから，整数 $k \geq 2$ であって，任意の整数 $j \geq k$ と任意の $F \in \mathbf{M}^{\mathrm{ord}}$ に対し $\varphi_{j,1}(F) \in \mathcal{M}_j^{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(\mathbf{p}), \chi\omega^{-j}; \mathcal{O})$ となるものが取れる．以下，多項式 $P_{k,1} = X - (u^k - 1)$ を P_k と略記する．このとき $\mathcal{O}$-加群の準同型

$$\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}/P_k\mathbf{M}^{\mathrm{ord}} \to \mathcal{M}_k^{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(\mathbf{p}), \chi\omega^{-k}; \mathcal{O}); F \mapsto \varphi_{k,1}(F)$$

は well-defined かつ単射である (練習 1.7 (2)). $\mathcal{O}$ は単項イデアル整域だから $\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}/P_k\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}$ は有限生成自由 $\mathcal{O}$-加群となる．そこで，$F_1, F_2, \ldots, F_r \in \mathbf{M}^{\mathrm{ord}}$ を $f_1, f_2, \ldots, f_r$ が $\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}/P_k\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}$ の $\mathcal{O}$-基底となるように取ると，$M = \oplus_{i=1}^r \Lambda F_i$ は $\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}$ の有限生成 Λ-自由部分加群である．次の可換図式を考える：

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{i} & \mathbf{M}^{\mathrm{ord}} & \longrightarrow & \mathrm{Cok}(i) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \big\downarrow{\scriptstyle \times P_k} & & \big\downarrow{\scriptstyle \times P_k} & & \big\downarrow{\scriptstyle \times P_k} & & \\
0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{i} & \mathbf{M}^{\mathrm{ord}} & \longrightarrow & \mathrm{Cok}(i) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow & & \\
 & & M/P_kM & \xrightarrow{\bar{i}} & \mathbf{M}^{\mathrm{ord}}/P_k\mathbf{M}^{\mathrm{ord}} & \longrightarrow & \mathrm{Cok}(i)/P_k\mathrm{Cok}(i) & &
\end{array}$$

M の取り方より $\bar{i}$ が同型だから，蛇の補題により $\mathrm{Cok}(i)/P_k\mathrm{Cok}(i) = 0$. Λ が局所環なので $P_k\Lambda$ は Λ の Jacobson radical (すなわち極大イデアル $\mathfrak{m}$) に含まれる．中山の補題により $\mathrm{Cok}(i) = 0$, すなわち $\mathbf{M}^{\mathrm{ord}} = M$ を得る．

□

系 1.6. k を整数とし，$\varepsilon : W \to \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ を位数有限の指標とする．このとき $\varphi_{k,\varepsilon}(\mathbf{M}^{\mathrm{ord}})$ が生成する $\mathcal{O}[\varepsilon]$-加群は有限生成自由で，その $\mathcal{O}[\varepsilon]$ 上の階数は整数 $k \geq 2$ によらず $\mathrm{rank}_\Lambda(\mathbf{M}^{\mathrm{ord}})$ に等しい．さらにある整数 $k(\varepsilon) \geq 2$ が存在し，任意の整数 $k \geq k(\varepsilon)$ について，$\varphi_{k,\varepsilon}(\mathbf{M}^{\mathrm{ord}})$ が生成する $\mathcal{O}[\varepsilon]$-加群が $\mathcal{M}_k^{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(\mathbf{p}p^{r(\varepsilon)}), \varepsilon\chi\omega^{-k}; \mathcal{O}[\varepsilon])$ の $\mathcal{O}[\varepsilon]$-部分加群となる．

練習 1.7. (1) 以下に述べる，Weierstrass の p-進準備定理を証明せよ．多項式

$$P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n \in \mathcal{O}[X]$$

は，任意の $i = 0, 1, \ldots, n-1$ について $a_i \in \varpi\mathcal{O}$ を満たすとき distinguished polynomial と呼ばれる．ただし ϖ は $\mathcal{O}$ の素元の一つである．0 でない任意のべき級数 $A(X) \in \Lambda$ は，ある整数 $\mu \geq 0$, distinguished polynomial $P(X) \in \mathcal{O}[X]$ と単元 $U(X) \in \Lambda^\times$ を用いて一意的に $A(X) = \varpi^\mu P(X)U(X)$ と表されることを示せ．特に，0 でない Λ の元の零点は有限個であることを示せ [参照：[Wa] §7.1, Theorem 7.3].

(2) $\varepsilon : W \to \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ を位数有限の指標，$k \geq 2$ を整数とする．$F \in \mathbf{M}^{\mathrm{ord}}$ が ($\mathcal{O}[\varepsilon][[q]]$ の元として) $\varphi_{k,\varepsilon}(F) = 0$ を満たすとき，ある $G \in \mathbf{M}^{\mathrm{ord}}$ が存在して $F = P_{k,\varepsilon}G$ となることを示せ (このことから $\varphi_{k,\varepsilon}$ の核は $P_{k,\varepsilon}\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}$ であることが従う).

1.4. **The ordinary idempotent.** [石川] 練習 3.3 の直後で冪等射影子 ORDINARY IDEMPOTENT $e : \mathcal{M}_k(\Gamma_0(\mathbf{p}p^{r(\varepsilon)}), \varepsilon\chi\omega^{-k}; \mathcal{O}[\varepsilon]) \to \mathcal{M}_k^{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(\mathbf{p}p^{r(\varepsilon)}), \varepsilon\chi\omega^{-k}; \mathcal{O}[\varepsilon])$ を定義した (Lemma 7.2.1; §7.2, p.201). この類似として，Λ-adic forms の空間にも ordinary idempotent $e : \mathbf{M} \to \mathbf{M}^{\mathrm{ord}}$ を定めることができる．この事実を以下の命題にまとめる．

命題 1.8 (Proposition 7.3.1; §7.3, p.212)**.** Λ-加群の準同型 $e : \mathbf{M}(\chi, \Lambda) \to \mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(\chi, \Lambda)$ で，$e^2 = e$ を満たし，任意の $F \in \mathbf{M}(\chi, \Lambda)$ と $\varphi_{k,\varepsilon}(F) \in \mathcal{M}_k(\Gamma_0(\mathbf{p}p^{r(\varepsilon)}), \varepsilon\chi\omega^{-k}; \mathcal{O}[\varepsilon])$ なる任意の整数 $k \geq 1$, 指標 $\varepsilon : W \to \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ に対し

$$\varphi_{k,\varepsilon}(F|e) = \varphi_{k,\varepsilon}(F)|e$$

が成り立つものが一意的に存在する．さらに Λ の極大イデアルを $\mathfrak{m}$ とすると，$\mathfrak{m}$-進位相について $F|e = \lim_{n\to\infty} F|T(p)^{n!}$ が成り立つ．

e の構成の概要を述べる．詳細は §7.3, pp.211–212 を参照されたい．$F \in \mathbf{M}$ を取り，$F|e \in \mathbf{M}^{\mathrm{ord}}$ を定義したい．Λ-adic forms の定義から，ある整数 $a \geq 2$ が存在し，任意の整数 $k \geq a$ に対し $\varphi_{k,1}(F) \in \mathcal{M}_k(\Gamma_0(\mathbf{p}p^\alpha), \chi\omega^{-k}; \mathcal{O})$ となる．各整数 $k \geq a$ に対し $\mathcal{M}_{a,k}(O) = \oplus_{l=a}^k \mathcal{M}_l(\Gamma_0(\mathbf{p}p^\alpha), \chi\omega^{-l}; \mathcal{O})$ とおき，この上に Hecke 作用素 $T(n)$ を

$$(\oplus_{l=a}^k f_l)|T(n) = (\oplus_{l=a}^k f_l|T(n))$$

で定める．$\mathcal{M}_{a,k}(\mathcal{O})$ は有限生成自由 $\mathcal{O}$-加群だから，$\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(\mathcal{M}_{a,k}(\mathcal{O}))$ の中で $T(n)$ たちが生成する $\mathcal{O}$-部分代数 $R_{a,k}$ もまた然り．[石川] 系 3.2 により，各 k について冪等元 $e_k = \lim_{n\to\infty} T(p)^{n!} \in R_{a,k}$ が定まる．ここで

$$\mathbf{M}_{a,k} = \left\{ G \in \mathbf{M} \mid G(u^l - 1) \in \mathcal{M}_l(\Gamma_0(\mathbf{p}p^\alpha), \chi\omega^{-l}; \mathcal{O}), \quad a \leq \forall l \leq k \right\},$$

$$\mathbf{M}'_{a,k} = \left\{ G \in \mathbf{M}_{a,k} \mid G(u^l - 1) = 0, \quad a \leq \forall l \leq k \right\}$$

とおくと，準同型

$$\mathbf{M}_{a,k}/\mathbf{M}'_{a,k} \to \mathcal{M}_{a,k}(\mathcal{O}); G \mapsto \oplus_{l=a}^{k} G(u^l - 1)$$

は単射で，e_k が $\mathbf{M}_{a,k}/\mathbf{M}'_{a,k}$ に作用する．さらに整数 $a \le j \le k$ に対し自然な射影を $\pi_{k,j} : \mathbf{M}_{a,k}/\mathbf{M}'_{a,k} \to \mathbf{M}_{a,j}/\mathbf{M}'_{a,j}$ とすると $\pi_{k,j} \circ e_k = e_j \circ \pi_{k,j}$ が成り立つ．k に関する射影極限を取ることにより，整数 $n \ge 1$ に対し

$$a(n, F|e)(X) = \varprojlim_{k} a(n, (F \bmod \mathbf{M}'_{a,k})|e_k) \in \varprojlim_{k} (\Lambda/P_a \cdots P_k\Lambda) = \Lambda$$

が定まる．これが所望の $F|e \in \mathbf{M}^{\mathrm{ord}}$ を与える．

2. The control theorem

この節では Control Theorem (定理 2.2) の主張を紹介し，その証明が [石川] 定理 5.1 (Theorem 7.2.1; §7.2, p.202) に帰着することを説明する．

記法 2.1. Λ-代数 A に対し $\mathbf{M}(\chi, A) = \mathbf{M}(\chi, \Lambda) \otimes_{\Lambda} A$ とおく．$\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{S}^{\mathrm{ord}}$ などに対しても同様．位数有限の指標 $\varepsilon : W \to \overline{\mathbb{Q}}_p^{\times}$ に対し，$\Lambda_{\varepsilon} = \mathcal{O}[\varepsilon][[X]]$ とおく．

$\mathcal{O}$-代数の準同型 $\varphi_{k,\varepsilon} : \Lambda \to \mathcal{O}[\varepsilon]$ を，係数拡大により $\varphi_{k,\varepsilon} : \Lambda_{\varepsilon} \to \mathcal{O}[\varepsilon]$ に延長する．これに伴い，$\mathcal{O}$-加群の準同型 $\varphi_{k,\varepsilon} : \mathbf{M}(\chi, \Lambda) \to \mathcal{O}[\varepsilon][[q]]$ も係数拡大により $\mathcal{O}[\varepsilon]$-加群の準同型 $\varphi_{k,\varepsilon} : \mathbf{M}(\chi, \Lambda_{\varepsilon}) \to \mathcal{O}[\varepsilon][[q]]$ に延長される．

定理 2.2 (Theorem 7.3.3; §7.3, p.215 の後半の主張)**.** $\chi : (\mathbb{Z}/\mathbf{p}\mathbb{Z})^{\times} \to \mathbb{Z}_p^{\times}$ を偶指標，$\varepsilon : W \to \overline{\mathbb{Q}}_p^{\times}$ を位数 $p^{r(\varepsilon)}$ の指標とする．このとき任意の整数 $k \ge 2$ について

$$\varphi_{k,\varepsilon}(\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(\chi, \Lambda_{\varepsilon})) = \mathcal{M}_k^{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(\mathbf{p}p^{r(\varepsilon)}), \varepsilon\chi\omega^{-k}; \mathcal{O}[\varepsilon]) \tag{2.1}$$

が成り立つ．Λ-adic ordinary cusp forms の空間についても同様の主張が成り立つ．

以下，式 (2.1) の右辺の空間を $\mathcal{M}_{k,\varepsilon}^{\mathrm{ord}} = \mathcal{M}_k^{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(\mathbf{p}p^{r(\varepsilon)}), \varepsilon\chi\omega^{-k}; \mathcal{O}[\varepsilon])$ と略記する．定理 2.2 は $\mathcal{M}_{k,\varepsilon}^{\mathrm{ord}}$ の $\mathcal{O}[\varepsilon]$-加群としての階数が重さ $k \ge 2$ と指標 ε に依らず，その一定の値が $\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(\chi, \Lambda)$ の Λ-加群としての階数に一致することを主張している．特にこの定理が [石川] 定理 5.1 (Theorem 7.2.1) を含んでいることに注意されたい．

2.1. Λ-adic Eisenstein 級数と畳み込み積.

この節では，まず Λ-adic forms の具体例である Λ-adic Eisenstein 級数について説明する．次にモジュラー形式と Λ-adic form が与えられたときに新たな Λ-adic form を構成する方法として，畳み込み積を紹介する．[石川] 定理 2.19 で，Teichmüller 指標 ω の冪であるような指標 $\psi : (\mathbb{Z}/\mathbf{p}\mathbb{Z})^{\times} \to \mathbb{Z}_p^{\times}$ に対し，次の性質を満たす Λ-adic Eisenstein 級数 $E(\psi)$ を構成した：

命題 2.3 (Proposition 7.1.1; §7.1, p.198)**.** $\mu_{\phi(\mathbf{p})} \cong (\mathbb{Z}/\mathbf{p}\mathbb{Z})^{\times}$ への制限が ψ に一致する任意の原始的指標 $\eta : (\mathbb{Z}/\mathbf{p}p^{\alpha}\mathbb{Z})^{\times} \to \overline{\mathbb{Q}}^{\times}$ と，任意の整数 $k \ge 1$ に対して

$$E(\psi)(\eta(u)u^k - 1) = E_k(\eta\omega^{-k})(z) - (\eta\omega^{-k})(p)p^{k-1}E_k(\eta\omega^{-k})(pz).$$

特に ψ を我々が固定している偶指標 $\chi : (\mathbb{Z}/\mathbf{p}\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{Z}_p^\times$ として，位数有限の指標 $\varepsilon : W \to \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ が与えられるごとに $\eta = \varepsilon\chi$ とおく．さらに $\alpha = r(\varepsilon)$ とすると ψ と η は命題 2.3 の条件を満たし，任意の整数 $k \geq 1$ に対し

$$\begin{aligned}\varphi_{k,\varepsilon}(E(\chi)) &= E_k(\varepsilon\chi\omega^{-k})(z) - (\varepsilon\chi\omega^{-k})(p)p^{k-1}E_k(\varepsilon\chi\omega^{-k})(pz) \\ &\in \mathcal{M}_k^{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(\mathbf{p}p^{r(\varepsilon)}), \varepsilon\chi\omega^{-k}; \mathbb{Z}_p[\varepsilon])\end{aligned}$$

が成り立つ．ただし $\mathcal{M}_k^{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(\mathbf{p}p^{r(\varepsilon)}), \varepsilon\chi\omega^{-k}; \mathbb{Z}_p[\varepsilon])$ の $\varepsilon\chi\omega^{-k}$ は (実際の導手がより小さくとも) $\mathbf{p}p^{r(\varepsilon)}$ を法として定義されるものと考える．χ が 1_1 でないとき $E(\chi) \in \mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(\chi, \Lambda)$ となる．一方 $\chi = 1_1$ のときは $E(1_1)$ の定数項が Λ の元ではないが $XE(1_1) \in \mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(1_1, \Lambda)$ が成り立つ ([石川] 定理 2.19 の直前．より一般には Proposition 1.3.1; [Wi1], p.542).

定義 2.4. この $E(\chi)$ を指標 χ の Λ-adic Eisenstein 級数という．

次にモジュラー形式と Λ-adic form の畳み込み積について述べる．

定義 2.5. 指標 $\psi : (\mathbb{Z}/\mathbf{p}p^\beta\mathbb{Z})^\times \to \mathcal{O}^\times$ と整数 $a \geq 1$ が $\psi(-1) = (-1)^a$ を満たすとする．このとき $g \in \mathcal{M}_a(\Gamma_0(\mathbf{p}p^\beta), \psi; \mathcal{O})$ と $F = F(X;q) \in \Lambda[[q]]$ の畳み込み積 $g * F \in \Lambda[[q]]$ を以下で定める：

$$(g * F)(X;q) = gF(\psi(u)^{-1}u^{-a}X + \psi(u)^{-1}u^{-a} - 1; q).$$

$\psi_0 = \psi|_{\mu_{\phi(\mathbf{p})}}$ と書く．$F \in \mathbf{M}(\chi\psi_0^{-1}\omega^{-a}, \Lambda)$ ならば $g * F \in \mathbf{M}(\chi, \Lambda)$ となる．

練習 2.6. (1) $F \in \mathbf{M}(\chi\psi_0^{-1}\omega^{-a}, \Lambda)$ ならば $g * F \in \mathbf{M}(\chi, \Lambda)$ となることを示せ．

(2) $F = E(\chi\psi_0^{-1}\omega^{-a})$ とするとき，任意の位数有限の指標 $\varepsilon : W \to \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ と任意の整数 $k \geq a + 1$ に対し

$$\begin{aligned}&\varphi_{k,\varepsilon}(g * E(\chi\psi_0^{-1}\omega^{-a})) \\ &= g(E_{k-a}(\psi^{-1}\varepsilon\chi\omega^{-k})(z) - (\psi^{-1}\varepsilon\chi\omega^{-k})(p)p^{k-a-1}E_{k-a}(\psi^{-1}\varepsilon\chi\omega^{-k})(pz)) \\ &\in \mathcal{M}_k(\Gamma_0(\mathbf{p}p^{m(\varepsilon)}), \varepsilon\chi\omega^{-k}; \mathcal{O}[\varepsilon])\end{aligned}$$

となることを確かめよ．ただし $m(\varepsilon) = \max\{r(\varepsilon), \beta\}$ とした．この計算結果は $g * E(\chi\psi_0^{-1}\omega^{-a}) \in \mathbf{M}(\chi, \mathbf{L})$ を意味する．ここで $\mathbf{L}$ は Λ の商体を表す．

(3) $g(z) = G_a(\psi)(z) = \sum_{n=1}^\infty \sigma'_{a-1,\psi}(n)q^n$ を ψ に付随する Eisenstein 級数とする．ただし $\sigma'_{m,\psi}(n) = \sum_{0<d|n} \psi(n/d)d^m$ である ($G_a(\psi)$ の詳細は §5.1, p.129 を参照されたい)．F は (2) に引き続き $F = E(\chi\psi_0^{-1}\omega^{-a})$ とする．このとき $g * F \in \mathbf{S}(\chi, \mathbf{L})$ となることを示せ．

2.2. **定理 2.2 から Theorem 7.2.1 への帰着．** この節では定理 2.2 の証明が Theorem 7.2.1 (§7.2, p.202) に帰着することを確認する．まず定理 2.2 の等号 (2.1) のうち，$\mathcal{M}_{k,\varepsilon}^{\mathrm{ord}}$ が $\varphi_{k,\varepsilon}(\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(\chi, \Lambda_\varepsilon))$ に含まれることを示す．

命題 2.7 (Theorem 7.3.3; §7.3, p.215 の前半の主張)**.** $\varepsilon : W \to \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ を位数有限の指標，$f \in \mathcal{M}_k(\Gamma_0(\mathbf{p}p^{r(\varepsilon)}), \varepsilon\chi\omega^{-k}; \mathcal{O}[\varepsilon])$ を重さ $k \geq 1$ の古典的モジュラー形式とする．このときある $F \in \mathbf{M}(\chi, \Lambda_\varepsilon)$ が存在して $\varphi_{k,\varepsilon}(F) = f$ となる．さらに f が ordinary なら $F \in \mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(\chi, \Lambda_\varepsilon)$ とできる．

練習 2.8 (命題 2.7 の証明)．$E'(X;q) \in \Lambda[[q]]$ を以下で定める：

$$E'(X;q) = \left\{2^{-1}(\log_p u)(p^{-1}-1)\right\}^{-1} XE(1_1)(X;q).$$

(1) $E'(X;q) \in \mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(1_{\mathbf{p}}, \Lambda)$ となることを示せ．さらに $E'(0;q) = 1$ となることを確かめよ．ただし $L_p(1_1)(X) \in \mathbb{Z}_p[[X]]$ を [石川] 定理 2.18 の p-進 L-関数とするとき，$\zeta_p(s) = L_p(1_1)(u^{1-s}-1)/(u^{1-s}-1)$ は p-進 zeta 関数で，$2^{-1}(u^s-1)\zeta_p(1-s)$ の $s=0$ での値が $2^{-1}(\log_p u)(p^{-1}-1)$ であることを認めてよい．p-進 zeta 関数については §3.5, 特に Theorem 3.5.2 (§3.5, p.89) に詳細がある．

(2) $F = f * E'$ とおくと，F が $\mathbf{M}(\chi, \Lambda_\varepsilon)$ に属し，さらに $\varphi_{k,\varepsilon}(F) = f$ を満たすことを示せ．また，$f \in \mathcal{M}_k^{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(\mathbf{p}p^{r(\varepsilon)}), \varepsilon\chi\omega^{-k}; \mathcal{O}[\varepsilon])$ なら $f \in \varphi_{k,\varepsilon}(\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(\chi, \Lambda_\varepsilon))$ となることを示せ．

注意 2.9. 練習 2.8 と同様の議論により，f が cusp form なら $F \in \mathbf{S}(\chi, \Lambda_\varepsilon)$, ordinary な cusp form なら $F \in \mathbf{S}^{\mathrm{ord}}(\chi, \Lambda_\varepsilon)$ とできることも分かる．

命題 2.7 と系 1.6 を合わせると，任意の整数 $k \geq k(\varepsilon)$ に対して

$$\varphi_{k,\varepsilon}(\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(\chi, \Lambda_\varepsilon)) = \mathcal{M}_{k,\varepsilon}^{\mathrm{ord}},\ \ \mathrm{rank}_\Lambda(\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(\chi, \Lambda)) = \mathrm{rank}_{\mathcal{O}[\varepsilon]}(\varphi_{k,\varepsilon}(\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(\chi, \Lambda_\varepsilon)))$$

となる ($k(\varepsilon)$ とは系 1.6 にある 2 以上の整数のこと)．さらに任意の $k \geq 2$ に対し

$$\varphi_{k,\varepsilon}(\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(\chi, \Lambda_\varepsilon)) \supset \mathcal{M}_{k,\varepsilon}^{\mathrm{ord}}$$

となり，$\varphi_{k,\varepsilon}(\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(\chi, \Lambda_\varepsilon))$ と $\mathcal{M}_{k,\varepsilon}^{\mathrm{ord}}$ はいずれも有限生成自由 $\mathcal{O}[\varepsilon]$-加群である．従って $\mathrm{rank}_{\mathcal{O}[\varepsilon]}\mathcal{M}_{k,\varepsilon}^{\mathrm{ord}}$ が整数 $k \geq 2$ に依らないことを示せばよい．実際には，この階数が位数有限の指標 $\varepsilon : W \to \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ にも依存せず，以下が成り立つ：

命題 2.10. $\varepsilon : W \to \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ を位数有限の指標とする．このとき任意の整数 $k \geq 2$ に対し

$$\mathrm{rank}_{\mathcal{O}[\varepsilon]}\mathcal{M}_{k,\varepsilon}^{\mathrm{ord}} = \mathrm{rank}_{\mathcal{O}}\mathcal{M}_{2,1}^{\mathrm{ord}},\ \ \mathrm{rank}_{\mathcal{O}[\varepsilon]}\mathcal{S}_{k,\varepsilon}^{\mathrm{ord}} = \mathrm{rank}_{\mathcal{O}}\mathcal{S}_{2,1}^{\mathrm{ord}}$$

が成り立つ．

この命題は [石川] 定理 5.1 (Theorem 7.2.1; §7.2, p.202) に他ならない．

注意 2.11. 指標 $\varepsilon : W \to \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ の位数を $p^{r(\varepsilon)}$ とすれば，$\varphi_{k,\varepsilon}$ で特殊化して得られるモジュラー形式のレベルは $\Gamma_0(\mathbf{p}p^{r(\varepsilon)})$ であった (定義 1.1). 従って命題 2.10 により，$\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(\chi, \Lambda)$ の上の特殊化 $\varphi_{k,\varepsilon}$ の振る舞いは，重さ $k \geq 2$ のみならずレベルについても統制されていることに注意されたい．レベルの統制が可能なのは，[石川] 練習 5.3 (§7.3, p.213, ℓ.-2 – p.214, ℓ.8) にあるような両側剰余類分解の等式が成り立つことによる．

3. The universal Hecke algebras, duality and Hecke eigenforms

この節では universal Hecke algebras を古典的な場合に倣って定義し，特に universal ordinary Hecke algebras についてその半単純性を議論する．その後 universal ordinary Hecke algebras が Λ-adic forms の空間の双対になっていることを観察する．この双対を通じて universal ordinary Hecke algebras の半単純性を Λ-adic forms の言葉で言い換えると，正規化された Λ-adic Hecke 固有形式が現れることを最後に見る．

3.1. **Ordinary Hecke algebra.**

定義 3.1. Universal ordinary Hecke algebra $\mathbf{H}^{\mathrm{ord}}(\chi,\Lambda)$ とは，$\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(\chi,\Lambda)$ 上の Hecke 作用素 $T(n)$ $(n=1,2,\ldots)$ が Λ 上生成する $\mathrm{End}_\Lambda(\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(\chi,\Lambda))$ の Λ-部分代数である．Λ-adic cusp forms に関しても同様に，universal ordinary Hecke algebra $\mathbf{h}^{\mathrm{ord}}(\chi,\Lambda)$ を，$\mathbf{S}^{\mathrm{ord}}(\chi,\Lambda)$ 上の Hecke 作用素 $T(n)$ $(n=1,2,\ldots)$ が Λ 上生成する $\mathrm{End}_\Lambda(\mathbf{S}^{\mathrm{ord}}(\chi,\Lambda))$ の Λ-部分代数とする．

記法 3.2. Λ-adic forms の空間の場合と同様に，指標 χ, べき級数環 Λ について曖昧さがないときは単に $\mathbf{H}^{\mathrm{ord}}=\mathbf{H}^{\mathrm{ord}}(\chi,\Lambda)$ と書く．Λ-代数 A に対し $\mathbf{H}^{\mathrm{ord}}(\chi,A)=\mathbf{H}^{\mathrm{ord}}(\chi,\Lambda)\otimes_\Lambda A$ とおく．$\mathbf{h}^{\mathrm{ord}}$ についても同様．

まず $\mathbf{H}^{\mathrm{ord}}$ の環としての性質に着目したい．

定理 3.3 (Theorem 7.3.4; §7.3, p.218)**.** $\mathbf{H}^{\mathrm{ord}}(\chi,\Lambda)$ は被約，すなわち $\mathbf{L}$ を Λ の商体とすると $\mathbf{H}^{\mathrm{ord}}(\chi,\mathbf{L})$ は半単純である．$\mathbf{h}^{\mathrm{ord}}$ についても同様．

この定理は Control Theorem (定理 2.2) と，重さ $k\geq 2$ のモジュラー形式の空間に伴う Hecke 環 $\mathbf{H}_k^{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(\mathbf{p}p^\alpha),\chi\omega^{-k};\mathcal{O})$ が被約であることから従う．

練習 3.4. 定理 3.3 の証明を完成させよ ($\cap_{k\geq 2}P_{k,1}=\{0\}$ となることに注意せよ).

3.2. **Ordinary Hecke algebra と双対性.** 次に $\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}$ と $\mathbf{H}^{\mathrm{ord}}$ の間の双対について議論したい．A を Λ-代数とすると，係数拡大により冪等作用素 $e:\mathbf{M}(\chi,A)\to\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(\chi,A)$ が定義される．A-双線形写像

$$\langle\ ,\ \rangle:\mathbf{H}^{\mathrm{ord}}(\chi,A)\times\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(\chi,A)\to A;(H,F)\mapsto a(1,F|H)$$

を考える．A が整域なら，$\mathbf{K}$ を A の商体として

$$\mathbf{m}^{\mathrm{ord}}(\chi,A)=\Big\{F\in\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(\chi,\mathbf{K})\mid a(n,F)\in A,\ \forall n\geq 1\Big\}$$

とおく．このとき次が成り立つ：

定理 3.5 (Theorem 7.3.5; §7.3, p.218)**.** A が $\mathbf{L}$ の拡大体，あるいは $\mathbf{L}$ の有限次拡大体の中での Λ の整閉包ならば，上の双線形写像 $\langle\ ,\ \rangle$ が以下の同型を誘導する：

$$\mathrm{Hom}_A(\mathbf{H}^{\mathrm{ord}}(\chi,A),A)\cong\mathbf{m}^{\mathrm{ord}}(\chi,A),\ \mathrm{Hom}_A(\mathbf{m}^{\mathrm{ord}}(\chi,A),A)\cong\mathbf{H}^{\mathrm{ord}}(\chi,A),$$
$$\mathrm{Hom}_A(\mathbf{h}^{\mathrm{ord}}(\chi,A),A)\cong\mathbf{S}^{\mathrm{ord}}(\chi,A),\quad\mathrm{Hom}_A(\mathbf{S}^{\mathrm{ord}}(\chi,A),A)\cong\mathbf{h}^{\mathrm{ord}}(\chi,A).$$

特に $\mathbf{H}^{\mathrm{ord}}(\chi,A)$, $\mathbf{h}^{\mathrm{ord}}(\chi,A)$ は有限生成自由 A-加群である．

証明については §7.3, pp.218–219 を参照されたい．A-双線形写像 $\langle\ ,\ \rangle$ が非退化であることは定義に従って容易に示せる．特に A が体のとき，定理 3.5 は非退化性から直ちに従う．定理の証明で最も難しいのは

$$\mathbf{H}^{\mathrm{ord}}(\chi,A)\to\mathrm{Hom}_A(\mathbf{m}^{\mathrm{ord}}(\chi,A),A)$$

が全射であることを示す部分で，定理 2.2 と可換環論の議論を用いて $\mathbf{H}_k^{\mathrm{ord}}$ と $\mathcal{M}_k^{\mathrm{ord}}$ の間の双対性にこの証明を帰着させる．

3.3. **正規化された Hecke 固有形式.** A を定理 3.5 と同様のものとする．$F \in \mathbf{m}^{\mathrm{ord}}(\chi, A)$ が Hecke 固有形式であるとは，任意の整数 $n \geq 1$ に対し，F が Hecke 作用素 $T(n)$ の固有ベクトルであることを言う．定理 3.5 の双対性のもとで $F \in \mathbf{m}^{\mathrm{ord}}(\chi, A)$ と A-加群の準同型 $\lambda : \mathbf{H}^{\mathrm{ord}}(\chi, A) \to A$ が対応しているとき，

$$\text{“}F \text{ が } a(1,F) = 1 \text{ なる Hecke 固有形式”} \iff \text{“}\lambda \text{ が } A\text{-代数の準同型”}.$$

実は Λ を適切に拡大すると，Λ-adic forms の空間は Hecke 固有形式で生成される．

定理 3.3 より $\mathbf{H}^{\mathrm{ord}}(\chi, \mathbf{L})$ は有限個の $\mathbf{L}$ の有限次拡大体の直積である．よって $\mathbf{L}$ の有限次拡大体 $\mathbf{K}$ を適切に選べば $\mathbf{H}^{\mathrm{ord}}(\chi, \mathbf{K}) = \prod \mathbf{K}$ (有限個の $\mathbf{K}$ のコピーの直積) とできる．このような $\mathbf{K}$ を一つ取り，$\mathbf{I}$ を $\mathbf{K}$ の中での Λ の整閉包とする．

定理 3.6 (Theorem 7.3.6; §7.3, p.220)**.** $\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(\chi, \mathbf{K})$，$\mathbf{S}^{\mathrm{ord}}(\chi, \mathbf{K})$ はそれぞれ Hecke 固有形式からなる $\mathbf{K}$-基底を持つ．さらに $\mathbf{S}^{\mathrm{ord}}(\chi, \mathbf{K})$ のそのような $\mathbf{K}$-基底 $\{F_i\}$ を $a(1, F_i) = 1$ となるように正規化すると，実際には $F_i \in \mathbf{S}^{\mathrm{ord}}(\chi, \mathbf{I})$ となる．

練習 3.7 (定理 3.6 の証明)**.** (1) $\lambda_i : \mathbf{H}^{\mathrm{ord}}(\chi, \mathbf{K}) \to \mathbf{K}$ を i 番目の射影とし，定理 3.5 の双対性により λ_i に対応する Λ-adic form を $F_i \in \mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(\chi, \mathbf{K})$ とする．このとき整数 $n \geq 1$ に対し $F_i | T(n) = a(n, F_i) F_i$ となり，$\{F_i\}$ が $\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(\chi, \mathbf{K})$ の $\mathbf{K}$-基底となることを示せ．

(2) $\{F_i\}$ が Hecke 固有形式からなる $\mathbf{S}^{\mathrm{ord}}(\chi, \mathbf{K})$ の $\mathbf{K}$-基底で $a(1, F_i) = 1$ を満たすとする．任意の整数 $n \geq 1$ に対し $a(n, F_i) \in \mathbf{I}$ となることを示せ [ヒント：$a(n, F_i)$ は F_i の $T(n)$ に関する固有値である．$T(n)$ の固有多項式を観察せよ].

3.4. **数論的点とモジュラー形式の p-進族.** 既に見たように，Λ-adic form を与えることは，重さ $k \geq 2$ でパラメータ付けられたモジュラー形式の族 $\{f_k\}$ で，Fourier 係数 $a(n, f_k)$ が k について p-進的に連続であるものを与えることに相当する．同様に $\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(\chi, \mathbf{I})$ の元を与えると,「数論的点」の集合によりパラメータ付けられるモジュラー形式の p-進族が得られる．

定義 3.8. $\mathcal{O}$-代数の準同型 $P : \mathbf{I} \to \overline{\mathbb{Q}}_p$ が数論的点 ARITHMETIC POINT であるとは，整数 $k \geq 2$ と位数有限の指標 $\varepsilon : W \to \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ が存在して P の Λ への制限が $\varphi_{k,\varepsilon}$ に一致することをいう．$\mathfrak{X}^{\mathrm{arith}}(\mathbf{I})$ で $\mathbf{I}$ の数論的点の集合を表す．

注意 3.9. $\mathfrak{X}^{\mathrm{arith}}(\mathbf{I})$ の上の同値関係 $\sim$ を

$$P \sim P' \iff \sigma \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}}(\overline{\mathbb{Q}}_p) \text{ が存在して } P' = \sigma \circ P$$

で定義する．$\mathcal{A}(\mathbf{I}) = \left\{ \ker(P) \mid P \in \mathfrak{X}^{\mathrm{arith}}(\mathbf{I}) \right\}$ とおくと，対応 $P \mapsto \ker(P)$ が全単射 $\mathfrak{X}^{\mathrm{arith}}(\mathbf{I}) / \sim \cong \mathcal{A}(\mathbf{I})$ を導く．この事実に基づき，$\mathbf{I}/\ker(P)$ の $\overline{\mathbb{Q}}_p$ への埋め込み方を気にしないときは，$\mathcal{A}(\mathbf{I})$ の元を数論的点として扱うことがある．また，記号を濫用して $\mathcal{O}$-代数の準同型 $P \in \mathfrak{X}^{\mathrm{arith}}(\mathbf{I})$ の核も P で表すことがある．

以下，$\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(\chi, \mathbf{I})$ の元を $\mathbf{I}$-adic form と呼ぶ．定理 2.2 (Control Theorem) により，$\mathbf{I}$-adic form $F \in \mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(\chi, \mathbf{I})$ に対し，$\{P(F)\}_{P \in \mathfrak{X}^{\mathrm{arith}}(\mathbf{I})}$ は，数論的点の集合 $\mathfrak{X}^{\mathrm{arith}}(\mathbf{I})$ でパラメータ付けられた (重さ 2 以上の) モジュラー形式の族をなす．

練習 3.10. $P \in \mathfrak{X}^{\mathrm{arith}}(\mathbf{I})$ に対し，対応 $F = \sum_{n=0}^{\infty} a(n,F)q^n \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} P(a(n,F))q^n$ が同型

$$\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(\chi, \mathbf{I}) \otimes_{\mathbf{I}} \mathbf{I}/P \cong \mathcal{M}_k^{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(\mathbf{p}p^\alpha), \varepsilon\chi\omega^{-k}; P(\mathbf{I}))$$

を導くことを示せ．このことから特に $F \in \mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(\chi, \mathbf{I})$ に対し $P(F)$ が上の同型の右辺の元であること (すなわち古典的モジュラー形式であること) が確かめられる [ヒント：$\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(\chi, \mathbf{I})$ の定義は $\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(\chi, \Lambda) \otimes_\Lambda \mathbf{I}$ であった].

4. A review on Rankin product L-functions

L-関数は通常，複素数体に値をとるが，ある範囲の整数点での特殊値 (を周期で割ったもの) が代数的数になる場合に，そのような値を固定した埋め込みを介して $\overline{\mathbb{Q}}_p$ の元とみなし，p-進解析関数による補間の可能性を考える．

4.1. Rankin product L-関数とその特殊値.

ここでは §5.4 で定義された Rankin product L-関数の特殊値の代数性について振り返る．以下の設定のもとで議論を進める：

(P1) k, l がともに 2 以上の整数で $k > l$ を満たすとする．$\alpha, \beta \geq 1$ を整数として，$\chi_0 : (\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^\times \to \overline{\mathbb{Q}}^\times, \psi_0 : (\mathbb{Z}/p^\beta\mathbb{Z})^\times \to \overline{\mathbb{Q}}^\times$ をそれぞれ Dirichlet 指標とする．二つの代数の準同型

$$\lambda_0 : \mathbf{h}_k^{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(p^\alpha), \chi_0; \mathbb{Q}(\chi_0)) \to \overline{\mathbb{Q}};$$
$$\varphi_0 : \mathbf{h}_l(\Gamma_0(p^\beta), \psi_0; \mathbb{Q}(\psi_0)) \to \overline{\mathbb{Q}}$$

に対応する，正規化された Hecke 固有形式をそれぞれ

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_0(T(n))q^n \in \mathcal{S}_k^{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(p^\alpha), \chi_0; \mathbb{Q}(\lambda_0)),$$
$$h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_0(T(n))q^n \in \mathcal{S}_l(\Gamma_0(p^\beta), \psi_0; \mathbb{Q}(\varphi_0))$$

とする．ただし $\mathbb{Q}(\lambda_0) = \mathbb{Q}(\{\lambda_0(T(n)) \mid n = 1, 2, \ldots\})$ は f の Hecke 体である (φ_0 についても同様).

(P2) χ_0 は p^α を法として原始的，もしくは $\alpha = 1$ かつ法 p の自明な指標であるとする．

(P3) $\gamma = \max\{\alpha, \beta\}$ として，$\chi_0\psi_0^{-1}$ は p^γ を法として原始的であるとする．

定義 4.1 (§5.4, p.154)**.** 上記の f, h に伴う Rankin product L-関数 $D(s, f, h)$ を

$$D(s, f, h) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_0(T(n))^c \varphi_0(T(n)) n^{-s} \quad (\mathrm{Re}(s) > (k+l)/2 + 1)$$

で定める．ただし $\lambda_0(T(n))^c$ は $\lambda_0(T(n))$ の複素共役を表す．

練習 4.2. 素数 v に対し $\alpha_v, \alpha'_v, \beta_v, \beta'_v \in \overline{\mathbb{Q}}$ を

$$X^2 - \lambda_0(T(v))^c X + \chi_0^{-1}(v)v^{k-1} = (X - \alpha_v)(X - \beta_v),$$
$$X^2 - \varphi_0(T(v))X + \psi_0(v)v^{l-1} = (X - \alpha'_v)(X - \beta'_v)$$

で定める．$D(s,f,h)$ は $\mathrm{Re}(s)>(k+l)/2+1$ で絶対一様収束し，Euler 積表示

$$D(s,f,h)=\prod_v \frac{1-\chi_0^{-1}\psi_0(v)v^{k+l-2-2s}}{(1-\alpha_v\alpha'_v v^{-s})(1-\alpha_v\beta'_v v^{-s})(1-\beta_v\alpha'_v v^{-s})(1-\beta_v\beta'_v v^{-s})}$$

を持つことを示せ．ただし右辺は全ての素数 v に関する積である．

複素関数 $L(s,\lambda_0^c\otimes\varphi_0)$ を

$$L(s,\lambda_0^c\otimes\varphi_0)=L(2s+2-k-l,\chi_0^{-1}\psi_0)D(s,f,h)$$

で定める．$L(s,\lambda_0^c\otimes\varphi_0)$ の特殊値は以下の意味で代数的である：$g=hE_{k-l}(\chi_0\psi_0^{-1})$ とおくと g は $\mathcal{S}_k(\Gamma_0(p^\gamma),\chi_0;\mathbb{Q}(\chi_0,\varphi_0))$ に属する．g を $\mathcal{S}_k(\Gamma_0(p^\gamma),\chi_0;\mathbb{Q}(\chi_0,\varphi_0))$ の正規化された Hecke 固有形式の線形結合で表したときの f の係数を $c(f,g)$ とする．$\alpha\geq\beta$ ならば §5.4, pp.153–156 の計算と同様の方法で,

$$c(f,g)=\frac{p^{\alpha(k-l)}\Gamma(k-l)\Gamma(k-1)L(k-1,\lambda_0^c\otimes\varphi_0)}{\tau(\chi_0^{-1}\psi_0)(-2\pi\sqrt{-1})^{k-l}(4\pi)^{k-1}(f,f)_{\Gamma_0(p^\alpha)}} \tag{4.1}$$

となる．ただし $\tau(\chi_0^{-1}\psi_0)$ は指標 $\chi_0^{-1}\psi_0$ の Gauss 和で，$(f,f)_{\Gamma_0(p^\alpha)}$ は $\mathcal{S}_k(\Gamma_0(p^\alpha),\chi_0)$ 上の Petersson 内積である．$c(f,g)$ は定義から $\mathbb{Q}(\lambda_0,\varphi_0)$ の元だから，特に等式 (4.1) の右辺は代数的数である．従って f,h が p-進族の元を動くとき，$c(f,g)$ の p-進補間を考えることに意味がある．

4.2. **代数的 Petersson 内積．** 前節の議論にあるように，$D(s,f,h)$ の特殊値の代数的な部分は，正則保型形式の空間に定まる Petersson 内積を用いて記述される．この内積の定義は複素関数に特有であるため，p-進補間を考えるにあたりそのまま用いることができない．そこで以下のようにして “代数的” Petersson 内積を考える．

S を保型形式からなる空間で，Noether 整域 A 上の有限生成加群であるとする．さらに Hecke 作用素 $T(n)$ $(n=1,2,\ldots)$ が S に A-線形に作用しているとする．$h(S)$ を $T(n)$ $(n=1,2,\ldots)$ が A 上生成する $\mathrm{End}_A(S)$ の A-部分代数とする．これらが次の三つの性質を満たしていると仮定する：

(S1) A-加群の準同型 $f\mapsto\sum_{n=0}^\infty a(n,f)q^n$ が存在して S を $A[[q]]$ に埋め込める；
(S2) (S1) により誘導される A-双線形写像 $\langle\ ,\ \rangle : S\times h(S)\to A; (f,T)\mapsto a(1,f|T)$ が A-加群の同型 $S\cong\mathrm{Hom}_A(h(S),A)$ を導く；
(S3) K を A の商体として，$h(S)\otimes_A K$ が半単純．

例 4.3. 前節までに登場した $\mathcal{S}_k(\Gamma_0(\mathbf{p}p^{r(\varepsilon)}),\varepsilon\chi\omega^{-k};\mathcal{O}[\varepsilon])$，$\mathbf{h}_k(\Gamma_0(\mathbf{p}p^{r(\varepsilon)}),\varepsilon\chi\omega^{-k};\mathcal{O}[\varepsilon])$ や $\mathbf{S}^{\mathrm{ord}}(\chi,\mathbf{I})$，$\mathbf{h}^{\mathrm{ord}}(\chi,\mathbf{I})$ は (S1)–(S3) を満たす．

以下 $D=h(S)\otimes_A K$，$S(K)=D^*=\mathrm{Hom}_K(D,K)$ と書く．D は有限次元 K-ベクトル空間で代数の構造を持つから，体の有限次拡大と同様にして跡写像 $\mathrm{Tr}_{D/K}:D\to K$ が定義できる．仮定 (S3) により，この $\mathrm{Tr}_{D/K}$ が誘導する K-双線形写像

$$D\times D\to K; (T,T')\mapsto\mathrm{Tr}_{D/K}(TT')$$

は非退化で，K-ベクトル空間の同型 $i:D\cong D^*, i(T)(T')=\mathrm{Tr}_{D/K}(TT')$ を誘導する．

定義 4.4. K-双線形写像 $(\ ,\ )_A : S(K) \times S(K) \to K$ を

$$(f,g)_A = g(i^{-1}(f)) \quad (f,g \in S(K) = D^*)$$

で定め，これを A 上の代数的 Petersson 内積という．

練習 4.5. 代数的 Petersson 内積について，以下を示せ．

(1) 任意の $f, g \in S(K)$ と任意の $T \in D$ に対し $(f|T, g)_A = (f, g|T)_A$.

(2) 0 でない $f \in S$ が (S2) の同型により A-代数の準同型 $\lambda : h(S) \to A$ に対応 (任意の $T \in h(S)$ に対し $\lambda(T) = a(1, f|T)$) するとき，$(f,f)_A \neq 0$.

0 でない正規化された Hecke 固有形式 $f \in S$ と，$g \in S(K)$ に対し

$$c(f,g) = \frac{(f,g)_A}{(f,f)_A} \in K$$

とおく．この $c(f,g)$ は次のように特徴づけられる：

命題 4.6. K を (必要なら) 適当な K の有限次拡大体で置き換えて，$S(K)$ が正規化された Hecke 固有形式 $\{f_i\}$ からなる基底を持つようにできる．また，このような基底 $\{f_i\}$ は $(\ ,\ )_A$ に関する直交基底で，$g \in S(K)$ を f_i たちの線形結合で表したときの f_i の係数が $c(f_i, g)$ である．

練習 4.7 (命題 4.6 の証明)**.** 仮定 (S3) により K を (必要なら) 適当な K の有限次拡大体に置き換えて $D \cong \prod_{i=1}^r K$ とする．$\lambda_i : D \to K$ を i 番目の射影として，同型 (S2) により λ_i に対応する $S(K)$ の元を f_i とする．

(1) f_i は正規化された Hecke 固有形式であることを示せ．

(2) $(f_i, f_j)_A = \delta_{ij}$ となることを示せ．ただし δ_{ij} は Kronecker's delta である．

$A = \mathbb{C}$ のとき，$S(K) = \mathcal{S}_k(\Gamma_0(N), \chi)$ として §5.3, p.143 で定義された Petersson 内積 $(\ ,\ )_{\Gamma_0(N)}$ と今定義した代数的 Petersson 内積 $(\ ,\ )_{\mathbb{C}}$ を比較する．$\tau_N = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{smallmatrix}\right)$ と置いて，$S(K)$ 上の新たな内積 $(\ ,\ )_\infty$ を

$$(f,g)_\infty = (g, \tilde{f}|_k \tau_N)_{\Gamma_0(N)} \quad (f, g \in S(K))$$

で定める．ただし $\tilde{f}$ は $\tilde{f}(z) = f(-z^c)^c$ で定まる上半平面上の複素関数で，$f \in \mathcal{S}_k(\Gamma_0(N), \chi)$ のとき $\tilde{f} \in \mathcal{S}_k(\Gamma_0(N), \chi^{-1})$ となる．また，$\det\gamma > 0$ なる行列 $\gamma \in GL_2(\mathbb{R})$ に対し $f|_k\gamma$ は [石川] 第 2.1 節冒頭で定義されたものとする．$f \in S(K)$ が正規化された Hecke 固有形式ならば，任意の $g \in S(K)$ に対して

$$c(f,g) = \frac{(f,g)_{\mathbb{C}}}{(f,f)_{\mathbb{C}}} = \frac{(f,g)_\infty}{(f,f)_\infty}$$

が成り立つ．既に見たように $(\ ,\ )_{\mathbb{C}}$ は p-進的な設定に拡張できるが，抽象的に定義されるため具体的に値を計算するには向かない．一方で $(\ ,\ )_\infty$ は Petersson 内積を用いて定義されるため，具体的な計算が可能である．

練習 4.8. (1) Hecke 作用素が内積 $(\ ,\ )_\infty$ に関して自己随伴であることを示せ．つまり，任意の $f, g \in \mathcal{S}_k(\Gamma_0(N), \chi)$ と $T \in \mathbf{h}_k(\Gamma_0(N), \chi)$ に対し $(f|T, g)_\infty = (f, g|T)_\infty$ となることを確かめよ．

(2) $f \in \mathcal{S}_k(\Gamma_0(N), \chi)$ ならば $\tilde{f} \in \mathcal{S}_k(\Gamma_0(N), \chi^{-1})$ となることを示せ．

(3) 行列 τ_N が同型 $\mathcal{S}_k(\Gamma_0(N),\chi)\cong\mathcal{S}_k(\Gamma_0(N),\chi^{-1}); f\mapsto f|_k\tau_N$ を導くことを示せ．また，この同型の逆写像を求めよ．

(4) $f\in S(K)$ が 0 でない $\mathbb{C}$-代数の準同型 $\lambda:\mathbf{h}_k(\Gamma_0(N),\chi)\to\mathbb{C}$ に対応するとき，ある絶対値 1 の複素数 $W(\lambda)$ が存在して $\tilde{f}|_k\tau_N=N^{(k-2)/2}\chi(-1)W(\lambda)^c f$ となることを示せ．さらに $(f,f)_\infty\neq 0$ を示せ．

5. One-variable interpolation

この節では $c(f,g)$ のうち f のみを動かしたときの p-進補間を考える．$\mathcal{O}$ を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体の整数環で $\mathbb{Q}(\varphi_0)$ を含むものとする．$\Lambda=\mathcal{O}[[X]]$ とおき $\mathbf{L}$ を Λ の商体とする．$\chi:(\mathbb{Z}/\mathbf{p}\mathbb{Z})^\times\to\mathbb{Z}_p^\times$ を (Teichmüller 指標 ω の冪である) 偶指標とする．定理 3.3 より $\mathbf{h}^{\mathrm{ord}}(\chi,\mathbf{L})$ は半単純だから，$\mathbf{L}$ の有限次拡大体 $\mathbf{K}$ で $\mathbf{h}^{\mathrm{ord}}(\chi,\mathbf{K})\cong\prod_{i=1}^r\mathbf{K}$ となるものが取れる．このような $\mathbf{K}$ を一つ固定し，Λ の $\mathbf{K}$ の中での整閉包を $\mathbf{I}$ で表す．$F\in\mathbf{S}^{\mathrm{ord}}(\chi,\mathbf{I})$ を正規化された Hecke 固有形式，$\lambda:\mathbf{h}^{\mathrm{ord}}(\chi,\mathbf{I})\to\mathbf{I}$ を F に対応する $\mathbf{I}$-代数の準同型とする．$\mu=\mu_{\phi(\mathbf{p})}=\left\{\zeta\in\mathbb{Z}_p^\times\mid\zeta^{\phi(\mathbf{p})}=1\right\}$ として，指標 ψ_0 の μ への制限を $\psi_0|_\mu$ で表す．畳み込み積 $h*E(\chi(\psi_0|_\mu)^{-1}\omega^{-l})\in\mathbf{S}(\chi,\mathbf{L})$ は，整数 $k>l$ と位数有限の指標 $\varepsilon:W\to\overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ に対して

$$\varphi_{k,\varepsilon}(h*E(\chi(\psi_0|_\mu)^{-1}\omega^{-l}))=hE_{k-l}(\psi_0^{-1}\varepsilon\chi\omega^{-k})$$

を満たすのであった (第 2.1 節参照). 特に $(h*E(\chi(\psi_0|_\mu)^{-1}\omega^{-l}))|e\in\mathbf{S}^{\mathrm{ord}}(\chi,\mathbf{L})$ となる．

定義 5.1 (1 変数 p-進 L-関数)**.**

$$L_p(\lambda^c\otimes\varphi_0)=(F,(h*E(\chi(\psi_0|_\mu)^{-1}\omega^{-l}))|e)_{\mathbf{I}}\in\mathbf{K}$$

と定める．

注意 5.2. §7.4, p.224 の式 (4) では，定義 5.1 の $L_p(\lambda^c\otimes\varphi_0)$ を $(F,F)_{\mathbf{I}}$ で割ったものを 1 変数 p-進 L-関数の定義としている．しかし §7.4, p.228, ℓ.3 にあるように，F が正規化された Hecke 固有形式ならば $(F,F)_{\mathbf{I}}=1$ となるので，定義 5.1 では表示しなかった．

以下のようにして $L_p(\lambda^c\otimes\varphi_0)$ を $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}\text{-alg}}(\mathbf{I},\overline{\mathbb{Q}}_p)$ の部分集合の上の関数とみなすことができる．記号を濫用して $P\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}\text{-alg}}(\mathbf{I},\overline{\mathbb{Q}}_p)$ の核も P で表す．$L_p(\lambda^c\otimes\varphi_0)$ の分母が P と互いに素ならば，$\mathbf{I}_P$ を $\mathbf{I}$ の P による局所化とすると $L_p(\lambda^c\otimes\varphi_0)\in\mathbf{I}_P$．よって

$$L_p(\lambda^c\otimes\varphi_0)(P)=L_p(\lambda^c\otimes\varphi_0)\bmod P\mathbf{I}_P$$

は $\mathbf{I}/P$ の商体 $\mathbf{I}_P/P\mathbf{I}_P$ に値を持ち，$P:\mathbf{I}\to\overline{\mathbb{Q}}_p$ を介して $\overline{\mathbb{Q}}_p$ の元とみなせる．

記法 5.3. $\mathbf{I}$ の数論的点 $P\in\mathfrak{X}^{\mathrm{arith}}(\mathbf{I})$ が $P|_\Lambda=\varphi_{k,\varepsilon}$ を満たすとき

$$k(P)=k,\ \varepsilon_P=\varepsilon,\ \chi_P=\varepsilon\chi\omega^{-k},\ \lambda_P=P\circ\lambda,\ F(P)=P(F)$$

と表す．χ_P の導手を p^{α_P} で表し，$\delta_P=\max\{\beta-\alpha_P,0\}$ と書く．

$L_p(\lambda^c\otimes\varphi_0)$ は以下の意味で $c(f,g)$ を p-進的に補間している：

定理 5.4 (Theorem 7.4.1; §7.4, p.225)**.** $P \in \mathfrak{X}^{\mathrm{arith}}(\mathbf{I})$ を $\mathbf{I}$ の数論的点で，$L_p(\lambda^c \otimes \varphi_0)$ の分母が P と互いに素であるとする．また $(k(P), \chi_P, \lambda_P)$ と (l, ψ_0, φ_0) が条件 (P1)–(P3) を満たしているとする．このとき

$$L_p(\lambda^c \otimes \varphi_0)(P) = \left\{p^{k(P)-l}\lambda_P(T(p))^{-1}\varphi_0(T(p))\right\}^{\delta_P} \times \frac{p^{\alpha_P(k(P)-l)}\Gamma(k(P)-l)\Gamma(k(P)-1)L(k(P)-1, \lambda_P^c \otimes \varphi_0)}{\tau(\chi_P^{-1}\psi_0)(-2\pi\sqrt{-1})^{k(P)-l}(4\pi)^{k(P)-1}(F(P), F(P))_{\Gamma_0(p^{\alpha_P})}}$$

が成り立つ．

6. Two-variable interpolation

この節では $c(f, g), g = hE_{k-l}(\chi_0\psi_0^{-1})$ の f と h を同時に動かしたときの p-進補間を考える．$\mathbf{K}, \mathbf{I}, F, \lambda$ を第 5 節と同じものとする．$\mathbf{L}$ の有限次拡大体 $\mathbf{M}$ を新たに一つ固定して，Λ の $\mathbf{M}$ の中での整閉包を $\mathbf{J}$ で表す．$\psi : (\mathbb{Z}/\mathbf{p}\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{Z}_p^\times$ を偶指標とする．$G \in \mathbf{S}(\psi, \mathbf{J})$ を正規化された Hecke 固有形式，$\varphi : \mathbf{h}(\psi, \mathbf{J}) \to \mathbf{J}$ を G に対応する $\mathbf{J}$-代数の準同型とする．

記法 6.1. $\mathbf{J}$ の数論的点 $Q \in \mathfrak{X}^{\mathrm{arith}}(\mathbf{J})$ が $Q|_\Lambda = \varphi_{k,\varepsilon}$ を満たすとき

$$k(Q) = k,\ \varepsilon_Q = \varepsilon,\ \psi_Q = \varepsilon\psi\omega^{-k},\ \varphi_Q = Q \circ \varphi,\ G(Q) = Q(G)$$

と表す．また，ψ_Q の導手を p^{β_Q} で表す．

定義 6.2. $Q \in \mathfrak{X}^{\mathrm{arith}}(\mathbf{J})$ が G について admissible であるとは，$G(Q) \in (\mathbf{J}/Q)[[q]]$ がある $\mathcal{S}_{k(Q)}(\Gamma_0(p^{\beta_Q}), \psi_Q; \overline{\mathbb{Q}})$ の元の q-展開になることを言う．

注意 6.3. 定理 2.2 (Control Theorem) の帰結として，G が ordinary なら任意の数論的点が G について admissible である．しかし今は G が ordinary とは限らないので，任意の数論的点 $Q \in \mathfrak{X}^{\mathrm{arith}}(\mathbf{J})$ に対し $G(Q)$ がモジュラー形式の q-展開になっているとは限らない．なお，Q が G について admissible ならば，G が正規化された Hecke 固有形式であるから $G(Q)$ もまた然り．よって Proposition 7.2.1 (§7.2, p.201) より $G(Q)$ の Hecke 体を代数体とみなすことができる．

以下，$\mathbf{J}$-adic forms を考えるときは $\mathbf{J}$ を $\mathcal{O}[[Y]]$-代数とみなす．

$$\Lambda \hat{\otimes}_{\mathcal{O}} \mathbf{J} = \varprojlim_n \left((\mathcal{O}[X]/(\varpi, X)^n) \otimes_{\mathcal{O}} \mathbf{J}\right)$$

を完備テンソル積とする (ϖ は $\mathcal{O}$ の素元)．また，$Q \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}\text{-alg}}(\mathbf{J}, \overline{\mathbb{Q}}_p)$ に対し

$$\mathrm{id}_\Lambda \otimes Q : \Lambda \hat{\otimes}_{\mathcal{O}} \mathbf{J} \to \Lambda \otimes_{\mathcal{O}} (\mathbf{J}/Q); A \otimes B \mapsto A \otimes Q(B)$$

を $\mathbf{J}$ 成分に関する特殊化とする．以下 $\chi \neq \psi$ を仮定する ($\chi = \psi$ の場合は Theorem 7.4.3; §7.4, p.228 参照)．この仮定のもとで $E = E(\chi\psi^{-1}) \in \mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(\chi\psi^{-1}, \Lambda)$ に対し

$$(G * E)(X) = GE(\psi(u)^{-1}(1+Y)^{-1}(1+X) - 1) \in \mathbf{J}[[X]]$$

とおく．以下の補題により $G * E \in \mathbf{M}(\chi, \Lambda)\hat{\otimes}_{\mathcal{O}}\mathbf{J}$ となる：

補題 6.4. べき級数 $H = \sum_{n=1}^\infty a(n, H)q^n \in (\Lambda \hat{\otimes}_{\mathcal{O}} \mathbf{J})[[q]]$ に対し，ある整数 $a \geq 1$ が存在して，$\varepsilon_Q = 1$ かつ $k(Q) \geq a$ なる任意の数論的点 $Q \in \mathcal{A}(\mathbf{J})$ について $(\mathrm{id}_\Lambda \otimes Q)(H)$ が $\mathbf{M}(\chi, \Lambda \otimes_{\mathcal{O}} (\mathbf{J}/Q))$ に属するとする．このとき $H \in \mathbf{M}(\chi, \Lambda)\hat{\otimes}_{\mathcal{O}}\mathbf{J}$.

冪等射影子 $e : \mathbf{M}(\chi, \Lambda) \to \mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(\chi, \Lambda)$ を $\mathbf{J}$-線形に $\mathbf{M}(\chi, \Lambda)\hat{\otimes}_{\mathcal{O}}\mathbf{J}$ 上に延長したものも e で表し $(G * E)|e \in \mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(\chi, \Lambda)\hat{\otimes}_{\mathcal{O}}\mathbf{J}$ を考える．さらに $\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(\chi, \mathbf{I})$ 上の代数的 Petersson 内積 $(\ ,\ )_{\mathbf{I}}$ を $\mathbf{J}$-線形に延長したものを

$$(\ ,\ )_{\mathbf{I}\hat{\otimes}\mathbf{J}} : (\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(\chi, \mathbf{I})\hat{\otimes}_{\mathcal{O}}\mathbf{J}) \times (\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(\chi, \mathbf{I})\hat{\otimes}_{\mathcal{O}}\mathbf{J}) \to H^{-1}\mathbf{I}\hat{\otimes}_{\mathcal{O}}\mathbf{J}$$

で表す．ただし $H^{-1} \in \mathbf{K}$ は $(\ ,\ )_{\mathbf{I}}$ の分母である．

定義 6.5 (2 変数 p-進 L-関数)**.**

$$L_p(\lambda^c \otimes \varphi) = (F, (G * E)|e)_{\mathbf{I}\hat{\otimes}\mathbf{J}} \in H^{-1}\mathbf{I}\hat{\otimes}_{\mathcal{O}}\mathbf{J}$$

と定める．

以下のようにして $L_p(\lambda^c \otimes \varphi)$ を $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}\text{-alg}}(\mathbf{I}, \overline{\mathbb{Q}}_p) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}\text{-alg}}(\mathbf{J}, \overline{\mathbb{Q}}_p)$ 上の関数とみなす．$(P, Q) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}\text{-alg}}(\mathbf{I}, \overline{\mathbb{Q}}_p) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}\text{-alg}}(\mathbf{J}, \overline{\mathbb{Q}}_p)$ に対し

$$L_p(\lambda^c \otimes \varphi)(P, Q) = (\mathrm{id}_\Lambda \otimes Q)(L_p(\lambda^c \otimes \varphi))(P)$$

と書く．特に G について admissible な任意の数論的点 $Q \in \mathfrak{X}^{\mathrm{arith}}(\mathbf{J})$ に対し

$$(\mathrm{id}_\Lambda \otimes Q)(L_p(\lambda^c \otimes \varphi)) = L_p(\lambda^c \otimes \varphi_Q)$$

が成り立つ．ただし右辺は定義 5.1 の 1 変数 p-進 L-関数である．$L_p(\lambda^c \otimes \varphi)$ は以下の意味で $c(f, g)$ を p-進的に補間している：

定理 6.6 (Theorem 7.4.2; §7.4, p.227)**.** $(P, Q) \in \mathfrak{X}^{\mathrm{arith}}(\mathbf{I}) \times \mathfrak{X}^{\mathrm{arith}}(\mathbf{J})$ が数論的点の組で，Q が G について admissible，P が $L_p(\lambda^c \otimes \varphi_Q)$ の分母と互いに素，かつ $(k(P), \chi_P, \lambda_P)$ と $(k(Q), \psi_Q, \varphi_Q)$ が条件 (P1)–(P3) を満たしているとする．このとき

$$\begin{aligned} L_p(\lambda^c \otimes \varphi)(P, Q) = &\left\{p^{k(P)-k(Q)}\lambda_P(T(p))^{-1}\varphi_Q(T(p))\right\}^{\delta_{P,Q}} \\ &\times \frac{p^{\alpha_P(k(P)-k(Q))}\Gamma(k(P)-k(Q))\Gamma(k(P)-1)L(k(P)-1, \lambda_P^c \otimes \varphi_Q)}{\tau(\psi_Q\chi_P^{-1})(-2\pi\sqrt{-1})^{k(P)-k(Q)}(4\pi)^{k(P)-1}(F(P), F(P))_{\Gamma_0(p^{\alpha_P})}} \end{aligned}$$

が成り立つ．ただし $\delta_{P,Q} = \max\{\beta_Q - \alpha_P, 0\}$ である．

References

[H86a] H. Hida, Iwasawa modules attached to congruences of cusp forms, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 19 (1986), no. 2, 231–273.

[H86b] H. Hida, Galois representations into $GL_2(\mathbb{Z}_p[[X]])$ attached to ordinary cusp forms, Invent. Math. 85 (1986), no. 3, 545–613.

[LFE] H. Hida, *Elementary theory of L-functions and Eisenstein series,* London Mathematical Society Student Texts 26, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[Wi1] A. Wiles, On ordinary λ-adic representations associated to modular forms, Invent. Math. 94 (1988), 529–573.

[Wa] Lawrence C. Washington, *Introduction to Cyclotomic Fields,* Second Edition, Graduate Texts in Mathematics 83, Springer-Verlag, New York, 1997, xiv+487 pp.

[石川] I. Ishikawa, 整数論 SAMA- SUKU-RU レジュメ，第 24 回 (2016 年度) 整数論サマースクール「H. Hida, “Elementary Theory of L-functions and Eisenstein Series” の第 7.1 節と第 7.2 節の概説」講演予稿.