Hecke 固有形式に付随するガロア表現の構成について

（SS2016 予稿, Hida LFE §7.5 の概説）

植木 潤　August 15, 2016

Abstract

本稿は第 24 回（2016 年度）整数論サマースクールにおける講演の予稿である。筆者の講演および本稿では、[Hid93]（Hida LFE、いわゆる青本）の §7.5 を概観する。節の目的は、$\mathbb{I}$ 進 Hecke 固有形式 F に付随するガロア表現の構成を与えることである。まず連続ガロア表現の定義を述べ、次に剰余表現の族から連続表現を得る。その際に擬表現の技術を用いる。

記号　素数 p を固定する。$\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大を取り、その整数環を $\mathcal{O}$ とし、$\Lambda = \mathcal{O}[[X]]$ とおく。Λ の商体 $\mathbb{L} = \mathrm{Frac}(\Lambda)$ の有限次拡大 $\mathbb{K}$ を取り、$\mathbb{K}$ における Λ の整閉包を $\mathbb{I}$ とおく（このとき $\mathbb{K}$ は $\mathbb{I}$ の商体である）。$\mathbb{I}$ の素イデアル P に対し、商体 $K_P = \mathrm{Frac}(\mathbb{I}/P)$ における $\mathbb{I}/P$ の整閉包を A_P とおく。

本稿では、$\mathbb{I}$ 進 Hecke 固有形式 F に付随するガロア表現の構成を与える。

1　主定理（Hecke 固有形式 F に付随する連続ガロア表現の存在）

定義 1.1. Galois 表現 $\pi : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ が**連続**とは、以下の条件を満たすような部分 $\mathbb{I}$ 加群 $L \subset \mathbb{K}^2$ が存在することをいう。

1. L は $\mathbb{I}$ 上有限型で、$L \otimes_{\mathbb{I}} \mathbb{K} = \mathbb{K}^2$（即ち L は $\mathbb{K}^2$ の lattice）、
2. L は π 安定 （$\pi : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{End}_{\mathbb{I}}(L)$ に落ちる）、
3. $\pi : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{End}_{\mathbb{I}}(L)$ は $\mathfrak{m}$ 進位相について連続（ここに $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_{\mathbb{I}}$ は $\mathbb{I}$ の極大イデアルとする）。

演習 1.2. 上の定義は L の取り方に依らない。つまり π が連続でありかつ条件 1 と 2 を満たす L があったとき、L は条件 3 も満たす。（Artin–Rees の補題を用いる：R を Noether 環、M を有限 R 加群、$N \subset M$ を部分 R 加群とするとき、ある $c > 0$ が存在して任意の $n \geq c$ に対して $I^n M \cap N = I^{n-c}(I^c M \cap N)$ を満たす。とくに $I^n N \subset I^n M \cap N \subset I^{n-c} N$ である。）

上の定義は以下の事情による: $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ は Krull 位相について compact である。しかし $\mathbb{I}$ は Krull 次元 =2 の大きな環であり、$\mathbb{K}$ は離散でない位相体の位相について局所 compact ではありえない（なお位相体の位相は定義により密着位相ではない）。つまり $\mathbb{K}$ には compact 集合が小さいような位相しか入らず、$\mathbb{K}$ の位相について連続な表現 $\pi : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ は像が小さい。すると扱いたい表現が連続とならない。一方で $\mathrm{End}_{\mathbb{I}}(L)$ は compact である。実際、定義の条件 1 より $\mathbb{I}$ 加群の全射準同型 $\varphi : \mathbb{I}^n \twoheadrightarrow L$ があり、各 i に対し $L/\mathfrak{m}^i L$ は $(\mathbb{I}/\mathfrak{m}^i)^n$ の像に一致し有限加群なので、$\mathrm{End}_{\mathbb{I}}(L)$ は副有限環である。

演習 1.3. (1) $\mathbb{K}$ の位相体としての位相であって、$\mathbb{I}$ を開集合とし、相対位相が $\mathfrak{m}$ 進位相となるようなものは

存在しない（ヒント: p 倍または X 倍が開写像でないことを用いる）。
(2) $\mathbb{K}$ は非自明な位相について局所コンパクト位相体とならない。離散でない位相を持った局所コンパクト位相体は $\mathbb{R}$、$\mathbb{C}$、また $\mathbb{Q}_p$ と $\mathbb{F}_q((t))$ の有限次拡大で尽くされる（[Wei95, Chapter 1]）。

定義 1.4. Galois 表現 π が素数 ℓ で不分岐とは、ℓ の惰性群 $<\mathrm{Ker}\,\pi$ なることを言う。

このとき ℓ での幾何的フロベニウス元 Frob_ℓ の作用が well-defined となる。つまり Frob_ℓ の $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ への持ち上げの π による像は、持ち上げの取り方によらない。これを $\pi(\mathrm{Frob}_\ell)$ と書く。

定理 1.5 ([Hid93] §7.5. Theorem 1; Hida [Hid86])**.** $\mathbb{I}$ 代数準同型 $\lambda : \mathbf{h}^{\mathrm{ord}}(\chi, \mathbb{I}) \to \mathbb{I}$ に対応する正規化された $\mathbb{I}$ 進 Hecke 固有形式 $F \in \mathbf{S}^{\mathrm{ord}}(\chi, \mathbb{I})$ に対し、次を満たす $\pi : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ が存在する:

1. 連続、絶対既約、
2. p 外不分岐、
3. 各 $\ell \neq p$ に対し $\det(1 - \pi(\mathrm{Frob}_\ell)X) = 1 - \lambda(T(\ell))X + \chi(\ell)\ell^{-1}\kappa(\langle\ell\rangle)X^2$。

ここに $\kappa : W = 1 + p\mathbb{Z}_p \to \Lambda^\times : u^s \mapsto (1+X)^s$、$\langle x \rangle = \omega(x)^{-1}x \in W$、$\omega$ はタイヒミュラー指標である。

なお次に気をつけておくと良い。

演習 1.6. Galois 表現 $\pi : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ が連続ならば、任意の $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ について $\det(1 - \pi(\sigma)X) \in \mathbb{I}[X]$ である（ヒント：$\wedge^2(1 - \pi(\sigma)X) \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}[X]}(\wedge^2\mathbb{K}[X]) \cong \mathbb{K}[X]$ は $\mathbb{I}[X]$ 上整である)。

定理 1.5 については、第 2 節で系を見た後、第 3 節で証明を与える。

2 表現の還元と剰余表現（[Hid93] §7.5. Theorem 1 の系）

Galois 表現 π が与えられていた時、$\mathbb{I}$ の素イデアル $P \neq 0$ での π の還元 $\pi \bmod P : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{End}_{\mathbb{I}}(L/PL)$ を考えたい。$K_P = \mathrm{Frac}(\mathbb{I}/P)$ を $\mathbb{I}/P$ の商体、$\overline{K}_P$ をその代数閉包とする。これは自然な付値位相（これも $\mathfrak{m}$ 進位相と呼ぶ）について局所 compact である。

もし $L \cong \mathbb{I}^2$ なら、$\mathrm{End}_{\mathbb{I}}(L/PL) \cong \mathrm{M}_2(\mathbb{I}/P) \hookrightarrow \mathrm{M}_2(K_P)$ なので、これは $\pi' : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}_2(K_P)$ であって次を満たすものを定める:

(1a) p 外不分岐、
(1b) 各 $\ell \neq p$ に対して $\det(1 - \pi'(\mathrm{Frob}_\ell)X) = 1 - \lambda(T(\ell))(P)X + \chi(\ell)\ell^{-1}\kappa(\langle\ell\rangle)(P)X^2$.

もし $P \cap \Lambda = P_{k,\varepsilon}\Lambda$ なら、$\lambda(T(\ell))(P) = a(\ell, F(P))$, $\chi(\ell)\ell^{-1}\kappa(\langle\ell\rangle)(P) = \varepsilon\chi\omega^{-k}(\ell)\ell^{k-1} = \chi_P(\ell)\ell^{k-1}$ である（[Hid93] §7.3. Theorem 3 を参照のこと）。

定義 2.1. 定理 1.5 の連続 Galois 表現 $\pi : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ を考える。$\mathbb{I}$ の素イデアル $P \neq 0$ について、Galois 表現 $\pi(P) : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}_2(\overline{K}_P)$ が π の P における剰余表現であるとは、次を満たすことをいう：

1. $\overline{K}_P$ の位相について連続、
2. 半単純、
3. (1a) と (1b)。

もし $L \cong \mathbb{I}^2$ ならば、任意の $P \neq 0$ に対して剰余表現 $\pi(P)$ が存在する。実際、$\mathbb{I}$ は Krull 次元が 2 であり、K_P は $\mathfrak{m}$ 進位相について局所 compact である。先程の π' は、$\mathfrak{m}$ 進位相について連続な表現 π を $\bmod P$ で還元したものなので、K_P の $\mathfrak{m}$ 進位相について連続である。よって π' の半単純化を $\pi(P)$ とおけばよい。実は $L \cong \mathbb{I}^2$ でないときにも、次が成り立つ:

系 2.2 ([Hid93] 7.5. Corollary 1)**.** $\mathbb{I}$ の任意の素イデアル $P \neq 0$ に対し π の剰余表現 $\pi(P)$ が存在し、それは $\overline{K}_P$ 上の同型を除き一意である。

証明は P の高さに関する帰納法で行う。

Proof. Step 1. 高さが 1 の素イデアル P について示す。まず、$\mathbb{I}$ の P での局所化 $\mathbb{I}_P$ は付値環である。実際、Λ は UFD、$P \cap \Lambda$ の点での局所化 Λ_P は付値環であり、$\mathbb{I}_P$ は Λ_P の有限次正規拡大であるためまた付値環である。また π の連続性の定義を満たす $L \subset \mathbb{K}^2$ を取ると、$V = L \otimes_{\mathbb{I}} \mathbb{I}_P$ は π 安定かつ $V \otimes \mathbb{K} = \mathbb{K}^2$ である。くわえて L が有限生成であることに注意すると、$V \cong \mathbb{I}_P^2$ である。以上により $\pi : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{I}_P)$ を得る。$\pi \bmod P$ の半単純化を取ることで、剰余表現 $\pi(P)$ を得る。

$\pi(P)$ の一意性は、定義により $\mathrm{tr}(\pi(P)(\mathrm{Frob}_\ell)) = \lambda(T(\ell))(P)$ であることと、Frob_ℓ（の持ち上げ）が $\mathbb{Q}$ の p 外不分岐最大 Galois 拡大の Galois 群において稠密であることから従う。

Step 2. 高さが 2 の（一意な）素イデアル $\mathfrak{m}$ について、高さが 1 の場合に帰着する。高さ 1 の素イデアル P を取る。Λ を $\Lambda/P \cap \Lambda$ に取り替え、$\mathbb{I}$ を $\mathrm{Frac}(\mathbb{I}/P)$ における $\Lambda/P \cap \Lambda$ の整閉包 $\mathbb{I}'$ に取り替える。$\mathbb{I}'$ の素イデアル P' であって高さ 1 のものを取ると、その $\mathbb{I}$ への引き戻しは $\mathfrak{m}$ である。P' に対し、$\pi \bmod P$ について Step1 と同様の議論を用いて、$(\pi \bmod P) \bmod P'$ という剰余表現を得るが、これは π の $\mathfrak{m}$ での剰余表現である。■

3 F に付随する剰余表現（[Hid93] §7.5. Theorem 1 の証明）

Galois 表現が与えられていない時にも、定理 1 の Hecke 固有形式 F に付随する剰余表現という概念を考える。高さが 1 で剰余標数が 0 であるような $\mathbb{I}$ の素イデアルの全体を $\mathfrak{X}(\mathbb{I})$ とおく。

定義 3.1. 正規化された $\mathbb{I}$ 進 Hecke 固有形式 $F \in \mathbf{S}^{\mathrm{ord}}(\chi, \mathbb{I})$ を考え、F から定まる Hecke 環 $\mathbf{h}^{\mathrm{ord}}(\chi, \mathbb{I})$ 上の $\mathbb{I}$ 代数準同型を λ とする。このとき素イデアル $P \in \mathfrak{X}(\mathbb{I})$ に対し、表現 $\pi' : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}_2(A_P)$ であって、連続かつ半単純であり (1a) と (1b) を満たすものを、(F に付随する) P での剰余表現とよぶ。

定理 1.5 ([Hid93] §7.5. Theorem 1) の証明は、次の 2 つの定理によって与えられる。それぞれ、無限個の P に対して剰余表現 $\pi(P)$ が存在することと、そのとき π が存在することを主張する。

定理 3.2 ([Hid93] §7.5. Theorem 2; Deligne, et. al. [Shi71], [Del71], [DS74])**.** $M/\mathbb{Q}_p$ を有限次拡大とし、$\lambda : \mathbf{h}_k(\Gamma_0(N), \chi; \mathbb{Z}[\chi]) \to M$ を代数の準同型とする（$\mathbb{N}$ は任意の正整数）。このときガロア表現 $\pi : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}_2(M)$ であって次を満たすものが存在する:

1. 連続、M 上絶対既約、
2. $\mathrm{N}p$ 外不分岐、
3. $\ell \nmid \mathrm{N}p$ なる任意の素数 ℓ に対して $\det(1 - \pi(\mathrm{Frob}_\ell)X) = 1 - \lambda(T(\ell))X + \chi(\ell)\ell^{k-1}X^2$、
4. $\chi(-1) = (-1)^k$ であるので、$\mathfrak{c}$ を複素共役とすると $\det(\pi(\mathfrak{c})) = \chi(-1)(-1)^{k-1} = -1$。

定理 3.3 ([Hid93] §7.5. Theorem 3; Wiles [Wil88])**.** F を $\mathbb{I}$ 進 Hecke 固有形式とする。もし、ある無限集合 $S \subset \mathfrak{X}(\mathbb{I})$ があって、各 $P \in S$ に対し (F に付随する) 剰余表現 $\pi(P) : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}_2(A_P)$ が存在するならば、定理 1.5 の条件を満たす表現 $\pi : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ が存在する。

上の 2 つの定理を用いて定理 1.5 を示す:

Proof of 定理 *1.5.* F が ordinary なら $S = \mathcal{A}(\mathbb{I})$ が取れる（[小澤] 注意 3.9)。そうでない時も、F について許容的（admissible）な $\mathcal{A}(\mathbb{I})$ の点の全体を S とすれば良い（[小澤] 定義 6.2, 注意 6.3)。すなわち、$P \in \mathfrak{X}(\mathbb{I})$ であって $F \bmod P$ が重さ ≥ 2 の古典的保型形式であるようなもの全体の集合を S とすると、これは Λ-adic form の定義から無限集合である。また定理 3.2 によって、各 $P \in S$ に対して剰余表現 $\pi(P)$ が存在する。よってこの S は定理 3.3 の仮定を満たす。■

注意 3.4. 与えられた $\mathbb{I}$ 進 Hecke 固有形式 F に対して、定理 3.3 を用いてガロア表現の存在を言うには、無限個の $P_{k,\varepsilon}$ であって $F \bmod P_{k,\varepsilon}$ が古典的保型形式であるもの、およびそれらに対応するガロア表現の存在が必要である。F が ordinary な場合は、全ての $P_{k,\varepsilon}$ $(k \geq 1)$ で古典的となるので、特に $P_{2,\varepsilon}$ の全体を考えればよく、これには Eichler–志村の結果があった ([Shi71] Theorem 7.24)。定理 1.5 のガロア表現の存在は、Deligne の結果を用いずとも言える。

注意 3.5. 定理 1.5 の主張で先に F が与えられているときは、λ を持ち出さずに、条件 3 での $\lambda(T(\ell))$ を $a(F, \ell)$ に置き換えることで、ordinary という条件を外すことができる。対応 $\lambda \leftrightarrow F$ のところでだけ、ordinary な Λ-adic form の duality を用いている。

4 擬表現を用いた [Hid93] §7.5. Theorem 3 (Wiles) の証明

ここでは定理 3.3 の証明を与える。簡単のため $p > 2$ とする。$P \in S$ を取り、$K_P = \mathrm{Frac}(\mathbb{I}/P)$ における $\mathbb{I}/P$ の整閉包を引き続き A_P と書く。F に付随する剰余表現 $\pi = \pi(P)$ は p 外不分岐ゆえ、G を $\mathbb{Q}$ の p 外不分岐最大拡大の Galois 群とし、$\pi = \pi(P) : G \to \mathrm{GL}_2(A_P)$ としてよい。$L = A_P^2$ を π によって G 加群と見る。

$\mathfrak{c}$ を複素共役とすると $\mathfrak{c}^2 = 1, \det(\pi(\mathfrak{c})) = -1$ より $\pi(\mathfrak{c})$ の固有値は ± 1 である。固有空間分解 $L = L_+ \oplus L_- \cong A_P^2$ に対応する基底を固定すると $\pi(\mathfrak{c}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ という行列表示を得る。

$\sigma, \tau \in G$ に対し $\pi(\sigma) = \begin{pmatrix} a(\sigma) & b(\sigma) \\ c(\sigma) & d(\sigma) \end{pmatrix}$, $x(\sigma, \tau) = b(\sigma)c(\tau)$ とおく。すると以下が成り立つ:

(2a) a, d, x は連続、

(2b) $a(\sigma\tau) = a(\sigma)a(\tau) + x(\sigma, \tau)$, $d(\sigma\tau) = d(\sigma)d(\tau) + x(\tau, \sigma)$、
$x(\sigma\tau, \rho\gamma) = a(\sigma)a(\gamma)x(\tau, \rho) + a(\gamma)d(\tau)x(\sigma, \rho) + a(\sigma)d(\rho)x(\tau, \gamma) + d(\tau)d(\rho)x(\sigma, \gamma)$ by 成分表示、

(2c) $a(1) = d(1) = d(\mathfrak{c}) = 1, a(\mathfrak{c}) = -1$, $\rho = 1$ or $\mathfrak{c}$ に対し $x(\sigma, \rho) = x(\rho, \tau) = 0$、

(2d) $x(\sigma, \tau)x(\rho, \eta) = x(\sigma, \eta)x(\rho, \tau)$。

定義 4.1. 今考えている位相群 G と位相環 R に対し $a, d : G \to R$, $x : G^2 \to R$ の組 $\pi' = (a, d, x)$ であって (2a)〜(2d) を満たすものを、G から R への擬表現という。擬表現 π' に対し tr, det $: G \to R$ を

$\mathrm{tr}(\pi')(\sigma) = a(\sigma) + d(\sigma)$, $\det(\pi')(\sigma) = a(\sigma)d(\sigma) - x(\sigma,\sigma)$ $(\sigma \in G)$ によって定める。

命題 4.2 ([Hid93] §7.5. Proposition 1)**.** R が整域のとき、G から R への擬表現 $\pi' = (a,d,x)$ に対し、ある表現 $\pi : G \to \mathrm{GL}_2(\mathrm{Frac}(R))$ であって $\mathrm{tr}\,\pi = \mathrm{tr}\,\pi', \det\pi = \det\pi'$ なるものが存在する。

この命題の証明は面白いので、本稿の最後に方針を記す。

命題 4.3 ([Hid93] §7.5. Proposition 2)**.** 2 つのイデアル $\mathfrak{a}_i \subset \mathbb{I}$ $(i = 1,2)$ に対し、G から $\mathbb{I}/\mathfrak{a}_i$ への擬表現 $\pi(\mathfrak{a}_i)$ $(i = 1,2)$ たちが整合的であるとする。すなわち、ある稠密な部分集合 $\Sigma \subset G$ の上の写像 $\mathrm{tr}, \det : \Sigma \to \mathbb{I}/\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2$ があって、Σ 上で $\mathrm{tr}\,\pi(\mathfrak{a}_i) \equiv \mathrm{tr}$, $\det\pi(\mathfrak{a}_i) \equiv \det \bmod \mathfrak{a}_i$, $(i = 1,2)$ である。

このとき、G から $\mathbb{I}/\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2$ への擬表現 $\pi(\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2)$ であって、Σ の上で $\mathrm{tr}\,\pi(\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2) = \mathrm{tr}$, $\det\pi(\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2) = \det$ を満たすものが存在する。

以下では上の 2 つの命題を用いて定理 3.3 を示す:

Proof of 定理 3.3. $\Sigma = \{\mathrm{Frob}_\ell$(の持ち上げたち)$\mid \ell \neq p\} \subset G$ は稠密である。$\mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_\ell) = a(F,\ell)$, $\det(\mathrm{Frob}_\ell) = \chi(\ell)\ell^{-1}\kappa(\langle\ell\rangle)$ とおく。$S = \{P_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ と添字付ける。$\pi(P_i)$ が定める擬表現 π'_i たちは整合的である。

この π'_i たちから、G から $\mathbb{I}/P_1 \cap \cdots \cap P_i$ への擬表現 π'^i たちを、命題 4.3 を用いて次のように再帰的に構成する: まず $\pi'^1 = \pi'_1$ と定める。π'^1 と π'_2 から命題 4.3 によって得られる擬表現を π'^2 とおく。以下同様にする。このとき $\mathrm{tr}(\pi'^i)$ たちは明らかに逆系をなす。

$\mathrm{tr}\,\pi'^i$ によって a_i, d_i, x_i が表せ、よってこれらも逆系をなす: $a_i(\sigma) = (\mathrm{tr}\,\pi'^i(\sigma) - \mathrm{tr}\,\pi'^i(\sigma\mathfrak{c}))/2$, $d_i(\sigma) = (\mathrm{tr}\,\pi'^i(\sigma) + \mathrm{tr}\,\pi'^i(\sigma\mathfrak{c}))/2$, $x_i(\sigma,\tau) = a_i(\sigma,\tau) - a_i(\sigma)a_i(\tau)$. これより G から $\mathbb{I}$ への擬表現 $\pi' = \varprojlim_i \pi'^i$ が定まる。すると命題 4.2 から、連続表現 π であって $\mathrm{tr}\,\pi = \mathrm{tr}\,\pi', \det\pi = \det\pi'$ なるものが得られる。■

演習 4.4. 自然な射 $\mathbb{I} \to \varprojlim_i \mathbb{I}/P_1 \cap \cdots \cap P_i$ は同型である。($\mathbb{I}$ が compact Hausdorff Noether であることを用いる。)

5 命題 4.2([Hid93] §7.5. Proposition 1) の証明

最後に命題 4.2 の証明の方針を述べる。次の 2 つの場合に分けて考える。

Proof of 命題 4.2. Case 1. ある $\rho,\gamma \in G$ に対して $x(\rho,\gamma) \neq 0$ であるとき、$c(\sigma) = x(\rho,\sigma)$, $b(\sigma) = x(\sigma,\gamma)/x(\rho,\gamma)$ とおき、$\pi(\sigma) = \begin{pmatrix} a(\sigma) & b(\sigma) \\ c(\sigma) & d(\sigma) \end{pmatrix}$ とおくと、π が求める表現となる。

Case 2. 全ての $\rho,\gamma \in G$ に対して $x(\rho,\gamma) = 0$ であるとき、$\pi(\sigma) = \begin{pmatrix} a(\sigma) & 0 \\ 0 & d(\sigma) \end{pmatrix}$ とおけば良い。■

演習 5.1. 証明を完成させよ。

謝辞 勉強の機会を下さった山上敦士先生、本稿について詳細なコメントを下さった石川勲さん、小澤友美さん、三原朋樹さん、勉強会で色々なコメントを下さった他の発表者の方々、および山下剛先生に感謝します。

References

[Del71] Pierre Deligne, *Formes modulaires et représentations l-adiques*, Séminaire Bourbaki. Vol. 1968/69: Exposés 347–363, Lecture Notes in Math., vol. 175, Springer, Berlin, 1971, pp. Exp. No. 355, 139–172. MR 3077124

[DS74] Pierre Deligne and Jean-Pierre Serre, *Formes modulaires de poids* 1, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **7** (1974), 507–530 (1975). MR 0379379

[Hid86] Haruzo Hida, *Galois representations into* $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p[[X]])$ *attached to ordinary cusp forms*, Invent. Math. **85** (1986), no. 3, 545–613. MR 848685 (87k:11049)

[Hid93] ———, *Elementary theory of L-functions and Eisenstein series*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 26, Cambridge University Press, Cambridge, 1993. MR 1216135

[Shi71] Goro Shimura, *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*, Publications of the Mathematical Society of Japan, No. 11. Iwanami Shoten, Publishers, Tokyo; Princeton University Press, Princeton, N.J., 1971, Kanô Memorial Lectures, No. 1. MR 0314766

[Wei95] André Weil, *Basic number theory*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1995, Reprint of the second (1973) edition. MR 1344916

[Wil88] Andrew Wiles, *On ordinary λ-adic representations associated to modular forms*, Invent. Math. **94** (1988), no. 3, 529–573. MR 969243 (89j:11051)

他に [小澤] で小澤さんの予稿（[Hid93] §7.3, 7.4 の概説）を引用しました。

他の予稿では、[Hid93] は [LFE] という形でも引用されています。