"On Λ-adic forms of half integral weight for $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Q}$" の概説

Kenji MAKIYAMA

Contents

1. 導入

整数 a に対し, χ_a で [MFM, (3.1.9)] により定義される *Kronecker symbol*

(1-0-1) $$\chi_a(b) := \left(\frac{a}{b}\right)$$

を表す. 正整数 n に対し, cusp 形式 f の n 番目の Fourier 係数を $a_n(f)$ と書く. [H95] の主目的は以下の定理の (1-0-3) の Λ 進版を得ることである:

Waldspuger の結果 ([W81, Corollaire 2, p.379] or [P, Corollary 5.2] for English ver.)**.** k を正整数とし $\kappa := 2k+1$ とおく. $\phi \in S_{2k}^{\mathrm{new}}(M_\phi, \chi^2)$ を *primitive form* とし π を ϕ に付随する保型表現とする. 任意の素数 ℓ に対して,

(H_ℓ) $$\pi \text{ の } \ell \text{ 成分 } \pi_\ell \text{ が主系列表現 } \pi(\alpha,\beta) \text{ のとき} \alpha(-1) = \beta(-1) = 1$$

であることを仮定する. M_ϕ が $N/2$ を割り切る正整数 N に対して $f \in S_{\kappa/2}(N, \chi, \phi)$ が存在することを仮定する. このとき平方因子を持たない正整数の組 (m, n) で $m/n \in \prod_{\ell|N}(\mathbb{Q}_\ell^\times)^2$ となるものに対し,

(1-0-2) $$a_m(f)^2 L(1/2, \pi\otimes\chi^{-1}\chi_{(-1)^k n})\chi(n/m)n^{k-1/2} = a_n(f)^2 L(1/2, \pi\otimes\chi^{-1}\chi_{(-1)^k m})m^{k-1/2}$$

($\chi_{(-1)^k n}$ は $a = (-1)^k n$ に関する *Kronecker symbol*). 特に, もし $L(1/2, \pi\otimes\chi^{-1}\chi_{(-1)^k m}) \neq 0$ ならば,

(1-0-3) $$\frac{a_n(f)^2}{a_m(f)^2} = \frac{L(1/2, \pi\otimes\chi^{-1}\chi_{(-1)^k n})}{L(1/2, \pi\otimes\chi^{-1}\chi_{(-1)^k n})}\chi(n/m)(n/m)^{k-1/2}.$$

Remark 1.1. $S_{\kappa/2}(N, \chi, \phi)$ の正確な定義は [P, p.218] にある.

(1) $f \in S_{\kappa/2}(N, \chi)$ とする ($S_{\kappa/2}(N, \chi)$ については Remark 2.1 を参照). 以下のうち一つを仮定する:
  (a) $\kappa \geq 5$.
  (b) N は平方因子を持たない.
  (c) N は立方因子を持たないかつ $\chi = \mathbb{1}$.

Date: March 7, 2019.

このとき $f \in S_{\kappa/2}(N,\chi,\phi)$ であることと, ほとんど全ての素数 $\ell \nmid N$ に対して $f|T_{\ell^2} = a_\ell(\phi)f$ であることは同値である.

(2) Flicker の定理 ([W81, Proposition 2] or [P, Theorem 5] for English ver. and proof is in [F]) より, 任意の素数 ℓ に対する仮定 (H_ℓ) は $S_{\kappa/2}(N,\chi,\phi) \neq 0$ となる正整数 N が存在することと同値である.

(3) Vigneras の定理 ([P, Theorem 6] and proof is in [V]) より, $\chi^2 = \mathbb{1}$ ならば任意の素数 ℓ に対する仮定 (H_ℓ) が成り立つ.

Notation and terminology. $p \geq 5$ を素数とし $\mathbb{C}_p$ を $\mathbb{Q}_p$ の代数閉包 $\bar{\mathbb{Q}}_p$ の p 進完備化とする. $\mathbb{C}_p$ は [H95] では Ω_p と書かれていることを注意しておく. 埋め込み $i_\infty : \bar{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$, $i_p : \bar{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_p$ を固定し, 同型 $\mathbb{C}_p \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ で i_∞ と i_p とがこの同型を介して可換になるものを固定する. ord_p を $\mathrm{ord}_p(p) = 1$ となるように正規化された $\mathbb{C}_p$ 上の加法的 p 進付値とし $|\cdot|_p$ を ord_p で与えられる絶対値とする. K を $\mathbb{Q}_p$ の $\bar{\mathbb{Q}}_p$ の中での拡大体とし $\mathcal{O}$ を K の整数環 $\mathcal{O}_K$ の $\mathbb{C}_p$ での位相的閉包とする. $W := 1 + p\mathbb{Z}_p$ とおき μ を 1 の $(p-1)$ 乗根のなす群として $\mathbb{Z}_p^\times = W \times \mu$ とみなす. $\langle\ \rangle : \mathbb{Z}_p^\times \twoheadrightarrow W$ を第一射影とし $\omega : \mathbb{Z}_p^\times \twoheadrightarrow \mu$ を第二射影 (Teichmüller 指標) とする. ω はしばしば $\omega(z \bmod p) := \omega(z)$ により Dirichlet 指標 $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \to \mu$ とみなされる. $\Lambda := \mathcal{O}[\![W]\!]$ を岩澤代数, $\mathbb{L}$ をその商体, $\mathbb{K}$ を $\mathbb{L}$ の有限次拡大, $\mathbb{I}$ を $\mathbb{K}$ での Λ の整閉包とする. $u \in W$ で位相的生成元を表す. $P \in \mathfrak{X}(\mathbb{I}) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}_p\text{-alg}}(\mathbb{I}, \mathbb{C}_p)$ がある正整数 $k \geq 2$ と有限位数 (i.e., $[W : \mathrm{Ker}\,\varepsilon] < \infty$) の $\varepsilon \in \mathrm{Hom}(W, \mathbb{C}_p^\times)$ に対して $P|_\Lambda(u) = u^k\varepsilon(u)$ となるとき *arithmetic point* と呼び k と ε をそれぞれ $k(P)$ と ε_P で表す. $\mathcal{A}(\mathbb{I})$ を arithmetic point のなす $\mathfrak{X}(\mathbb{I})$ の部分集合とし $\mathcal{A}(\mathbb{I};\mathcal{O}) := \{P \in \mathcal{A}(\mathbb{I}) \mid P(\mathbb{I}) \subset \mathcal{O}\}$ とおく. Dirichlet 指標 ψ と $P \in \mathcal{A}(\mathbb{I})$ に対し, $\psi_P := \psi\varepsilon_P\omega^{-k(P)}$ とおく. $\mathbb{A}$ を $\mathbb{Q}$ の adele 環とし, $\mathbb{A}^{(\infty)} := \{x \in \mathbb{A} \mid x_\infty = 0\}$, $\mathbb{A}^{(p\infty)} := \{x \in \mathbb{A} \mid x_p = x_\infty = 0\}$ とおく. $\widehat{\mathbb{Z}} := \prod_\ell \mathbb{Z}_\ell$ とし $\hat{\mathbb{Z}}^{(p)} := \prod_{\ell \neq p} \mathbb{Z}_\ell$ とおく. $G := GL(2)/\mathbb{Z}$ と $S := \mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}$ でそれぞれの代数群を表す. $\mathrm{diag}(a,b)$ で $(1,1)$ 成分と $(2,2)$ 成分がそれぞれ a と b の対角行列を表し, 単位行列を $1_2 := \mathrm{diag}(1,1)$ で記す. (2×2) 行列 γ に対し, 各成分を以下のとおり記す:

$$\begin{pmatrix} a_\gamma & b_\gamma \\ c_\gamma & d_\gamma \end{pmatrix} := \gamma. \tag{1-0-4}$$

本稿では保型表現 (automorphic representation) は全て cuspidal であるとする.

2. 半整数の重さの古典的 CUSP 形式と ADELIC CUSP 形式

$\gamma \in \Gamma_0(4)$ の $f : \mathfrak{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\} \to \mathbb{C}$ への作用を整数 k ごとに

$$f|_{k+1/2}\gamma(z) := f(\gamma(z))j(\gamma,z)^{-1}J(\gamma,z)^{-k} \text{ with } \gamma(z) := (a_\gamma z + b_\gamma)J(\gamma,z)^{-1} \tag{2-0-1}$$

で定める. ただし, $J(\gamma,z) := c_\gamma z + d_\gamma$ とおき $\theta(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp(2\pi i n^2 z)$ に対し $j(\gamma,z) := \theta(\gamma(z))/\theta(z)$ とおいた. $\Gamma_0(4)$ の合同部分群 Δ に対し, $P^{\mathrm{cl}}_{k+1/2}(\Delta;\mathbb{C})$ で正則関数 $f : \mathfrak{H} \to \mathbb{C}$ で全ての $\gamma \in \Delta$ に対し $f|_{k+1/2}\gamma(z) = f(z)$ を満たしかつ Δ の全ての cusp において正則であるもののなす空間を表す. N を 4 で割り切れる正整数とする. 法 N の Dirichlet 指標 χ に対し,

$$P^{\mathrm{cl}}_{k+1/2}(N,\chi;\mathbb{C}) := \{f \in P^{\mathrm{cl}}_{k+1/2}(\Gamma_1(N);\mathbb{C}) \mid f|_{k+1/2}\gamma(z) = \chi(d_\gamma)f \text{ for all } \gamma \in \Gamma_0(N)\} \tag{2-0-2}$$

とおく. $f|_{k+1/2}(-1_2) = (-1)^k f$ なので, $\chi(-1) = (-1)^k$ でない限り $P^{\mathrm{cl}}_{k+1/2}(N,\chi;\mathbb{C}) = 0$ である. それゆえ $P^{\mathrm{cl}}_{k+1/2}(N,\chi;\mathbb{C})$ を論じるときは $\chi(-1) = (-1)^k$ を仮定する.

Remark 2.1. 作用 (2-0-1) は [Sh73, p.447] で与えられたものから $\chi^k_{-1}(d_\gamma)$ を抜いていることに注意. [H95] と [Sh73], [W81] を比べるときの記法の関係は次のとおり:

$$P^{\mathrm{cl}}_{k+1/2}(N,\chi;\mathbb{C}) = \begin{cases} S_{2k+1}(N, \chi^k_{(-1)}\chi) & \text{in [Sh73]}, \\ S_{(2k+1)/2}(N, \chi^k_{(-1)}\chi) & \text{in [W81]}. \end{cases} \tag{2-0-3}$$

[H95] では $P^{\mathrm{cl}}_{k+1/2}(N,\chi;\mathbb{C})$ は $\mathcal{P}_{k+1/2}(N,\chi;\mathbb{C})$ と書かれていることも注意しておく.

$\widetilde{S}$ で [W81, II.4] で定義された S の two-fold metaplectic cover を表す．つまり，$\widetilde{S}(\mathbb{A}) = S(\mathbb{A}) \times \{\pm 1\}$ は以下で定義される 2-cocycle $\beta : S(\mathbb{A}) \to \{\pm 1\}$ に対応する非分裂中心拡大である: v を $\mathbb{Q}$ の素点とする．$\sigma \in S(\mathbb{Q}_v)$ に対し，

$$x(\sigma) := \begin{cases} d_\sigma & \text{if } c_\sigma = 0, \\ c_\sigma & \text{if } c_\sigma \neq 0, \end{cases} \tag{2-0-4}$$

$$s_v(\sigma) := \begin{cases} (c_\sigma, d_\sigma)_v & c_\sigma d_\sigma \neq 0 \text{ かつ } v \text{ が有限素点かつ } \mathrm{ord}_v(c_\sigma) \text{ が奇数のとき}, \\ 1 & \text{それ以外のとき}, \end{cases} \tag{2-0-5}$$

とおく．ただし，v での Hilbert symbol を $(c_\sigma, d_\sigma)_v$ と書いている．2-cocycle を次で定義する

$$\beta_v(\sigma, \sigma') := (x(\sigma), x(\sigma'))_v(-x(\sigma)x(\sigma'), x(\sigma\sigma'))_v s_v(\sigma)s_v(\sigma')s_v(\sigma\sigma'), \tag{2-0-6}$$

$$\beta(\sigma, \sigma') := \prod_v \beta_v(\sigma_v, \sigma'_v). \tag{2-0-7}$$

Hilbert symbol の積公式より，$\beta(\sigma, \sigma') = s(\sigma)s(\sigma')s(\sigma\sigma')$ for $\sigma, \sigma' \in S(\mathbb{Q})$．よって $\sigma \mapsto (\sigma, s(\sigma))$ は section $S(\mathbb{Q}) \to \widetilde{S}(\mathbb{A})$ を与える．$S(\mathbb{Q})$ と $\widetilde{S}(\mathbb{A})$ での像を同一視する．

$$C_\infty := \left\{ r(\theta) := \begin{pmatrix} \cos 2\pi\theta & \sin 2\pi\theta \\ -\sin 2\pi\theta & \cos 2\pi\theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R}/2\mathbb{Z} \right\} \tag{2-0-8}$$

とおく．$\mathbf{e} : \mathbb{A}/\mathbb{Q} \to \mathbb{C}$ を $\mathbf{e}_\infty(x_\infty) = \exp(2\pi i x_\infty)$ となる standard additive character とする ([LFE, p.249])．$\gamma_v(t)$ を $\mathbf{e}_v$ と $\mathbb{Q}_v$ 上の二次形式 tx^2 に関する Weil constant とする ([Weil, p.161])．[W81, p.380] に従って，

$$\tilde{\gamma}_v(t) := (t, t)_v \gamma_v(t) \gamma_v(1)^{-1} \tag{2-0-9}$$

とおく．古典的設定では $\Gamma_0(N)$ に対応する adelic な合同部分群とその ℓ 成分を次で表す:

$$U_0(N) := \left\{ u \in S(\widehat{\mathbb{Z}}) \mid c_u \in N\widehat{\mathbb{Z}} \right\}, \tag{2-0-10}$$

$$U_0(N)_\ell := \left\{ u \in S(\mathbb{Z}_\ell) \mid c_u \in \ell^{\mathrm{ord}_\ell(N)}\mathbb{Z}_\ell \right\}. \tag{2-0-11}$$

$\sigma \in U_0(4)_2$ に対して

$$\tilde{\varepsilon}_2(\sigma) := \begin{cases} \tilde{\gamma}_2(d_\sigma)^{-1}(c_\sigma, d_\sigma)_2 s_2(\sigma) & \text{if } c_\sigma \neq 0, \\ \tilde{\gamma}_2(d_\sigma) & \text{if } c_\sigma = 0, \end{cases} \tag{2-0-12}$$

を定義することで，$\tilde{\varepsilon}_2$ が $\{\pm 1\}$ 上非自明となる $\widetilde{S}(\mathbb{Q}_2)$ の部分群 $U_0(4)_2 \times \{\pm 1\}$ の指標に拡張される．$U_0(4)$ の開部分群 U に対し，$P_{k+1/2}(U; \mathbb{C})$ で次の (m'1) と (m2) を満たす関数 $f : \widetilde{S}(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ のなす空間を表す:

$$f(\alpha x(u, \epsilon) r(\theta)) = \tilde{\varepsilon}_2(u_2, \epsilon) f(x) \exp((k + 1/2)\theta) \ (\alpha \in S(\mathbb{Q}), (u, \epsilon) \in U \times \{\pm 1\}, r(\theta) \in C_\infty). \tag{m'1}$$

$$Df = \left(\frac{k'(k'-2)}{2} \right) f. \tag{m2}$$

ただし，$k' := k + 1/2$ で D は ∞ での Casimir 作用素．古典的空間と adelic な空間は次の同型で結びつく

$$P_{k+1/2}(U; \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} P^{\mathrm{cl}}_{k+1/2}(U \cap S(\mathbb{Z}); \mathbb{C}); f \mapsto f^{\mathrm{cl}}. \tag{2-0-13}$$

ただし，f^{cl} は $z = g(i)$ となる $g \in S(\mathbb{R})$ をとり

$$f^{\mathrm{cl}}(z) := f(g_\infty, 1) J(g, i)^{k+1/2} \tag{2-0-14}$$

で定義される．古典的設定では $\Gamma_1(N)$ に対応する adelic な合同部分群を次で定義する:

$$U_1(N) := \left\{ u \in S(\widehat{\mathbb{Z}}) \mid u \equiv 1_2 \ (\mathrm{mod}\ N\hat{\mathbb{Z}}) \right\}. \tag{2-0-15}$$

[MFM, Lemma 4.3.1] の証明と同じようにして,

(2-0-16) $$P^{\mathrm{cl}}_{k+1/2}(U_1(N)\cap S(\mathbb{Z});\mathbb{C})=\bigoplus_{\chi}P^{\mathrm{cl}}_{k+1/2}(N,\chi;\mathbb{C})$$

を得る. ただし, χ は全ての法 N の Dirichlet 指標をわたる. $P_{k+1/2}(N,\chi;\mathbb{C})$ で次の (m1) と先述の (m2) を満たす関数 $f:\widetilde{S}(\mathbb{A})\to\mathbb{C}$ のなす空間を表す:

(m1)
$$f(\alpha x(u,\epsilon)r(\theta))=\chi(u)\tilde{\varepsilon}_2(u_2,\epsilon)f(x)\exp((k+1/2)\theta)\ (\alpha\in S(\mathbb{Q}),(u,\epsilon)\in U_0(N)\times\{\pm1\},r(\theta)\in C_\infty).$$

$U=U_1(N)$ に対する同型 (2-0-13) を介して $P_{k+1/2}(N,\chi;\mathbb{C})\xrightarrow{\sim}P^{\mathrm{cl}}_{k+1/2}(N,\chi;\mathbb{C})$. 整数の重さの場合と同様に, $\mathbb{Z}$ 代数 R と $q:=\exp(2\pi\sqrt{-1}z)$ に対し,

(2-0-17) $$P^{\mathrm{cl}}_{k+1/2}(U_1(N)\cap S(\mathbb{Z});R):=(P^{\mathrm{cl}}_{k+1/2}(U_1(N)\cap S(\mathbb{Z});\mathbb{C})\cap\mathbb{Z}[[q]])\otimes_{\mathbb{Z}}R.$$

とおく. U を $U_0(4)$ の開部分群とする. [MFM, p.114] と同様の議論により, $P^{\mathrm{cl}}_{k+1/2}(U\cap S(\mathbb{Z});R)$ が定義され $P_{k+1/2}(U;R)$ は意味をなす.

3. cusp 形式の p 進稠密定理

強近似定理より次の全単射がある:

(3-0-1) $$\{p\text{ と素な level の }S(\mathbb{Z})\text{ の合同部分群}\}\longleftrightarrow\left\{S(\hat{\mathbb{Z}}^{(p)})\text{ の開部分群}\right\}=:\mathcal{Z}$$
$$\Delta=\widehat{\Delta}\cap S(\mathbb{Z})\longleftrightarrow\widehat{\Delta}:\ \Delta\text{ の }S(\hat{\mathbb{Z}}^{(p)})\text{ での位相的閉包}.$$

$\widehat{\Delta}\in\mathcal{Z}$ に対し,

(3-0-2) $$\Delta_1(p^r):=\Delta\cap\Gamma_1(p^r),$$

(3-0-3) $$S^{\mathrm{cl}}_\kappa(\widehat{\Delta};\mathcal{O}):=\bigcup_{r\geq1}S^{\mathrm{cl}}_\kappa(\Delta_1(p^r);\mathcal{O})\text{ and }P^{\mathrm{cl}}_{k+1/2}(\widehat{\Delta};\mathcal{O}):=\bigcup_{r\geq1}P^{\mathrm{cl}}_{k+1/2}(\Delta_1(p^r);\mathcal{O}).$$

$f\in S^{\mathrm{cl}}_\kappa(\widehat{\Delta};\mathcal{O})\cup P^{\mathrm{cl}}_{k+1/2}(\widehat{\Delta};\mathcal{O})$ に対し, 次の一様ノルムを定義する:

(3-0-4) $$|f|_p:=\sup_{n\geq1}|a_n(f)|_p.$$

$\widehat{\mathcal{S}}(\widehat{\Delta};\mathcal{O})$ と $\widehat{\mathcal{P}}(\widehat{\Delta};\mathcal{O})$ を $S^{\mathrm{cl}}_\kappa(\widehat{\Delta};\mathcal{O})$ と $P^{\mathrm{cl}}_{k+1/2}(\widehat{\Delta};\mathcal{O})$ のノルム (3-0-4) に関するそれぞれの完備化とする.

Fact ([H88b, Corollary 5.4])**.** $\kappa\geq2$ ならば $\widehat{\mathcal{S}}(\widehat{\Delta};\mathcal{O})$ は κ に依らない.

Theorem 3.1 ([H95, Theorem 1])**.** $k\geq2$ ならば $\widehat{\mathcal{P}}(\widehat{\Delta};\mathcal{O})$ は k に依らない.

Proof. 証明は代数幾何的な議論により上述の Fact に帰着される. 詳細は [H95, proof of Theorem 1] と [H96] を参照. □

4. p 進保型表現

$\mathbb{Q}^{(p)}_{\mathrm{ab}}:=\mathbb{Q}[\zeta_n\mid p\nmid n]$ を p で不分岐な $\mathbb{Q}$ の最大 Abel 拡大とする. 志村 [Sh78a] は $S(\mathbb{A}^{(p\infty)})$ と $\widetilde{S}(\mathbb{A}^{(p\infty)})$ の smooth な作用を

(4-0-1) $$S^{\mathrm{cl}}_\kappa(\mathbb{Q}^{(p)}_{\mathrm{ab}}):=\bigcup_{\widehat{\Delta}\in\mathcal{Z}}S^{\mathrm{cl}}_\kappa(\widehat{\Delta};\mathbb{Q}^{(p)}_{\mathrm{ab}})\ \text{と}\ P^{\mathrm{cl}}_{k+1/2}(\mathbb{Q}^{(p)}_{\mathrm{ab}}):=\bigcup_{\widehat{\Delta}\in\mathcal{Z}}P^{\mathrm{cl}}_{k+1/2}(\widehat{\Delta};\mathbb{Q}^{(p)}_{\mathrm{ab}})$$

上にそれぞれ定義した. K が $\mathbb{Q}_p$ の最大不分岐拡大であると仮定する. Katz の p-adic modular forms の理論 (see [H92, Chapter 2]) により, これらの作用はそれぞれ

(4-0-2) $$S^{\mathrm{cl}}_\kappa(\mathcal{O}):=\bigcup_{\widehat{\Delta}\in\mathcal{Z}}S^{\mathrm{cl}}_\kappa(\widehat{\Delta};\mathcal{O})\ \text{と}\ P^{\mathrm{cl}}_{k+1/2}(\mathcal{O}):=\bigcup_{\widehat{\Delta}\in\mathcal{Z}}P^{\mathrm{cl}}_{k+1/2}(\widehat{\Delta};\mathcal{O})$$

において定まり p 進連続性により

$$\widehat{\mathcal{S}}(\mathcal{O}) := \bigcup_{\widehat{\Delta}\in\mathcal{Z}} \widehat{\mathcal{S}}(\widehat{\Delta};\mathcal{O}) \text{ と } \widehat{\mathcal{P}}(\mathcal{O}) := \bigcup_{\widehat{\Delta}\in\mathcal{Z}} \widehat{\mathcal{P}}(\widehat{\Delta};\mathcal{O}) \tag{4-0-3}$$

上にそれぞれ拡張される. [H95] に従い, (4-0-3) 上の作用を *p-adic automorphic representations* と呼ぶ.

Remark 4.1. 実際には, 志村は $G_{\mathbb{A}+} := G(\mathbb{A}^{(\infty)})G_+(\mathbb{R})$ の作用を有理型 Siegel modular 形式の空間上に定義した. この作用は正則 Siegel cusp 形式の空間上においても定まる ([Sh78a, Theorem 1.2]). 我々の場合ではこの作用は次のように記述される: $f \in S^{\mathrm{cl}}_\kappa(\widehat{\Delta};\mathbb{Q}^{(p)}_{\mathrm{ab}})$ に対し, $f \in S^{\mathrm{cl}}_\kappa(\Delta_1(p^r);\mathbb{Q}^{(p)}_{\mathrm{ab}})$ となる $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ をとる. 強近似定理により, $x \in G(\mathbb{A}^{(\infty)})$ に対し, ある $t \in (\hat{\mathbb{Z}}^{(p)})^\times$ に対する $u\cdot\mathrm{diag}[1,t]^{-1} \in \widehat{\Delta}$ と $\alpha \in G(\mathbb{Q})_+$ で $x = \alpha u$ となるものがとれる. このとき x の f における作用は

$$f^x(z) := J(\alpha,z)^{-\kappa} f^\sigma(\alpha(z)) \tag{4-0-4}$$

で与えられる. ただし, $\sigma := \mathrm{Art}_{\mathbb{Q}}(\det(u)^{-1}) \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{\mathrm{ab}}/\mathbb{Q})$ で f^σ は全ての n に対し $a_n(f^\sigma) := a_n(f)^\sigma$ で定義される.

5. Λ 進形式と Λ 進保型表現

5.1. **半整数の重さの場合.** A を $\mathbb{Z}_p$ 代数とし, $\widehat{\Delta} \in \mathcal{Z}$ をとり N をその level とする. $z = (z_p, z_N) \in \mathbb{Z}_N := \mathbb{Z}_p^\times \times (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ の $P^{\mathrm{cl}}_{k+1/2}(\widehat{\Delta};A)$ 上の作用を $\sigma_z \equiv \mathrm{diag}[z^{-1},z] \pmod{Np^r}$ なる $\sigma_z \in S(\mathbb{Z})$ をとり

$$f|z := z_p^k f|_{k+1/2}\sigma_z \tag{5-1-1}$$

で定義する. この $\mathbb{Z}_p^\times$ の作用は連続性により $\widehat{\mathcal{P}}(\mathcal{O})$ 上に拡張される. $\mathrm{Ker}\,\varepsilon = W^{p^{r-1}}$ なる $\varepsilon \in \mathrm{Hom}(W, A^\times)$ と法 Np の Dirichlet 指標 ψ に対し,

$$\Delta(p^r) := \Delta_1(p) \cap \Gamma_0(p^r), \tag{5-1-2}$$

$$P^{\mathrm{cl}}_{k+1/2}(\Delta(p^r),\psi\varepsilon;A) := \{f \in P^{\mathrm{cl}}_{k+1/2}(\Delta_1(p^r);A) \mid f|z = \psi(z)\varepsilon(\langle z_p\rangle)z_p^k f \text{ for } z \in \mathbb{Z}_N\}. \tag{5-1-3}$$

[Sh73, Theorem 1.7] で示されたように, 素数 ℓ に対する Hecke 作用素 T_{ℓ^2} の $P^{\mathrm{cl}}_{k+1/2}(\widehat{\Delta};\mathbb{C})$ 上の作用は我々の記法では

$$a_n(f|T_{\ell^2}) = a_{\ell^2 n}(f) + \ell^{-1}\chi_n(\ell)a_n(f|\ell) + \ell^{-1}a_{n/\ell^2}(f|\ell^2) \tag{5-1-4}$$

で与えられる. ただし, 素数 ℓ は $\mathbb{Z}_N$ の元としてみなしている. $\ell \mid Np$ のときは $a_n(f|T_{\ell^2}) = a_{\ell^2 n}(f)$ であることに注意. 公式 (5-1-4) と [H90, Theorem 2.2] により T_{ℓ^2} の作用が $P^{\mathrm{cl}}_{k+1/2}(\widehat{\Delta};\mathcal{O})$ 上に定まる. 極限をとることで冪等元 (*ordinary projector*) $e' \in \mathrm{End}_{\mathcal{O}}(P^{\mathrm{cl}}_{k+1/2}(\widehat{\Delta};\mathcal{O}))$ が定まる:

$$e' := \lim_{n\to\infty}(T_{p^2})^{n!}. \tag{5-1-5}$$

$\mathbb{P}(\Delta;\mathbb{I})$ を $\mathbb{I}$-進 cusp 形式のなす空間とする, すなわち, $\mathbf{f} \in \mathbb{P}(\Delta;\mathbb{I})$ は形式的冪級数

$$\mathbf{f} = \sum_{n\geq 1} \mathbf{a}_n(\mathbf{f})q^{n/N} \in \mathbb{I}[[q^{1/N}]] \tag{5-1-6}$$

であって $k(P) \gg 0$ なる任意の $P \in \mathcal{A}(\mathbb{I})$ に対し $\mathbf{f}_P = \sum_{n\geq 1} P(\mathbf{a}_n(\mathbf{f}))q^{n/N} \in P^{\mathrm{cl}}_{k(P)+1/2}(\Delta(p^{r(P)}),\varepsilon_P;\mathbb{C}_p)$ をみたす.

$$\mathbb{P}(N;\mathbb{I}) := \mathbb{P}(\Gamma_1(N);\mathbb{I}) \tag{5-1-7}$$

とおく. Λ は Krull 次元 2 の正則局所環なので, $\mathbb{I}$ は自由 Λ 加群である. $\mathbb{I}$ の Λ 上の基底 $\{\mathbf{i}_j\}$ を固定することで形式的に $\mathbf{f} = \sum_j \mathbf{f}_j\mathbf{i}_j$ と書けて $\mathbf{f}_j$ が Λ 進形式であることがわかる. よって $\mathbb{P}(\Delta;\mathbb{I}) = \mathbb{P}(\Delta;\Lambda)\otimes_\Lambda \mathbb{I}$. $C(W,\mathcal{O})$ を W 上 $\mathcal{O}$ に値を持つ連続関数のなす空間とし $\mathrm{Meas}(W,\mathcal{O}) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(C(W,\mathcal{O}),\mathcal{O})$ とおく. $\mathcal{O}$

代数の同型 $\Lambda \xrightarrow{\sim} \mathrm{Meas}(W,\mathcal{O}); \mathbf{a} \mapsto d\mathbf{a}$ で任意の $P \in \mathfrak{X}(\Lambda;\mathcal{O})$ に対し $P(\mathbf{a}) = \int_W Pd\mathbf{a} := d\mathbf{a}(P|_W)$ となるものが存在する．$\mathbf{f} \in \mathbb{P}(\Delta;\Lambda)$ に対し, $d\mathbf{f} \in \mathrm{Meas}\left(W, \mathcal{O}[[q^{1/N}]]\right)$ を任意の $\phi \in C(W,O)$ に対し

(5-1-8)
$$\int_W \phi d\mathbf{f} := \sum_{n\geq 1}\left(\int_W \phi d\mathbf{a}_{n/N}(\mathbf{f})\right) q^{n/N}$$

で定義する．$k(P) \gg 0$ なる $P \in \mathcal{A}(\Lambda)$ に対し,

(5-1-9)
$$\int_W Pd\mathbf{f} = \mathbf{f}_P \in P^{\mathrm{cl}}_{k(P)+1/2}(\Delta(p^{r(P)}), \varepsilon_P; \mathbb{C}_p).$$

$\{P|_W \mid P \in \mathcal{A}(\Lambda), k(P) \gg 0\}$ は $C(W,\mathcal{O})$ の稠密部分空間を生成するので, $d\mathbf{f}$ は $\widehat{\mathcal{P}}(\mathcal{O})$ に値を持つ．ゆえに

(5-1-10)
$$\mathbb{P}(\Delta;\Lambda) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Meas}(W, \widehat{\mathcal{P}}(\mathcal{O})); \mathbf{f} \mapsto d\mathbf{f}.$$

特に, $s \in \widetilde{S}(\mathbb{A}^{(p\infty)})$ に対して得られた $\mathrm{Meas}(W,\widehat{\mathcal{P}}(\mathcal{O}))$ の元 $\phi \mapsto (\int_W \phi d\mathbf{f})|s$ は $\widehat{\Delta}_s \in \mathcal{Z}$ に対応する適切な合同部分群 Δ_s に関する Λ 進形式 $\mathbf{f}|s \in \mathbb{P}(\Delta_s;\Lambda)$ に対応する．よって $\widetilde{S}(\mathbb{A}^{(p\infty)})$ の $\mathbb{P}(\mathbb{I}) := \bigcup_{\widehat{\Delta}\in\mathcal{Z}} \mathbb{P}(\Delta;\mathbb{I})$ における自然な作用を得る．

Proposition 5.1 ([H95, Proposition 1])**.** *Δ の level と素な素数 ℓ に対し Hecke 作用素 T_{ℓ^2} と ordinary projector e' が $\mathrm{End}_{\mathbb{I}}(\mathbb{P}(\Delta;\mathbb{I}))$ の元として定まる．群 $\widetilde{S}(\mathbb{A}^{(p\infty)})$ は $\mathbb{P}(\mathbb{I})$ に smooth に作用する．ただし, smooth とは各 $v \in \mathbb{P}(\mathbb{I})$ に対する stabilizer が開集合であることを意味する．*

5.2. **整数の重さの場合.** $\mathbb{S}(\Delta;\mathbb{I})$ を $\mathbb{I}$ 進 cusp 形式の空間とする．すなわち, $\mathbf{f} \in \mathbb{S}(\Delta;\mathbb{I})$ は形式的冪級数 $\mathbf{f} \in \mathbb{I}[[q^{1/N}]]$ で $k(P) \gg 0$ なる任意の $P \in \mathcal{A}(\mathbb{I})$ に対し $\mathbf{f}_P \in P(\mathbb{I})[[q^{1/N}]] \in S^{\mathrm{cl}}_{k(P)}(\Delta(p^{r(P)}), \varepsilon_P; \mathbb{C}_p)$ をみたす．任意の整数 n に対する Hecke 作用素 T_n と ordinary projector $e := \lim_{n\to\infty}(T_p)^{n!}$ が $\mathbb{S}(\Delta;\mathbb{I})$ 上に定まる ([LFE, Chapter 7])．Proposition 5.1 と同様に, 群 $S(\mathbb{A}^{(p\infty)})$ が $\bigcup_{\widehat{\Delta}\in\mathcal{Z}} \mathbb{S}(\Delta;\mathbb{I})$ に作用する．実際には主結果のために $G(\mathbb{A}^{(p\infty)})$ の作用が必要である．単位元の連結成分 $G_+(\mathbb{R})$ に対し $G(\mathbb{A}) = G(\mathbb{Q})G(\widehat{\mathbb{Z}})G_+(\mathbb{R})$ に注意する．$G(\widehat{\mathbb{Z}})$ の任意の開部分群 U に対し, $S_k(U;\mathbb{C})$ で次の (M1), (M2), (M3) をみたす関数 $f : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ のなす空間を表す:

(M1)
$$\alpha \in G(\mathbb{Q}), u \in UC_\infty\mathbb{R}^\times \text{ に対し } f(\alpha x u) = f(x)\det(u_\infty)J(u_\infty, i)^{-k}.$$

(M2)
$$Df = \left(\frac{k(k-2)}{2}\right) f$$

ただし, D は ∞ における Casimir 作用素.

(M3)
$$x \in G(\mathbb{A}) \text{ に対し } \int_{\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}} f\left(\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x\right) = 0.$$

$R(U) \subset G(\widehat{\mathbb{Z}})$ を $G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})/UG_+(\mathbb{R})$ の完全代表系とする．すると

(5-2-1)
$$S_k(U;\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{t\in R(U)} S^{\mathrm{cl}}_k(\Gamma_{tUt^{-1}};\mathbb{C}); f \mapsto (f^{\mathrm{cl}}_t)_{t\in R(U)}.$$

ただし, $z = g(i)$ なる $g \in G_+(\mathbb{R})$ をとり

(5-2-2)
$$\Gamma_{tUt^{-1}} := S(\mathbb{Q}) \cap tUt^{-1}S(\mathbb{R}),$$

(5-2-3)
$$f^{\mathrm{cl}}_t(z) := f(tg)\det(g)^{-1}J(g,i)^k$$

とおいた．この同型を介して $\mathbb{Z}$ 代数 R に対して $S_k(U;R)$ が定義できる．$R(U)$ は

(5-2-4)
$$\mathcal{R} := \{\mathrm{diag}[a,1] \mid a \in \hat{\mathbb{Z}}^{(p)}\}$$

の部分集合としてとることができる．常にこの方法で $R(U)$ を選ぶこととする．このとき e と T_p は $S_k(U;\mathbb{C}_p)$ 上 well-defined.

(5-2-5)
$$\mathcal{U} := \{\text{open subgroups of } G(\hat{\mathbb{Z}}^{(p)})\}$$

の元 U に対し, $U_0 := U \times G(\mathbb{Z}_p)$ とおく. $U, V \in \mathcal{U}$ に対し $U \subset V$ のときは $R(U_0) \supset R(V_0)$ となるよう $R(U)$ を $\mathcal{R}$ の部分集合としてとる. 次を定義する

$$\mathbb{S}(U;\mathbb{I}) := \bigoplus_{t\in R(U_0)} \mathbb{S}(\Gamma_{tU_0t^{-1}};\mathbb{I}), \tag{5-2-6}$$

$$\mathbb{S}(\mathbb{I}) := \bigcup_{U\in\mathcal{U}} \mathbb{S}(U;\mathbb{I}). \tag{5-2-7}$$

$S(\mathbb{A}^{(p\infty)})$ は $\bigcup_{\widehat{\Delta}\in\mathcal{Z}} \mathbb{S}(\Delta;\mathbb{I})$ 上に作用するので, $\mathbb{S}(\mathbb{I})$ 上にも作用する. $a \in (\mathbb{A}^{(p\infty)})^\times$ に対して $\mathrm{diag}[a,1]$ は $\mathbb{S}(U;\mathbb{I})$ の直和因子 $\mathbb{S}(\Gamma_{tU_0t^{-1}};\mathbb{I})$ を置換するだけなので次を得る:

Proposition 5.2 ([H95, Proposition 2])**.** *U と素な素数 ℓ に対し, Hecke 作用素 T_ℓ と ordinary projector e が $\mathrm{End}_{\mathbb{I}}(\mathbb{S}(U;\mathbb{I}))$ の元として定まる. 群 $G(\mathbb{A}^{(p\infty)})$ は $\mathbb{S}(\mathbb{I})$ に smooth に作用する.*

6. 主定理

Theorem 6.1 ([H95, Theorem 2])**.** *$\widetilde{S}(\mathbb{A}^{(p\infty)})$ の $\mathbb{P}^{\mathrm{ord}}(\mathbb{I}) := e\mathbb{P}(\mathbb{I})$ 上の作用は smooth かつ $\mathbb{K}$ まで係数拡大をした後で重複度が 1 以下である既約許容表現の直和である. この作用を $\widetilde{S}(\mathbb{A})$ の Λ 進 ordinary 保型表現と呼ぶ.*

Proof. (Sketch) $\mathrm{rank}_{\mathcal{O}} S^{\mathrm{cl}}_{k(P)}(\Delta(p^{r(P)}), \varepsilon_P; \mathcal{O})$ が P に依らず有界である ([LFE, Theorem 7.2.2]) ことから, $\mathrm{rank}_{\mathcal{O}} P^{\mathrm{cl}}_{k(P)+1/2}(\Delta(p^{r(P)}), \varepsilon_P; \mathcal{O})$ も P に依らず有界である (Proposition 7.1) ことが表現論を用いて示せる. これにより Wiles の整数の重さの場合における議論が適用できて, $k(P) \gg 0$ なる $P \in \mathcal{A}(\mathbb{I};\mathcal{O})$ に対し control 定理 (7-0-11) が成り立つ (Proposition 7.7). そして全ての主張は Λ 進保型表現を法 P で還元することで Waldspurger の弱重複度 1 定理から従う. □

$\widetilde{S}(\mathbb{A})$ の既約保型表現 $\widetilde{\pi}$ と $G(\mathbb{A})$ の既約保型表現 π は T_{p^2} の $\widetilde{\pi}$ における固有値と T_p の π における固有値が p 進単数のときそれぞれ *p-ordinary* という. Waldspurger による志村対応を $\mathrm{Sh}^{\mathrm{cl}}$ とすると $\widetilde{\pi}$ が p-ordinary なら $\mathrm{Sh}^{\mathrm{cl}}(\widetilde{\pi})$ も p-ordinary である. Λ 進志村対応 Sh と呼ばれる次の図式を可換にする射を得る: $P \in \mathcal{A}(\mathbb{I})$ に対し,

$$\begin{array}{ccc} \left\{\widetilde{S}(\mathbb{A}) \text{ の既約 } \Lambda \text{ 進 ordinary 保型表現}\right\} & \xrightarrow{\mathrm{Sh}} & \left\{G(\mathbb{A}) \text{ の既約 } \Lambda \text{ 進 ordinary 保型表現}\right\} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{mod}\ P} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{mod}\ P^2} \\ \left\{\begin{matrix}\text{重さ } k(P)+1/2 \text{ の} \\ \widetilde{S}(\mathbb{A}) \text{ の既約 } p\text{-ordinary 保型表現}\end{matrix}\right\} & \xrightarrow{\mathrm{Sh}^{\mathrm{cl}}} & \left\{\begin{matrix}\text{重さ } 2k(P) \text{ の} \\ G(\mathbb{A}) \text{ の既約 } p\text{-ordinary 保型表現}\end{matrix}\right\} \end{array} \tag{6-0-1}$$

ただし, $P^2 := P \circ \sigma_2$ で σ_2 は W 上の自己同型 $u \mapsto u^2$ から誘導される, Λ の正規拡大 $\mathbb{I}$ 上の自己同型. $\widetilde{\Pi}$ を $\widetilde{S}(\mathbb{A})$ の Λ 進 ordinary 保型表現とし, $\Pi := \mathrm{Sh}(\widetilde{\Pi})$, $\pi_P := \Pi \bmod P^2$ とおく. このとき次が成り立つ:

(1) $k(P^2) = 2k(P)$, $\varepsilon_{P^2} = \varepsilon_P^2$.
(2) $c(\Pi) := p^{-\mathrm{ord}_p(c(\pi_P))} c(\pi_P)$ は P に依らない.
(3) $\Pi|_{Z(\mathbb{A}^{(p\infty)})} = \iota\psi^2$ がある法 $4pc(\Pi)$ の有限位数の指標 ψ で $\psi(-1) = 1$ となるものと

$$\iota : Z(\mathbb{A}^{(p\infty)}) = (\mathbb{A}^{(p\infty)})^\times \xrightarrow{\mathrm{n}} \mathbb{Z}_p^\times \xrightarrow{\langle\ \rangle} W \to \Lambda^\times \tag{6-0-2}$$

に対し成り立つ. ただし, $\mathrm{n}(x) := |x|_{\mathbb{A}}^{-1}\omega(x)^{-1}$.

Theorem 6.2 ([H95, Theorem 3])**.** *Π を $G(\mathbb{A})$ の Λ 進 ordinay 保型表現とし ψ を法 $4pc(\Pi)$ の有限位数の指標で $\psi(-1) = 1$ と $\Pi|_{Z(\mathbb{A}^{(p\infty)})} = \iota\psi^2$ をみたすものとする. $\widetilde{S}(\mathbb{A})$ の Λ 進 ordinary 保型表現 $\widetilde{\Pi}$ で $\Pi = \mathrm{Sh}(\widetilde{\Pi})$ となるものの存在を仮定する. このとき平方因子を持たない正整数の組 (m,n) で $m/n \in \prod_{\ell|Np}(\mathbb{Q}_\ell^\times)^2$ となるものに対し, 二つの $\mathbb{I}$ の元 Φ と $\Psi \neq 0$ が存在し $k(P) \geq 2$ または $\psi_P^2 \neq \mathbb{1}$ なる $P \in \mathcal{A}(\mathbb{I})$ に対して, $L(1/2, \pi \otimes \psi_P^{-1}\chi_m) \neq 0$ ならば*

$$\frac{\Phi(P)^2}{\Psi(P)^2} = \frac{L(1/2, \pi_P \otimes \psi_P^{-1}\chi_n)}{L(1/2, \pi_P \otimes \psi_P^{-1}\chi_m)} \psi_P(n/m)(n/m)^{k(P)-1/2}. \tag{6-0-3}$$

ただし, $\pi_P := \Pi \bmod P^2$.

Proof. (Sketch) $\mathbf{f} \in \widetilde{\Pi}$ を Hecke 固有形式とし, $\Phi := \mathbf{a}_n(\mathbf{f})$, $\Psi := \mathbf{a}_m(\mathbf{f})$ とおく. 定理は Waldspurger の結果から従う. 詳細は [H95, Proof of Theorem 4] を参照. [H95] では最後に紹介するわずかに強い主張 Theorem 8.1 を示すことで定理の証明を与えている. □

7. 半整数の重さの Λ 進形式の構成

法 Np の Dirichlet 指標 ψ を固定する.

Proposition 7.1 ([H95, Proposition 3]). *$k(P) \geq 1$ ならば $P^{\mathrm{ord}}_{k(P)+1/2}(\Delta(p^{r(P)}), \psi_P; \mathbb{C}_p)$ の次元は $P \in \mathcal{A}(\Lambda)$ に依らず有界である.*

Proof. 証明は以下で紹介する表現論の補題の全てを使って示される. 詳細は [H95, Proof of Lemma 3] を参照. □

上述の命題の証明に必要な補題を準備する. ℓ を素数とし

(7-0-1) $$U_{r,\ell} := \{\gamma \in S(\mathbb{Z}_\ell) \mid c_\gamma \equiv 0 \pmod{\ell^r}\}$$

とおく. 法 ℓ^r の指標 χ of $\mathbb{Z}_\ell^\times$ と $U_{r,\ell}$ 加群 V に対し, χ 固有空間を $V(\ell^r, \chi)$ と書く. すなわち,

(7-0-2) $$V(\ell^r, \chi) := \{v \in V \mid \gamma \in U_{r,\ell} \text{ に対し } \gamma v = \chi(d_\gamma)v\}.$$

群 $*$ の既約許容表現の集合を $\mathrm{Irr}(*)$ と書き $\pi \in \mathrm{Irr}(*)$ の表現空間を $V(\pi)$ と書く.

Lemma 7.2 ([H95, Lemma 1 and 2]). *$\tilde{\pi} \in \mathrm{Irr}(\widetilde{S}(\mathbb{Q}_\ell))$ をとり $V := V(\pi)$ とおく.*

(1) *$\tilde{\pi}$ がある $k \geq 2$ に対して重さ $k + 1/2$ の保型表現の局所因子であると仮定する. このとき $V(\ell^r, \chi)$ の次元は V と χ に依らず有界 (r には依る).*
(2) *$\tilde{\pi}$ が supercuspidal であると仮定する. このとき $r > 0$ ならば十分大きい m に対し Hecke 作用素 T_{ℓ^m} は $V(\ell^r, \chi)$ 上 0 倍として作用する.*

Lemma 7.3 ([H95, Lemma 3]). *$\ell \geq 3$ を仮定する. [W80, II.2] and [W81, II] と同様に, $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$ の standard additive character $\mathbf{e}$ の ℓ 部分 $\mathbf{e}_\ell$ に対し, $V = \mathcal{B}_{\mu,\mathbf{e}_\ell}$ を $\widetilde{S}(\mathbb{Q}_\ell)$ の標準 Borel 部分群の quasi 指標 μ の誘導表現の空間とし $\chi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathbb{Q}_\ell^\times, \mathbb{C}^\times)$ とする. このとき*

(1) *$\mu\chi|_{\mathbb{Z}_\ell^\times} \neq \mathbb{1}$ かつ $\mu\chi^{-1}|_{\mathbb{Z}_\ell^\times} \neq \mathbb{1}$ ならば $r > 0$ のとき T_{ℓ^2} は $V(\ell^r, \chi)$ 上冪零に作用する.*
(2) *$\mu\chi|_{\mathbb{Z}_\ell^\times} \neq \mathbb{1}$ かつ $\mu\chi^{-1}|_{\mathbb{Z}_\ell^\times} = \mathbb{1}$ ならば次をみたすような分解 $V(\ell^r, \chi) = N \oplus V(c(\chi), \chi)$ が存在する:*
   (a) *T_{ℓ^2} は N 上冪零に作用する.*
   (b) *$\dim_{\mathbb{C}} V(c(\chi), \chi) = 1$.*
   (c) *$V(c(\chi), \chi)$ 上 $T_{\ell^2} = \chi(\ell)\ell^{k-1/2}\mu(\ell^{-1})$.*
(3) *$\mu\chi|_{\mathbb{Z}_\ell^\times} = \mathbb{1}$ かつ $\mu\chi^{-1}|_{\mathbb{Z}_\ell^\times} \neq \mathbb{1}$ ならば次をみたすような分解 $V(\ell^r, \chi) = N \oplus V(c(\chi), \chi)$ が存在する:*
   (a) *T_{ℓ^2} は N 上冪零に作用する.*
   (b) *$\dim_{\mathbb{C}} V(c(\chi), \chi) = 1$.*
   (c) *$V(c(\chi), \chi)$ 上 $T_{\ell^2} = \chi(\ell)\ell^{k-1/2}\mu(\ell)$.*
(4) *$\mu\chi|_{\mathbb{Z}_\ell^\times} = \mu\chi^{-1}|_{\mathbb{Z}_\ell^\times} = \mathbb{1}$ ならば次をみたすような分解 $V(\ell^r, \chi) = N \oplus V(\ell, \chi)$ が存在する:*
   (a) *T_{ℓ^2} は N 上冪零に作用する.*
   (b) *$\dim_{\mathbb{C}} V(\ell, \chi) = 2$.*
   (c) *$V(\ell, \chi)$ の基底 $\{v_1, v_2\}$ で $\{v_1, v_2\}$ に関する T_{ℓ^2} の表現行列がある定数 c に対し*

(7-0-3) $$\begin{pmatrix} \chi(\ell)\ell^{k-1/2}\mu(\ell^{-1}) & \chi(\ell)\ell^{k-1/2}\mu(\ell) \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

となるものが存在する.

Lemma 7.4 ([H95, Lemma 4] and proof is in [W80, Proposition 18, p.68])**.** $\rho^* \in \mathrm{Irr}(\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_\ell))$ とし, ある $\xi \in \mathbb{Q}_\ell^\times$ に対する *additive character* $\mathbf{e}_\ell^\xi$ に関する *Weil* 表現を介して対応する $\rho \in \mathrm{Irr}(\widetilde{S}(\mathbb{Q}_\ell))$ をとる. このとき局所志村対応 $\mathrm{Irr}(\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_\ell)) \twoheadrightarrow \mathrm{Irr}(\widetilde{S}(\mathbb{Q}_\ell))$ は以下を与える*:*

(7-0-4) $$\rho^*\text{の同値類} \mapsto \rho\text{の同値類}$$

(7-0-5) $$\pi(\mu,\mu^{-1})\ (\mu^2 \neq \alpha) \mapsto \tilde{\pi}_{\mu\chi_\xi}$$

(7-0-6) $$\sigma(\mu,\mu^{-1})\ (\mu^2 = \alpha, \mu \neq \alpha^{1/2}) \mapsto \tilde{\sigma}_{\mu\chi_\xi}$$

(7-0-7) $$\sigma(\alpha^{1/2},\alpha^{-1/2}) \mapsto \textit{supercuspidal}$$

(7-0-8) $$\textit{supercuspidal} \mapsto \textit{supercuspidal}$$

ただし*,* $\mathbf{e}_\ell^\xi(z) := \mathbf{e}_\ell(\xi z)$ で [W80, Proposition 1 and 2] で定義された記法を使っている*.*

primitive form f に付随する $G(\mathbb{A})$ の保型表現は f が p-ordinary のとき *p-ordinary* という.

Lemma 7.5 ([H95, Lemma 5], proof is in [H89b, Section 2])**.** π を $G(\mathbb{A})$ の *unitary* 保型表現とする*.* π が *p-ordinary* であると仮定する*.* このとき π の p 成分 π_p は α が不分岐である主系列表現 $\pi(\alpha,\beta)$ または *special* 表現 $\sigma(\alpha,\beta)$ である*.* $f \in \pi$ を $G(\mathbb{A})$ 上の重さ k の *primitive form* で $\lambda(T_p)$ を T_p に関する f の固有値とし $\omega_\pi := \pi|_{Z(G(\mathbb{A}))}$ とおく*.*

(1) $\pi_p = \pi(\alpha,\beta)$ かつ β が不分岐ならば $\alpha(p)+\beta(p) = p^{(1-k)/2}\lambda(T_p)$ かつ $\alpha(p)\beta(p) = \omega_\pi(p)$*.*
(2) $\pi_p = \pi(\alpha,\beta)$ かつ β が分岐するならば $\alpha(p) = p^{(1-k)/2}\lambda(T_p)$ かつ $\alpha(p)\beta(p) = \omega_\pi(p)$*.*
(3) $\pi_p = \sigma(\alpha,\beta)$ ならば $\alpha(p) = \lambda(T_p)$ かつ π_∞ は重さ 2 のものである*.*

Lemma 7.6 ([H95, Lemma 6])**.** F を有限次数の代数体とし ρ を $\mathrm{PGL}_2(F_\mathbb{A})$ の保型表現とする*.* ただし*,* $F_\mathbb{A}$ は F の *adele* 環*.* R を $\widetilde{S}(F_\mathbb{A})$ の保型表現の集合とし F の整 *idealN* に対し

(7-0-9) $$R(\rho;N) := \{\pi \in R \mid \pi_v^* \cong \rho_v \textit{ for all } v \textit{ outside } N\}$$

とおく*.* ただし*,* π_v^* は [W80, V.4] で定義された*, Weil* 表現を介して対応する $\mathrm{PGL}_2(F_v)$ の表現である *(*[W80, V.4] では $T \mapsto \mathcal{V}'(\mathbf{e},T)$ と書かれている*).* このとき

(7-0-10) $$\sharp R(\rho;N) \le \sharp\{\prod_{v|N} F_v^\times/(F_v^\times)^2\}.$$

以上の補題は全て Proposition 7.1 の証明のためのものである. Proposition 7.1 より, 整数の重さの場合と同様に Wiles の議論が半整数の重さの場合にも適用できて次を得る:

Proposition 7.7 ([H95, Proposition 4 and 5 and Corollary 1 and 2])**.** $\widehat{\Delta} \in \mathcal{Z}$ とする*.*

(1) $\mathbb{P}^{\mathrm{ord}}(\Delta;\mathbb{I})$ は有限階数の自由 $\mathbb{I}$ 加群*.*
(2) $P \in \mathcal{A}(\mathbb{I};\mathcal{O})$ とする*.* 任意の $f \in P^{\mathrm{cl}}_{k(P)+1/2}(\Delta(p^{r(P)}),\varepsilon_P;\mathcal{O})$ に対し $\mathbf{f}_P = f$ となる $\mathbf{f} \in \mathbb{P}^{\mathrm{ord}}(\Delta;\mathbb{I})$ が存在する*.*
(3) $k(P) \gg 0$ なる $P \in \mathcal{A}(\mathbb{I};\mathcal{O})$ に対し *(*$k(P)$ は Δ に依る*),*

(7-0-11) $$P^{\mathrm{cl}}_{k(P)+1/2}(\Delta(p^{r(P)}),\varepsilon_P;\mathcal{O}) \cong \mathbb{P}^{\mathrm{ord}}(\Delta;\mathbb{I}) \otimes_\mathbb{I} \mathbb{I}/P.$$

(4) $\mathbf{f}_1,\dots,\mathbf{f}_r$ を $\mathbb{P}^{\mathrm{ord}}(\Delta;\mathbb{I})$ の基底とすると $\det(\mathbf{a}_{n_i}(\mathbf{f}_j)) \in \mathbb{I}^\times$ となる正整数 $n_1,\dots,n_r$ が存在する*.*

8. 主定理よりわずかに強い結果

$\mathbf{h}^{\mathrm{ord}}(N;\mathcal{O})$ を [LFE, Section 7.3] で定義された p 進 ordinary Hecke 代数とする. すなわち, 全ての正整数 n に関する T_n で生成される $\mathrm{End}_\Lambda(\mathbb{S}^{\mathrm{ord}}(N;\Lambda))$ の Λ 部分代数である. 非退化双線形形式 $\langle h,\mathbf{f}\rangle := \mathbf{a}_1(\mathbf{f}|h)$ により, 次の双対性を得る:

(8-0-1) $$\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathbf{h}^{\mathrm{ord}}(N;\mathcal{O}),\Lambda) \cong \mathbb{S}^{\mathrm{ord}}(N;\Lambda) \text{ and } \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathbb{S}^{\mathrm{ord}}(N;\Lambda),\Lambda) \cong \mathbf{h}^{\mathrm{ord}}(N;\mathcal{O}).$$

北川 2 変数 p 進 L 関数 ([K, Theorem 6.2])**.** $\lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{I}\text{-alg}}(\mathbf{h}^{\mathrm{ord}}(N,\mathcal{O})\otimes_\Lambda \mathbb{I},\mathbb{I})$ とし χ を導手 Np^m の原始 *Dirichlet* 指標とする．ただし，$m \geq 0$ で $p \nmid N$．このとき p 進解析的関数 $\mathcal{L}_p(\cdot,\cdot;\lambda\otimes\chi) : \mathfrak{X}(\mathbb{I})\times\mathbb{Z}_p \to \bar{\mathbb{Q}}_p$ で $k(P)\geq 2$ なる任意の $P\in\mathcal{A}(\mathbb{I};\mathcal{O})$ と $\nu\in[0,k(P)-2]\cap\mathbb{Z}$ に対し，

$$\frac{\mathcal{L}_p(P,\nu;\lambda\otimes\chi)}{\mathcal{E}_P^{\pm}} = (-N)^{\nu}\left(\frac{p^{\nu}}{a_p(\mathbf{f}_P)}\right)^m\left(1-\frac{\overline{\chi}(p)p^{\nu}}{a_p(\mathbf{f}_P)}\right)G(\overline{\chi})\frac{\nu!L(\nu+1,\mathbf{f}_P\otimes\chi)}{(-2\pi i)^{\nu+1}\Omega_{\mathbf{f}_P}^{\pm}}. \tag{8-0-2}$$

ただし，$\mathbf{f}_P$ は双対性 *(8-0-1)* を介して $\lambda \bmod P$ に対応する *Hecke* 固有形式，$\mathcal{E}_P^{\pm}\in\mathcal{O}$ は p 進補間の *error term (*[K, Section 5.5]*)*，$\Omega_{\mathbf{f}_P}^{\pm}\in\mathbb{C}_p^{\times}$ は $\mathbf{f}_P$ に付随する複素周期 *(*[K, Section 3.8]*)* で $\pm := \mathrm{sgn}((-1)^{\nu+1}\chi(-1))$.

$\lambda\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{I}\text{-alg}}(\mathbf{h}^{\mathrm{ord}}(C,\mathcal{O})\otimes_\Lambda\mathbb{I},\mathbb{I})$ が primitive ([H88a, Theorem 4.1]) で π が λ に対応する $\mathbb{S}^{\mathrm{ord}}(\bar{\mathbb{L}})$ の unique factor とする．すなわち，$k(P)\geq 2$ なる任意の $P\in\mathcal{A}(\mathbb{I})$ に対し双対性 (8-0-1) を介して $\lambda \bmod P \leftrightarrow \pi \bmod P$．$\psi_0\in\mathrm{Hom}(Z_C,\mathbb{C}_p^{\times})$ を $\psi_0(z_p,z_C) := \lambda(\langle\langle\omega(z_p)z_C\rangle\rangle)$ で定義する．ただし，$\langle\langle z\rangle\rangle$ は (5-1-1) で定義された $z\in(\hat{\mathbb{Z}}^{(p)})^{\times}\subset G(\mathbb{A}^{(p\infty)})$ の $\mathbb{S}(\mathbb{I})$ 上の作用の $\mathbf{h}^{\mathrm{ord}}(C,\mathcal{O})\otimes_\Lambda\mathbb{I}$ における像である．次の条件を考える:

(H_p) C と 4 で割り切れる N を法とするある指標 ψ で $\psi(-1)=-1$ をみたすものが存在して$\psi_0=\psi^2$.

次の結果は Theorem 6.2 よりもわずかに強い結果である．

Theorem 8.1 ([H95, Theorem 4])**.** $\lambda\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{I}\text{-alg}}(\mathbf{h}^{\mathrm{ord}}(C,\mathcal{O})\otimes_\Lambda\mathbb{I},\mathbb{I})$ が *primitive* とする．任意の素数 $\ell\neq p$ に対して *(*H_ℓ*)* と *(*H_p*)* を仮定する．このとき平方因子を持たない正整数の組 (m,n) で $m/n\in\prod_{\ell|Np}(\mathbb{Q}_\ell^{\times})^2$ となるものに対し，$\Phi\in\mathbb{K}$ が存在し，$k(P)\geq 1$ なる任意の $P\in\mathcal{A}(\mathbb{I})$ に対し，$\mathcal{L}_p(P^2,k(P),\lambda\otimes\psi^{-1}\chi_m)\neq 0$ ならば

$$\Phi(P)^2 = \frac{\mathcal{L}_p(P^2,k(P),\lambda\otimes\psi^{-1}\chi_n)}{\mathcal{L}_p(P^2,k(P),\lambda\otimes\psi^{-1}\chi_m)}\psi_P(n/m)(n/m)^{k(P)-1/2}. \tag{8-0-3}$$

ここで (m,n) に関する仮定のもと m/n は Np と素であることを注意しておく．

Remark 8.2. 上述の定理の記号のもと $k(P)>1$ または $\psi_P^2\neq\mathbb{1}$ を仮定する．このとき $\mathcal{L}_p(P^2,k(P),\lambda\otimes\psi^{-1}\chi_n)\neq 0$ と $L(k(P),\lambda_P\otimes\psi_P^{-1}\chi_n)\neq 0$ は同値.

References

[F] Y. Flicker. Automorphic forms on covering groups GL(2). *Invent. Math.*, 57:119–182, 1980.

[H88a] H. Hida. A p-adic measure attached to the zeta functions associated with two elliptic modular forms, II. *Ann. Inst. Fourier*, 38:1–83, 1988.

[H88b] H. Hida. On p-adic Hecke algebras for GL_2 over totally real fields. *Ann. of Math.*, 128:295–384, 1988.

[H89a] H. Hida. On nearly ordinay Hecke algebras for GL(2) over totally real fields. *Adv. Studies in Pure Math.*, 17:139–169, 1989.

[H89b] H. Hida. Nearly ordinary Hecke algbras and Galois representations of several varieties. *Amer. J. of Math.*, pages 115–134, 1989.

[H90] H. Hida. p-adic L-functions for base change lifts of GL_2 to GL_3. *Perspective in Math.*, 11:93–142, 1990.

[H92] H. Hida. *Geometric modular forms.* Proc. CIMPA Summer School at Nice, 1992.

[LFE] H. Hida. *Elementary theory of L-functions and Eisenstein series*, volume 26 of *London Mathematical Society Student Texts.* Cambridge University Press, February 1993.

[H95] H. Hida. On Λ-adic forms of half integral weight for $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Q}$. *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, 215:139–166, 1995.

[H96] H. Hida. Corrections to: "On Λ-adic forms of half integral weight for $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Q}$". *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, 235:129–132, 1996.

[K] K. Kitagawa. On standard p-adic L-functions of families of elliptic cusp forms. *Comtemp. Math.*, 165:81–110, 1994.

[MFM] T. Miyake. *Modular Forms.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[P] S. Purkait. Explicit application of Waldspurger's theorem. *LMS J. Comput. Math*, 16:216–245, 2013.

[Sh73] G. Shimura. On modular forms of half integral weight. *Ann. of Math.*, 97(3):440–481, May 1973.

[Sh78a] G. Shimura. On certain reciprocity laws for zeta functions and modular forms. *Acta Math.*, 141:35–71, 1978.

[V] M. F. Vigneras. Valeur au centre de symmetrie des functions L associées aux formes modulaires. *Progress in Mathematics*, 12:331–356, 1981.

[W80] J. L. Waldspurger. Correspondence de Shimura. *J. Math. Pures Appl.*, 59:1–133, 1980.

[W81] J. L. Waldspurger. Sur les coefficients de fourier des formes modulaires de poids demi-entier. *J. Math. Pures Appl.*, 60(4):375–484, 1981.

[Weil] A. Weil. Sur certains groupes d'opérateurs unitaires. *Acta Math.*, 111:143–211.

Department of Mathematics, Kyoto Sangyo University, Motoyama, Kamigamo, Kita-ku, Kyoto 603-8555, Japan

Email address: `kenji_m@cc.kyoto-su.ac.jp`