保型形式の p 進族について

三原朋樹

概要

R. F. Coleman による R 族の構成について纏めた。

目次

序文

本稿は、2016 年度整数論サマースクールにおける筆者の担当範囲である [Col97] の B 節に関するレジュメである。整数論サマースクールでの発表内容に則して、モジュラー形式の p 進族について解説と補足を行う。特に [Col97] §B5 で構成される R 族と呼ばれるモジュラー形式の p 進族についての理解を深めることを本稿の目的としているが、当の [Col97] 自体には未定義の記号や言葉遣いが断りなく頻出し、しかもその多くが初見時には大変紛らわしいものであると思われるので、本稿では登場するほぼ全ての記号と言葉遣いに定義を付した。本稿末尾に索引を用意したので、記号と言葉遣いの参照時に役立てて戴きたい。p 進族に関する歴史的背景や意

義や面白さ等の深淵を覗くには、当時の問題意識から R. F. Coleman 自身の前後の論文との関係まで網羅されている原論文である [Col97] の Introduction を読むことが一番である。従って筆者がここに拙い文章を綴り蛇足を描くことには百害あって一利もないと思うので、是非とも各自で [Col97] の Introduction を当たって戴きたい。

1　準備

本稿の主題は「モジュラー形式の p 進族」である。モジュラー形式については聞き覚えがある人も多いかもしれないが、p 進族については初めて耳にする人も多いと思われる。そしてそもそも「族とは何か」ということについてあまり意識せずに [Col97] を読み進めようとすると、p 進 Fredholm 理論や p 進 Riesz 理論やリジッド幾何と言った抽象論の連続を目の当たりにし、「族を作りたいだけなのに何故このような抽象論を読み進めないといけないのか？」という疑念を抱く虞がある。万が一そのような事態に陥ってしまうと、[Col97] の A 節で紹介された抽象論が B 節で現れる度に「ここは飛ばして先に進み、より本質的な要点を理解するようにしよう」という気持ちになってしまうかも知れない。しかし結局「より本質的な要点」が見付かることもなく、そのまま最後まで [Col97] を渡り切ることになってしまうだろう。実際、上記した抽象論の中を真摯に泳いでいくことは B 節の核心を理解する上で必要不可欠な手順であると思われる。何故ならば、B 節においてそれらの抽象論が扱われている部分こそが極めて本質的な箇所であると筆者は考えているからである。とはいえどのような点において本質的であるかについて理解する前に抽象論に飛び込んでしまっても、途中で溺れてしまい [Col97] を渡り切れなくなってしまっては本末転倒である。そこでまず「族とは何か」について筆者が感じた理念を共有することで、明確な目的意識を持って抽象論に身を投じて欲しい。ただし筆者の感性は数学的に普遍的なものではないため、あくまで筆者の主観であることに留意した上で、それを手掛かりに各自「族とは何か」について思索して欲しい。なお初めから抽象論を泳ぐことに長けている人はこの章を飛ばして戴いて一向に構わない。

1.1　族とは何か

族とは、集まりのことである。例えば集合の族は集合の集まりであり、直線の族は直線の集まりであり、表現の族は表現の集まりである。集まり、というと単なる集合を指すことも多いが、しばしば「添字」や「パラメータ」が付くことで、単なる集合ではなく「列」や「バンドル」のような構造を持つことがある。例えば「$\mathbb{N}$ で添字付けられた数直線の族」と言われた場合、単なる 1 元集合 $\{\mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\} = \{\mathbb{R}\}$ ではなく、$\mathbb{N}$ の各点に $\mathbb{R}$ が乗っている絵や $\mathbb{R}$ の列 $(\mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ や自明なラインバンドル $\mathbb{N}\times\mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{N}, (n, r) \mapsto n$ を想像する人が多いだろう。今回扱う p 進族の「族」もまた、「適切なパラメータ付けがされた集まり」という意味に近い意味の「族」である。

　パラメータ付けのされた集合族を扱う上で、しばしばパラメータ全体のなす集合に位相などの構造が入ることがある。その場合、パラメータ付けされた集合にも似たような構造を考えることが多い。つまり位相空間でパラメータ付けされた族は、何らかの意味で連続である状況をしばしば考える。ではどのような方法で族の連続

性を自然に定義できるだろうか？　例えば 2 つの連続関数 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (k, x) \mapsto kx$ と $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^x$ の合成に随伴する「$\mathbb{R}$ で添字付けられた $\mathbb{R}$ 上の連続関数の族 $(e^{kx})_{k\in\mathbb{R}}$」と、不連続関数 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (k, x) \mapsto \lfloor k \rfloor x$ と連続関数 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^x$ の合成に随伴する「$\mathbb{R}$ で添字付けられた $\mathbb{R}$ 上の連続関数の族 $(e^{\lfloor k \rfloor x})_{k\in\mathbb{R}}$」を考える。どちらも各点での値は等しく e^{kx} の形をした連続関数であるが、パラメータ付けが異なるために全く違った見た目をしている。筆者は前者を連続な族とみなし、後者を不連続な族とみなしたい。この場合、方法はいくつかあるが、例えば「任意の $k_0 \in \mathbb{R}$ に対し $k \to k_0$ と近付けた時に広義一様収束するか否か」で連続関数の族の連続性を定式化することが可能である。この定式化に基づけば、$(e^{kx})_{k\in\mathbb{R}}$ が連続な族であり $(e^{\lfloor k \rfloor x})_{k\in\mathbb{R}}$ が不連続な族であることは即座に確かめられる。このように単純な方法で「族の連続性」を定式化出来た背景には、各点での値であるところの関数 e^{kx} が「$\mathbb{R}$ 上の連続関数全体」という k に依らない位相空間に属しているという事情がある。ではそうとは限らない一般の状況においてはどのようにして「族の連続性」が問えるだろうか？

もう少し複雑な状況を考える。各 $k \in \mathbb{R}$ に対し、写像 $[k, \infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto (x - k)^2$ を f_k と置き、写像 $[\lfloor k \rfloor, \infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto (x - \lfloor k \rfloor)^2$ を g_k と置く。すると $\mathbb{R}$ で添字付けられた、定義域の一定でない写像の族 $(f_k)_{k\in\mathbb{R}}$ と $(g_k)_{k\in\mathbb{R}}$ を得る。漠然と前者は連続な族に見え、後者は不連続な族に見えるが、各点で定義域が異なるため「$[0, \infty)$ 上の連続関数全体」のような 1 つの位相空間に値を取らず、先程と同じような直接的な方法で連続性を問うことが出来ない。そこで、無理やり両者の族を同じ位相空間に値を取らせることにする。各 $k \in \mathbb{R}$ に対し「$[k, \infty)$ 上の連続関数であって k での値が 0 であるもの全体」は 0 拡張によって「$\mathbb{R}$ 上の連続関数全体」に埋め込むことが可能であり、この埋め込みによって $(f_k)_{k\in\mathbb{R}}$ と $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ は、各点での値が k に依らない位相空間である「$\mathbb{R}$ 上の連続関数全体」に属する族に単射で対応することとなり、前段落での方法によって連続性を問うことができる。当然、$(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ は連続な族になり $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ は不連続な族になる。このように「各点での値が 1 つの位相空間に属さないような族」は、各点での値を何らかの単射によって 1 つの位相空間に埋め込むことで「各点での値が 1 つの位相空間に属する族」と対応し、自然に連続性を問うことが可能になる。もちろんそのような埋め込みの方法はただ 1 つではないため、目的に応じた選択が必要になる。例えば失敗例として、各 $k \in \mathbb{R}$ に対し「$[k, \infty)$ 上の連続関数全体」は 0 拡張によって「連結成分を非可算無限個持つ空間 $\bigsqcup_{k'\in\mathbb{R}}[k', \infty)$ 上の連続関数全体」に埋め込むことができるが、これはパラメータ空間 $\mathbb{R}$ の位相を全く反映させていない埋め込みであるため、これを用いた連続性の定式化では $(f_k)_{k\in\mathbb{R}}$ も $(g_k)_{k\in\mathbb{R}}$ も不連続な族とみなされてしまうのである。最後に演習を 1 つ用意した。

演習 1.1. 「$\mathbb{Z}_p$ の部分集合で添字付けられた $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ の有限次元既約連続 $\mathbb{Q}_p$ 線形表現の族」の連続性を好きな方法で定式化し、それに基づいて $\mathbb{Z}_p$ の部分集合としての $\mathbb{N} \cap [2, \infty)$ で添字付けられた $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ の有限次元既約連続 $\mathbb{Q}_p$ 線形表現の族 $(\mathrm{Sym}^{k-2}(\mathbb{Q}_p^2))_{k=2}^{\infty}$ が連続か否か判定せよ。（連続になっても不連続になっても良い。）

1.2　補間とは何か

p 進族とは「p 進的な構造が入ったパラメータ空間で添字付けられた、その p 進的な構造と何らかの意味で両立する族」のことである。その構造とはひとまず位相の

ことであると認識しておいて差し支えないが、最終的にはリジッド解析的構造を考えることになる。何故ならば、p 進位相は全不連結であるため、位相に関する単純な連続性が局所的な情報しか与えないからである。それに対しリジッド解析空間は局所連結であるため、構造との両立性がある程度大域的な情報を与えるのである。それを念頭に置いた上で、あくまで簡単のために最初は位相構造のみに注視する。

p 進的な位相が入ったパラメータ空間の例として、演習 1.1 では $\mathbb{N} \cap [2, \infty)$ に p 進位相を入れたものを考えた。しかし、どうせ p 進位相を考えるならば稠密部分空間の $\mathbb{N} \cap [2, \infty)$ よりも $\mathbb{Z}_p$ そのものを考えたくなるのが自然な発想である。このように「パラメータ空間の稠密部分空間で添字付けられた族を、パラメータ空間全体に連続に伸ばす」という操作が（位相的な）「族の補間」である。そしてこのような「族の補間」という操作を考えることこそが、「族の連続性」を考える大きな動機となる。では実際に「族の補間」の例を観察する。§1.1 で扱った写像の族 $(f_k)_{k \in \mathbb{R}}$ を再び考える。$\mathbb{R}$ の稠密部分空間としての $\mathbb{Q}$ で添字付けられた写像の族 $(f_k)_{k \in \mathbb{Q}}$ を考えると、その $\mathbb{R}$ での補間が $(f_k)_{k \in \mathbb{R}}$ であることは至極自然な要求であろう。「族の連続性」を定式化する以前の段階ではこのような自然な要求も、やはり「各点で定義域が異なる」という問題に直面し、本当に自然な要求であるか疑わしいものとなる。しかし一度「族の連続性」を埋め込みによって定式化した上では、「族の補間」という問題が「各点の値が同じ位相空間に属する族の連続拡張」という問題に帰着され、これは値域の位相空間がハウスドルフでありさえすれば一意性が保証され、確かに自然性が確認される。実際、$(f_k)_{k \in \mathbb{Q}}$ の連続性を $\mathbb{R}$ への 0 拡張で定式化した場合、その唯一の連続な補間が $(f_k)_{k \in \mathbb{R}}$ によって与えられ、逆に $(f_k)_{k \in \mathbb{Q}}$ の連続性を $\bigsqcup_{r' \in \mathbb{R}} [r', \infty)$ への 0 拡張で定式化しようとした場合、$(f_k)_{k \in \mathbb{Q}}$ がそもそも不連続な族となってしまい、その連続な補間は存在しなくなってしまう。以上のように、「族の補間」を考えるという問題は「族の連続性」を考える問題にほとんど帰着されることが分かる。

では改めて「モジュラー形式の p 進族」を考えることにする。パラメータ空間としては「ウェイト空間」と呼ばれる可換副有限群 W を考える。これは可換副有限群 $\mathbb{Z}_p^\times$ の連続自己準同型群に一様収束の位相を与えたものである。各 $k \in \mathbb{Z}$ に対し連続自己準同型 $\mathbb{Z}_p^\times \to \mathbb{Z}_p^\times, \ c \mapsto c^k$ を対応させることで、像が稠密な単射群準同型 $\mathbb{Z} \hookrightarrow W$ を得る。これにより $\mathbb{Z}$ を W の部分群とみなす。唯一の Teichmüller 埋め込みが誘導する同相同型 $\mathbb{F}_p^\times \times (1 + p\mathbb{Z}_p) \to \mathbb{Z}_p^\times$ により得られる標準的な同相同型 $W \to \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_p$ を $\mathbb{Z}$ に制限したものは、標準射影 $\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ と標準的な埋め込み $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}_p$ の直積に他ならない。各 $k \in \mathbb{N} \cap [2, \infty) \subset W$ に対し、ウェイト k の（$\mathbb{C}$ 上の）モジュラー形式 F_k が与えられているとする。$(F_k)_{k=2}^\infty$ は「W の稠密部分空間 $\mathbb{N} \cap [2, \infty)$ で添字付けられたモジュラー形式の族」であり、その連続性を定式化することで、$(F_k)_{k=2}^\infty$ の連続な補間という概念を考えることが可能となる。そしてその連続性の定式化に役立つのが、モジュラー形式の q 展開である。q 展開原理によって、モジュラー形式を q 展開するという対応は単射になり、その像はウェイト k に依らない 1 つの環 $\mathbb{C}[[q]]$ に入る。ここで $\mathbb{C}[[q]]$ には各次数の係数の絶対値を用いて位相を与えることができるが、その位相は p 進的な位相空間であるパラメータ空間 W と相性が悪い。そのため一旦 $\mathbb{C}$ と $\mathbb{Q}_p$ の代数閉包 $\overline{\mathbb{Q}}_p$ の $\mathbb{Q}$ 代数同型を 1 つ選び固定することで、モジュラー形式の q 展開を $\overline{\mathbb{Q}}_p[[q]]$ 値とみなすことにする。$\overline{\mathbb{Q}}_p[[q]]$ には各次数の係数の p 進位相による収束を用いて位相空間の構造が与えられ、これ

によってモジュラー形式はウェイト k に依らない 1 つの位相空間 $\overline{\mathbb{Q}}_p[[q]]$ に埋め込まれる。この埋め込みを用い、W の稠密部分集合 $\mathbb{N} \cap [2, \infty)$ で添字付けられたモジュラー形式の族の p 進的な連続性が定義され、当然その連続的な補間も意味を持つ。

さて、以上の議論によって「$\mathbb{N} \cap [2, \infty)$ で添字付けられたモジュラー形式の族」の「W への補間」という概念が定義された。（まだその存在は保証されていない。）埋め込みを用いた連続性の定義から、W への補間の各 $k \in W$ での値は $\overline{\mathbb{Q}}_p[[q]]$ の元を与えるが、これは最早モジュラー形式ではなくなってしまう。しかしながらその元は本稿で後程説明される「過収束モジュラー形式」という、古典的モジュラー形式を「コントロールできる程度に」拡張して得られる範疇に踏み留まらせることが可能で、モジュラー形式を「コントロールできない程度まで」広げてしまった一般の $\overline{\mathbb{Q}}_p[[q]]$ の元を考える必要はないことを前以て述べておく。実際にモジュラー形式の p 進族を扱う上で興味がある対象は「W またはそれに類する空間 X で添字付けられた古典的モジュラー形式の族」であり、いくら古典的モジュラー形式の一般化を考えるとしても最終的には古典的モジュラー形式の議論に戻ってくることが可能なものしか考えたくはないのである。ここで重要なことは、元々「$\mathbb{N} \cap [2, \infty)$ で添字付けられたモジュラー形式の族 $(F_k)_{k=2}^{\infty}$」を考える際に、「各 $k \in \mathbb{N} \cap [2, \infty)$ に対して F_k はウェイト k のモジュラー形式である」という非自明な制約を課していたということである。従って当然、このような $(F_k)_{k=2}^{\infty}$ を補間して得られる連続な族 $(F_k)_{k \in X}$ も、（もし存在すれば）同じ制約を受けることとなる。しかも、この制約は $k \in \mathbb{N} \cap [2, \infty)$ での F_k のみに限らず一般の $k \in X$ での F_k へも制約を与える。例えば X が W の部分集合である場合にその制約を標語的に書くならば、それは「各 $k \in X$ に対して F_k はウェイト k 過収束モジュラー形式である」という制約に他ならない。

演習 1.2. X を $\mathbb{Z}_p$ または W とする。「X の部分集合で添字付けられた $1 + p\mathbb{Z}_p$ の 1 次元連続 $\mathbb{Q}_p$ 線形表現の族」の連続性を定式化し、それに基づいて X の部分集合としての $\mathbb{Z}$ で添字付けられた $1 + p\mathbb{Z}_p$ の 1 次元連続 $\mathbb{C}_p$ 線形表現の族 $(\mathrm{id}_{\mathbb{Z}_p^\times}^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ が連続か否か判定し、連続である場合はその X への連続的な補間が存在するかどうか確かめよ。

1.3 抽象論の使い方

§1 の冒頭で述べたように、[Col97] の B 節において「モジュラー形式の p 進族」を扱う上で鍵となるのが p 進 Fredholm 理論とリジッド幾何である。まず「モジュラー形式の p 進族」として特に興味深いのが、「Hecke 固有形式の p 進族」である。Hecke 固有形式は q 展開を通じて Hecke 固有値の系、即ち Hecke 作用素たちの固有値の系と同一視される。Hecke 作用素たちの固有値の系の中で、特に p における Hecke 作用素 $T(p)$ の固有値が有する情報が大きく、「Hecke 固有形式の p 進族」を考えるためには実質「$T(p)$ の固有値の p 進族」を考えることに帰着される。ウェイトをパラメータとし、$T(p)$ の固有値、即ち $\overline{\mathbb{Q}}_p$ の元を値とする族を考えるということは、$W \times \overline{\mathbb{Q}}_p$ の部分集合を考えることに他ならない。更に§1.1, §1.2 で説明したように、p 進族を考える上では単純な位相構造だけでなく、より堅い情報を持ったリジッド解析的構造を反映させることが望ましいため、ウェイト空間 W のリジッド解析化 $\mathscr{W}$ とアフィン直線 $\mathrm{Spec}(\mathbb{Q}_p[Z])$ のリジッド解析化 $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}_p}$ を用い、$\mathscr{W} \times_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}_p}$ の閉部分空間を考えることとなる。ただし§1.2 で説明したように、勝手な p 進族を考えるの

ではなくウェイトパラメータが固有形式のウェイトと整合的であることを要請しているため、ここで扱う閉部分空間も各 $\mathbb{C}_p$ 値点 $(S,Z)=(s,z)$ が「z はウェイト s の過収束固有形式の $T(p)$ 固有値である」という制約が課されることに注意する。ここで $\overline{\mathbb{Q}}_p$ には $\mathbb{Q}_p$ の付値の一意な延長を与え、$\mathbb{C}_p$ で $\overline{\mathbb{Q}}_p$ の完備化として得られる完備付値体を表した。この時 $\mathbb{C}_p$ もまた代数閉体となる。各 $\mathbb{C}_p$ 値点への制約は即ち「ウェイトパラメータ s を動かした時に $T(p)$ の固有値 z は $T(p)$ のウェイト s への制限 $U_{(s)}$ の固有値を動く」という制約として換言され、1 つの Hecke 作用素 $T(p)$ の代わりに「$\mathscr{W}(\mathbb{C}_p)$ で添字付けられた Hecke 作用素の族 $(U_{(s)})_{s\in\mathscr{W}(\mathbb{C}_p)}$」を考えることになる。

さて、閉部分空間を得るためには（構造層や定義環の）イデアルを定めれば良く、そのためにはまず「$(U_{(s)})_{s\in\mathscr{W}(\mathbb{C}_p)}$ の固有値全体を特徴付ける方程式」を考える。ここで話を一旦有限次元 $\mathbb{C}_p$ 線形空間に移すと、その上の作用素、即ち $\mathbb{C}_p$ 係数行列 M の固有値は変数付き行列式であるところの特性多項式 $\det(Z-M)\in\mathbb{C}_p[Z]$ によって特徴付けられる。これと同様に、無限次元 $\mathbb{C}_p$ 線形空間上の作用素に対しても、適切な条件下で Fredholm 行列式という（至る所で収束する）$\mathbb{C}_p[[Z]]$ の元が特性多項式の代わりに固有値を特徴付ける。これが p 進 Fredholm 理論である。特に、無限次元 $\mathbb{C}_p$ 線形空間であるウェイト s 過収束モジュラー形式の空間に作用する Hecke 作用素 $U_{(s)}$ の Fredholm 行列式 $P(s,Z)\in\mathbb{C}_p[[Z]]$ を用いることで、$U_{(s)}$ の固有値を特徴付けることが可能となる。こうして $\mathscr{W}(\mathbb{C}_p)$ で添字付けられた $\mathbb{C}_p$ 係数冪級数の族 $(P(s,Z))_{s\in\mathscr{W}(\mathbb{C}_p)}$ を得たが、これは実質 $\mathscr{W}(\mathbb{C}_p)$ 上の $\mathbb{C}_p$ 値関数を係数に持つ冪級数 $P(S,Z)$ を得たことに等しく、それは更に冪級数の不定元 Z に $\mathbb{C}_p\cong\mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}_p}(\mathbb{C}_p)$ の各元 z を代入することで $\mathscr{W}\times_{\mathbb{Q}_p}\mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}_p}$ 上のリジッド解析的関数とみなすことができる。その構成から $P(S,Z)$ は「$(U_{(s)})_{s\in\mathscr{W}(\mathbb{C}_p)}$ の固有値全体を特徴付ける方程式」に他ならない。

本題に戻ると、元々欲しかったものは「$\mathscr{W}$ やその適切な部分空間 $\mathscr{B}$ の $\mathbb{C}_p$ 値点で添字付けられた Hecke 固有形式の p 進族」である。各ウェイト s ごとに $U_{(s)}$ の固有値は複数の値を取りうるため、$P(S,Z)$ が定める閉部分空間そのものは目的物ではなかった。例えばウェイト $k_0\in\mathbb{N}\cap[2,\infty)\subset\mathscr{W}(\mathbb{C}_p)$ を 1 つ固定し、ウェイト k_0 Hecke 固有形式 f_{k_0} を 1 つ固定した上で、f_{k_0} を構成要素とするような Hecke 固有形式の p 進族 $(f_k)_{k\in\mathscr{B}(\mathbb{C}_p)}$ を得るためにはもう一工夫必要となる。そのような p 進族が存在したとすれば、対応する $T(p)$ の固有値の p 進族は $P(S,Z)$ が定める閉部分空間の閉部分空間になる必要があり、従って局所的には $P(S,Z)$ の因子に対応することになる。ここで活きてくるのが「p 進族に単なる位相構造だけでなくリジッド解析的構造との整合性を課す」という制約で、$\mathscr{W}$ 上の局所的な有限性の議論から、Z に関する冪級数 $P(S,Z)$ を $S=k_0$ の近傍で Z に関する多項式 $Q(S,Z)$ によって代用させることが可能となり、更に多項式は冪級数と違って p 進 Riesz 理論を適用することが可能であるため、k_0 の十分小さい近傍 $\mathscr{B}$ に対し「$\mathscr{B}(\mathbb{C}_p)$ で添字付けられた Hecke 固有形式の p 進族」は「$\mathscr{B}$ の関数環上の有限生成加群へ $T(p)$ の作用を制限して得られる作用素の固有値の p 進族」として翻訳される。一度係数環上の有限性が保証されれば、後は単因子論や Hecke 環の双対性といった純代数的な議論に帰着させることが可能となり、望ましい p 進族を得ることができる。纏めると「p 進 Fredholm 理論により有限次元行列の特性多項式の理論を無限次元に拡張することが可能」になり、「リジッド幾何により位相構造より堅い大域的な情報を扱えることで有限的なイデアルや幾何的な有限性を考えることが可能」になり、「p 進 Riesz 理論により無限次

元である過収束モジュラー形式の空間を局所的に有限生成加群で代用させることが可能」になった。即ち A 節で紹介された 3 つの抽象論はいずれも、「有限的でなく」「代数的でもない」故に生じた本質的な困難を解消するための自然な道具である。

2　本題

この章では [Col97] の B 節について概説を行う。ただし B 節には R. F. Coleman の後続の論文で応用するための Theorem や Lemma や Remark が数多く含まれているので、§B5 の R 族の構成の骨子となる部分のみ扱う。A 節で述べられている事実は認めるため、適宜 A 節を参照して戴きたい。擬距離や非アルキメデス的ノルムに馴染みがない人は [BGR84] 1.1.1 Definition 1, Proposition 2, Proposition 3, Proposition 4, 1.1.3 Definition 1, Proposition 3, Proposition 5 を、$\mathbb{Q}_p$ を始めとする付値体に馴染みがない人は [BGR84] 1.2.1 Proposition 3, 1.5.1 Definition 1 を、p 進 Banach 空間に馴染みがない人は [BGR84] 2.1.1 Definition 1, Proposition 4, 2.8.1 Definition 1 を、有界準同型に馴染みがない人は [BGR84] 1.1.3 Proposition 6, 2.1.8 Corollary 3 を、p 進 Banach 代数に馴染みがない人は [BGR84] 3.1.1 Definition 1, 3.7.1 Definition 1, [Ber90] 1.1.1 Examples を、アフィノイド代数に馴染みがない人は [BGR84] 5.1.1 Proposition 1, 5.1.2 Proposition 1, 5.1.4 Proposition 1, Proposition 2, 6.1.1 Definition 1, Proposition 3, 6.1.3 Theorem 1 を、p 進 Banach 加群に馴染みがない人は [BGR84] 3.7.3 Proposition 2, Proposition 3 を眺めておくと良い。今回のテーマと外れるが、整数論サマースクールを通じて p 進 Banach 代数の理論に興味を持った人は [Ber90] を読み進めると良い。[Ber90] では所々[BGR84] が引用されているが、前以て [BGR84] を通読しておく必要はなく、逐一辞書のように [BGR84] を参照すれば十分に読むことができる。

2.1　整数ウェイト過収束モジュラー形式

$N \geq 5, m \geq 0$ を自然数とし、$p \geq 5$ は N を割らない素数とする。（$p = 2, 3$ の場合も [Col97] の B 節では扱われているが、付加条件が些か煩雑になるため本稿では省略する。）以下ではレベル $\Gamma_1(Np^m)$ について述べるが、レベル $\Gamma(N)$ でもほぼ同様である。レベル $\Gamma(N)$ について詳しく記載されている [Kat73] の該当箇所を適宜参考文献として挙げる。$Y_1(Np^m)$ でレベル $\Gamma_1(Np^m)$ のモジュラー曲線を表し、$X_1(Np^m)$ でそのコンパクト化を表す。$E_1(Np^m)$ で $X_1(Np^m)$ 上の普遍広義楕円曲線を表し、ω で $\Omega^1_{E_1(Xp^m)/X_1(Np^m)}$ の $X_1(Np^m)$ への順像を表す。ただし ω の定義において、$Y_1(Np^m)$ 上の可逆層の延長にカスプでの条件を課していた [Kat73] p. 82 や log 付きの Ω^1 を用いていた [Col96] p. 217, p. 235 との記法の微妙な違いに気を付ける。後程 E は特別なモジュラー形式の記号として用いるので、$E_1(Np^m)$ は今後一切現れないものとする。

$k \in \mathbb{Z}$ と $\mathbb{Q}$ 代数 A に対し、A 上のウェイト k レベル $\Gamma_1(Np^m)$ モジュラー形式とは $X_1(Np^m)$ 上の可逆層である ω^k の A 上での大域切断、即ち $\mathrm{H}^0(X_1(Np^m)_A, \omega^k)$ の元のことである。モジュラー形式の「関数としての翻訳」（cf. [Kat73] p. 77, p. 83）によって、A 上のモジュラー形式は自然に楕円曲線と付加構造のデータを入力とし係数環である A 代数の元を出力とする関数とみなすことができる。例えば $\mathbb{Q}$ 上のモジュラー形式に $\mathbb{C}$ 上の楕円曲線と付加構造を代入すれば $\mathbb{C}$ 値の出力を返し、$\mathbb{C}_p$ 上の楕

円曲線と付加構造を代入すれば $\mathbb{C}_p$ 値の出力を返す。また q 展開原理（cf. [Kat73] p. 78, Corollary 1.6.2）により、関数として翻訳されたモジュラー形式に Tate 曲線という $A[[q]]$ 上の特別な楕円曲線と付加構造のデータを代入して得られる形式冪級数（q 展開と呼ぶ）は元のモジュラー形式の情報を保存するため、モジュラー形式を A 上の形式冪級数とみなすことも可能である。以上のように、モジュラー形式には「可逆層の切断」、「関数としての翻訳」、「q 展開」という 3 通りの等価な定義が知られている。それらに対応して 3 通りの方法で p 進モジュラー形式を定式化することができ、それぞれ順に Coleman 流、Katz 流、Serre 流の定式化となる。[Col97] の B 節では Coleman 流の定式化が用いられているため、本稿もそれに準えて解説をする。

モジュラー形式の具体例としては、$\mathbb{Q}$ 上のウェイト $k \geq 4$ レベル $\Gamma(1)$ モジュラー形式である Eisenstein 級数 E_k（cf. [Kat73] p. 98）と $\mathbb{F}_p$ 上のウェイト $p-1$ レベル $\Gamma(1)$ モジュラー形式である Hasse 不変量（cf. [Kat73] p. 97）がある。Deligne の合同式として E_{p-1} が Hasse 不変量の持ち上げであることが知られている。係数体 K を $\mathbb{C}_p$ の部分 $\mathbb{Q}_p$ 代数で完備離散付値体をなすものとする。（$K = \mathbb{C}_p$ の場合も [Col97] の B 節では扱われているが、説明の都合上省略する。）K 上の過収束モジュラー形式という概念を導入する。K（及びその有限次拡大）が離散付値体であることと $X_1(N)_K$ が標準的なモデルを持つことから、$X_1(N)_K$ 上の可逆層の切断は各点で p 進付値が well-defined（cf. [Col96] p. 216）である。特に可逆層 ω^{p-1} の大域切断である E_{p-1} を考えると、$X_1(N)_K$ の各閉点 x に対し $|E_{p-1}(x)|$ という値が意味を持つことに注意する。

E_{p-1} の q 展開は $\mathbb{Z}_p[[q]]$ の可逆元であることが知られており、K 上のモジュラー形式を考える上では E_{p-1} が切断として零点を持たない方が都合が良い。そこで $|E_{p-1}(x)| = 0$ となるような $X_1(Np^m)_K$ の閉点 x に対応する楕円曲線を「超特異楕円曲線」と呼んで初めから排除することにする。より正確には、収束半径に対応するデータ $v_0 \in \mathbb{Q} \cap [0, p^{-m+2}(p+1)^{-1})$ を固定し、$|E_{p-1}(x)| \geq |p|^{v_0}$ なる点 x 全体のなす「$X_1(N)_K$ のリジッド解析化」のアフィノイド部分空間を $X_1(N)(v_0)$ と置き、$X_1(N)(v_0)$ を用いて更に「$X_1(Np^m)_K$ のリジッド解析化」に対しても（少し煩雑な方法で）$X_1(Np^m)(v_0)$ というアフィノイド部分空間が定義される。このような p 進付値の不等式で与えられる部分集合はスキーム論においては部分空間を与えなかったが、リジッド幾何においては部分空間を与えるという点が重要である。$k \in \mathbb{Z}$ に対し $X_1(Np^m)(v_0)$ での ω^k の切断の空間 $\mathrm{H}^0(X_1(Np^m)(v_0), \omega^k)$ を $M_{Np^m,k}(v_0)$ と置くことにする。[Col97] の A 節の記法に合わせて K 上のリジッド解析空間 $\mathscr{X}$ 上のリジッド解析的関数全体のなす（セミノルム付き）K 代数を $A(\mathscr{X})$ と表すことにすると、ω^0 が $X_1(Np^m)(v_0)$ の構造層に他ならないことから、定義より自明な等式 $M_{Np^m,0}(v_0) = A(X_1(Np^m)(v_0))$ を得る。

$v \leq v'$ なる $\mathbb{Q} \cap (0, p^{-m+2}(p+1)^{-1})$ の各元 v と v' に対し包含関係 $X_1(Np^m)(0) \subset X_1(Np^m)(v) \subset X_1(Np^m)(v')$ が成り立ち、制限写像 $M_{Np^m,k}(v') \to M_{Np^m,k}(v) \to M_{Np^m,k}(0)$ を考えることで、$M_{Np^m,k}(0)$ へ整合的な射を持つ順系 $(M_{Np^m,k}(v))_{v \in \mathbb{Q} \cap (0, p^{-m+2}(p+1)^{-1})}$ を得る。$M_{Np^m,k}(0)$ の元のことを「K 上のウェイト k レベル $\Gamma_1(Np^m)$ 収束モジュラー形式」と呼び、更に自然な射 $\varinjlim_{v \in \mathbb{Q} \cap (0, p^{-m+2}(p+1)^{-1})} M_{Np^m,k}(v) \to M_{Np^m,k}(0)$ の像の元のことを「K 上のウェイト k レベル $\Gamma_1(Np^m)$ 過収束モジュラー形式」と呼ぶ。これらがいわゆる Coleman 流の p 進モジュラー形式である。以下では v_0 を固定して話を進める。

さて、$X_1(Np^m)(v_0)$ が被約アフィノイド空間であることから $A(X_1(Np^m)(v_0))$ は被

約アフィノイド代数をなす。特に $A(X_1(Np^m))$ には一様 Banach K 代数（[Ber90] p. 16）の構造が一意に備わる（cf. [BGR84] 6.2.4 Theorem 1, [Ber90] 1.3.1 Theorem）。従って、アフィノイド空間における「連接層と有限生成加群の等価性」を保証する Kiehl の定理（cf. [BGR84] 9.4.3 Theorem 3）とアフィノイド代数における「有限生成加群と有限生成 Banach 加群の等価性」（cf. [BGR84] 3.7.3 Proposition 3）により、$M_{Np^m,k}(v_0)$ には自然に（同型を除いて一意な）Banach $A(X_1(Np^m)(v_0))$ 加群の構造が入る。ただしその Banach $A(X_1(Np^m)(v_0))$ 加群としてのノルムは、q 展開の係数の p 進付値を用いて定まる（$A(X_1(Np^m)(v_0))$ 加群構造と無関係な）ノルムとは異なることに気を付ける。即ち、q 展開を用いて定式化する族の連続性は、直接はこの Banach 加群構造と関係ない。しかしながら§2.3 で述べる方法によって、族 $(M_{Np^m,k}(v_0))_{k\in\mathbb{Z}}$ は Banach 加群構造と両立する形でリジッド解析的に補間されるということを前以て述べておく。さて、$v_0 > 0$ の場合には [Col96] p. 220 と同様の方法で $M_{Np^m,k}(v_0)$ 上の p における Hecke 作用素 $U_{(k)}$ が定義される。なお、各 $F \in M_{Np^m,k}(v_0)$ に $U_{(k)}$ を作用して得られる元を $F \mid U_{(k)}$ のように表し、今後現れる他の作用素についても同様の記法を採用する。こうして得られた（各点で定義域の異なる）有界 K 線形作用素の族 $(U_{(k)})_{k\in\mathbb{Z}}$ 及びその固有値の族を（連続的に）補間することを次の目標とする。

2.2　作用素と特性多項式の補間

以下では $m = 1$ の状況のみを扱う。（[Col97] の B 節では $(p, m) = (2, 2), (3, 1)$ の場合も扱っているが、§2.1 に引き続き本稿では $p \geq 5$ の場合のみ扱う。）$v \in \mathbb{Q}\cap[0, p(p+1)^{-1})$ に対し $X(v) \coloneqq X_1(Np)(v)$、$M_k(v) \coloneqq M_{Np,k}(v)$ と置く。まず $(U_{(k)})_{k\in\mathbb{Z}}$ の補間を行うために、各点での定義域 $M_k(v)$ を揃える（cf. §1.2）。即ち 1 つの Banach K 線形空間へ同相同型を構成する。（既に各 $k \in \mathbb{Z}$ に対し $M_k(v)$ そのものは q 展開により k に依らない位相空間 $K[[q]]$ に埋め込まれているが、$U_{(k)}$ 自体は $K[[q]]$ 全体に定義されているわけではないので、改めて q 展開とは別の方法で定義域を揃え直す必要がある。）

$\mathbb{Q}_p$ 上のウェイト 1 レベル $\Gamma_1(p)$ 過収束モジュラー形式の例として、E または $E_{(1,0)}$ と表わされるものがある。これは q 展開が p 進 L 関数 L_p と指標 $\tau\colon \mathbb{Z}_p^\times \to \mathbb{Q}_p^\times,\ c \mapsto \tau(c) \coloneqq \lim_{n\to\infty} c^{p^n}$ を用いて具体的に記述されるものである。E の q 展開は $\mathbb{Z}_p[[q]]$ の可逆元であり、その逆元に対応する q 展開を持つ $\mathbb{Q}_p$ 上のウェイト -1 レベル $\Gamma_1(p)$ 過収束モジュラー形式が存在し、それを E^{-1} と書くことにする。q 展開の積で定義される写像 $M_k(v) \to M_0(v),\ F \mapsto E^{-k}F$ と $M_0(v) \to M_k(v),\ F \mapsto E^kF$ は互いに逆写像である有界 K 線形写像をなす。以上より $M_k(v)$ は k に依らず $M_0(v)$ と同相同型である。（古典的モジュラー形式の空間の次元がウェイトに依存して異なってしまっていたことを思い出すと、過収束モジュラー形式を導入した恩恵が分かるであろう。）

前段落の同相同型により $U_{(k)}$ を $M_k(v)$ から $M_0(v)$ に引き戻して得られる有界 K 線形作用素を u_k と置く。以下 $v > 0$ とし、v を $\mathbb{Q}\cap(0, p^{-m+2}(p+1)^{-1})$ の中で十分小さく取り替えておけば、[Col96] p. 220 の議論により u_k は具体的に表され、各 $h \in M_0(v)$ に対し $u_k(h) = U_{(0)}(hE^k\sigma(E)^{-k})$ となる。ここで $\sigma(E) \in M_1(v/p)$ は q 展開が E の q 展開を $q \mapsto q^p$ として得られる冪級数で与えられるような $\mathbb{Q}_p$ 上のウェイト 1 レベル $\Gamma_1(p)$ 過収束モジュラー形式であり、v を十分小さく取り直している状況では $M_1(v)$ に属するとして良い。u_k と $U_{(k)}$ はいずれも完全連続作用素であることが確かめられ、

[Col97] A2 章の方法により Fredholm 行列式が定義される。引き戻しを用いた u_k の定義から Fredholm 行列式の等式 $\det(1-ZU_{(k)} \mid M_k(v)) = \det(1-Zu_k \mid M_0(v))$ を得る。

さて、$e := E\sigma(E)^{-1} \in M_0(v)$ は $X(v)$ 上のリジッド解析的関数である。等式 $u_k(h) = U_{(0)}(hE^k\sigma(E)^{-k})$ に再び注目すると、これは $u_k(h) = U_{(0)}(he^k)$ と書き改めることができる。v を十分小さく取り直している状況では $e-1$ の値の絶対値が $X(v)$ 上で一様に $|p|^{-1+(p-1)^{-1}}$ で上から評価でき、二項展開を用いた指数の補間により、$\mathbb{Z}$ で添字付けられた $X(v)$ 上のリジッド解析的関数の族 $(e^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ はリジッド解析的な族 $(e^s)_{s\in\mathscr{B}^*(\mathbb{C}_p)}$ へと補間される。ここで、$\mathscr{B}^*$ はアフィン直線 $\mathrm{Spec}(K[Z])$ のリジッド解析化 $\mathbb{A}_K^1$ の部分空間で原点を中心とする半径 $|p|^{-1+(p-1)^{-1}}$ の開円盤を表す。$\mathbb{Z}$ は $\mathscr{B}^*(\mathbb{C}_p)$ の中で稠密ではないが、$\mathscr{B}^*$ の連結性とリジッド解析的関数の一致の定理からこのような補間は一意である。二項展開に関する指数の議論は演習 1.2 にも関係が深いので、判然としない場合は一度戻ると良い。また $\mathscr{B}^*(\mathbb{C}_p)$ で添字付けられた $X(v)$ 上のリジッド解析的関数の族 $(e^s)_{s\in\mathscr{B}^*(\mathbb{C}_p)}$ がリジッド解析的であるとは即ち、$\mathscr{B}^* \times_K X(v)$ 上の 1 つのリジッド解析的関数 e^S に随伴するということである。直積空間上の関数と関数の族が随伴するということの意味に関しては§1.1 の第 2 段落を思い出すと良い。

各 $s \in \mathscr{B}^*(\mathbb{C}_p)$ に対し等式 $u_s(h) := U_{(0)}(he^s)$ で $M_0(v)$ 上の完全連続な有界 K 線形作用素 u_s を定義することにより、$(u_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ の一意な連続補間 $(u_s)_{s\in\mathscr{B}^*(\mathbb{C}_p)}$ を得る。以上により、$(U_{(k)})_{k\in\mathbb{Z}}$ と等価な族 $(u_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ の連続補間 $(u_s)_{s\in\mathscr{B}^*(\mathbb{C}_p)}$ を得た。更に Fredholm 行列式を取ることにより、$\mathbb{A}_K^1$ 上のリジッド解析的関数の族 $(\det(1-ZU_{(k)} \mid M_k(v)))_{k\in\mathbb{Z}} = (\det(1-Zu_k \mid M_0(v)))_{k\in\mathbb{Z}}$ のリジッド解析的な補間 $(\det(1-Zu_s \mid M_0(v)))_{s\in\mathscr{B}^*(\mathbb{C}_p)}$ を得た。これは即ち $\mathscr{B}^* \times_K \mathbb{A}_K^1$ 上の 1 つのリジッド解析的関数 $P(S,Z)$ であって、各 $k \in \mathbb{Z}$ に対し等式 $P(k,Z) = \det(1-ZU_{(k)} \mid M_k(v))$ を満たすものに随伴する。Fredholm 行列式の定義は Fredholm 作用素が作用する Banach K 線形空間に強く依存するが、実は $(M_k(v))_{k\in\mathbb{Z}}$ を用いて定義した $P(S,Z)$ が v に依らないということが、Frobenius 射と呼ばれる有限射 $X(v/p) \to X(v)$（cf. [Kat73] p. 122）に関するトレース射 $M_k(v/p) \to M_k(v)$ と v を縮めることによる制限写像の非自明な関係を調べることで確かめられる。ここで注意が必要なのは、結果的に $P(S,Z)$ が v に依存しないからといって、最初から v に関する順極限を取って過収束モジュラー形式全体で p 進 Fredholm 理論を考えるようなことはできないということである。p 進 Fredholm 理論はあくまで Banach K 代数上の直交化可能 Banach 加群に対する理論であり、v に関して順極限を取って得られる代数や加群は最早完備ではないため p 進 Fredholm 理論が適用できないのである。

t で唯一の Teichmüller 埋め込み $\mathbb{F}_p^\times \hookrightarrow \mathbb{Q}_p^\times$ を表すとする。各 $(k,i) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ に対し $S_k(v,i) \subset M_k(v)$ で指標 t^i 過収束カスプ形式のなす K 線形部分空間を表すとする。即ち $S_k(v,i)$ は $\mathbb{F}_p^\times$ の $M_k(v)$ への自然な作用に関して指標 t^i に属する固有空間の元であって、e^{-k} を掛けて得られる $M_0(v)$ の元が $X(v)$ の各カスプを零点に持つようなもの全体のなす部分集合である。固定した $i \in \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ について、$(M_k(v))_{k\in\mathbb{Z}}$ の代わりに $(S_k(v,i))_{k\in\mathbb{Z}}$、$(U_{(k)})_{k\in\mathbb{Z}}$ の代わりに $(U_{(k)}|_{S_k(v,i)})_{k\in\mathbb{Z}}$、$(\det(1-ZU_{(k)} \mid M_k(v)))_{k\in\mathbb{Z}}$ の代わりに $(\det(1-ZU_{(k)} \mid S_k(v,i)))_{k\in\mathbb{Z}}$ を考えることで、$P(S,Z)$ と同様に $(\det(1-ZU_{(k)} \mid S_k(v,i)))_{k\in\mathbb{Z}}$ のリジッド解析的な補間に随伴するリジッド解析的関数 $P_i^0(S,Z) \in A(\mathscr{B}^* \times_K \mathbb{A}_K^1)$ を得る。$P_i^0(S,Z)$ もまた v に依らないことが $P(S,Z)$ と同様の議論により確かめられる。

有界 K 線形作用素の族 $(u_s)_{s\in\mathscr{B}^*(\mathbb{C}_p)}$ 自体はリジッド解析的関数の族ではないので

族のリジッド解析性が問えないが、パラメータ空間 $\mathscr{B}^*$ はリジッド解析空間であり、作用する空間 $M_0(v)$ もリジッド解析空間 $X(v)$ 上のリジッド解析的関数のなす空間 $A(X(v))$ であるため、自然なリジッド解析的補間が考えられる。即ち、$\mathscr{B}^* \times_K X(v)$ の構造層に作用する K 線形作用素 U^* であって、各アフィノイドでの切断への作用が有界 K 線形作用素をなし、かつ各 $s \in \mathscr{B}^*(\mathbb{C}_p)$ に対し $S = s$ への制限が u_s と整合的であるようなものがただ 1 つ存在する。ここで $\mathscr{B}^*$ は開円盤であり、閉円盤と違ってアフィノイド空間ではないことに気を付ける。大域切断の空間 $A(\mathscr{B}^* \times_K X(v))$ は単なるセミノルム付き K 代数であり最早 Banach K 線形空間をなさないため、大域切断への U^* 作用には直接 p 進 Fredholm 理論が適用可能ではないのである。代わりに層全体への U^* の作用を見ることで、リジッド解析的な位相について局所的には p 進 Fredholm 理論が適用可能になる。これもまたリジッド幾何を使う利点であろう。

$\mathscr{B}^*$ に含まれる各閉円盤に対し $\mathscr{B}_0 \times_K X(v)$ が $\mathscr{B}^* \times_K X(v)$ のアフィノイド部分空間をなすため、U^* の作用は $A(\mathscr{B}_0 \times_K X(v)) \cong A(\mathscr{B}_0)\hat{\otimes}_K M_0(v)$ への完全連続な有界 $A(\mathscr{B}_0)$ 線形作用素を与える。これに p 進 Fredholm 理論を適用することで、$A(\mathscr{B}_0)$ 係数の Fredholm 行列式 $P'(S,Z) \in A(\mathscr{B}_0)[[Z]]$ を得る。Fredholm 行列式はその定義から、Banach K 代数の拡大による完備テンソルを用いた直交化可能 Banach 加群の係数拡大について関手的である。更に原点を中心とする単位閉円盤を含むように $\mathscr{B}_0$ を $\mathscr{B}^*$ の中で大きく取っておけば、U^* が作用する $A(\mathscr{B}_0 \times_K X(v))$ を各 $k \in \mathbb{Z} \subset \{s \in \mathscr{B}^*(K) \mid |s| \leq 1\} \subset \mathscr{B}_0(K)$ で特殊化した Banach K 代数は $K\hat{\otimes}_K A(X(v)) \cong M_0(v)$ に他ならず、特殊化写像 $A(\mathscr{B}_0 \times_K X(v)) \twoheadrightarrow M_0(v)$ は U^* を u_k に対応させるので、等式 $P'(k,Z) = \det(1 - Zu_k \mid M_0(v))$ を得る。これは $P(S,Z)$ の特徴付けであるので、結局 $P'(S,Z)$ は $P(S,Z)|_{\mathscr{B}_0 \times_K \mathbb{A}^1_K}$ に他ならない。以上より、$P(S,Z)$ は（定義されない筈の）「U^* の大域的な Fredholm 行列式」の役割を持つことが分かる。同様に各 $i \in \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ に対し $P^0_i(S,Z) \in A(\mathscr{B}^*)[[Z]]$ も「U^* の指標 t^i 過収束カスプ形式の族への制限の大域的な Fredholm 行列式」の役割を持つ。纏めると、v や $\mathscr{B}_0$ を固定して Banach K 代数上の直交化可能 Banach 加群の話に落とすことで p 進 Fredholm 理論が適用可能になり、Fredholm 行列式が v や $\mathscr{B}_0$ の取り方に本質的に依らないことを示すことで、「U^* の大域的な Fredholm 行列式」である $P(S,Z)$ と $P^0_i(S,Z)$ を得た。

2.3 Hecke 環と R 族の構成

§2.1 で $k \in \mathbb{Z}$ と $m \in \mathbb{N}$ に対し K 上のウェイト k レベル $\Gamma_1(Np^m)$ 過収束モジュラー形式の空間を定義した。特に $m = 1$ の場合に絞り、ウェイトパラメータについて連続的に K 上のレベル $\Gamma_1(Np)$ 過収束モジュラー形式を補間し、R 族という族を構成することを最終目的とする。ここでウェイトとレベルという概念について、[Col97] の §B1–3 と§B4–5 で定式化の仕方が異なることに気を付ける。前者は Katz 流の p 進モジュラー形式としてのウェイトとレベルであり、後者は Serre 流の p 進モジュラー形式としてのウェイトとレベルである。２通りの定式化の対応については [Col96] Theorem 9.1 で述べられているのでその概略を述べる。各 $k \in \mathbb{Z}$ に対し、$\mathbb{F}_p^\times$ の $M_k(0)$ への自然な作用が定まり、K が $t(\mathbb{F}_p^\times)$ を含むことから $M_k(0)$ は $\mathbb{F}_p^\times$ 作用に関する固有空間へ直和分解される。各 $i \in \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ に対し、指標 t^i に属する固有空間を $M_k(0,i) \subset M_k(0)$ と置き、$M_k(0,i)$ に属する K 上のウェイト k レベル $\Gamma_1(Np)$ 過収束

モジュラー形式を「K 上のウェイト k レベル $\Gamma_1(Np)$ 指標 t^i 過収束モジュラー形式」と呼ぶ。これは Katz 流の p 進モジュラー形式と整合的な定式化であり、Serre 流の p 進モジュラー形式としては「K 上のウェイト $(k, k+i)$ レベル $\Gamma_1(N)$ 過収束モジュラー形式」と表現する。そこで Serre 流の p 進モジュラー形式の意味でのウェイト $k = (s, i) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ に対し、K 上のウェイト k レベル $\Gamma_1(N)$ 過収束モジュラー形式の空間を $M_k^\dagger(N) \subset M_s(0, i-s)$ と表すことにする。以上より、Serre 流のウェイト空間 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ で添字付けられた K 線形空間の族 $(M_k^\dagger(N))_{k \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}}$ を得た。

さて、§1.3 で定義した $\mathbb{Q}_p$ 上のリジッド解析空間 $\mathscr{W}$ を復習する。これは副有限可換群 $\mathbb{Z}_p^\times$ の連続自己準同型群に一様収束の位相を入れた副有限可換群であるウェイト空間 W のリジッド解析化であり、$\mathscr{W}(\mathbb{C}_p)$ は自然に連続群準同型 $\mathbb{Z}_p^\times \to \mathbb{C}_p^\times$ 全体の空間と同一視される。各 $k = (s, i) \in \mathscr{B}^*(\mathbb{C}_p) \times \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ に対し連続群準同型 $\mathbb{Z}_p^\times \to \mathbb{C}_p^\times, c \mapsto (c\tau(c)^{-1})^s \tau(c)^i$ を対応させることで $\mathscr{B}^* \times \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ を $\mathscr{W}_K$ に部分空間として埋め込むことができ、その像を $\mathscr{W}^* \subset \mathscr{W}_K$ と置くことにする。ここで τ は§2.2 で導入した指標である。自然な同一視 $\mathscr{B}^*(\mathbb{C}_p) \times \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z} = \mathscr{W}^*(\mathbb{C}_p)$ を $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ に制限することで、前段落で再定式化したウェイトの空間 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ は $\mathscr{W}^*(\mathbb{C}_p) \subset \mathscr{W}_K(\mathbb{C}_p) = \mathscr{W}(\mathbb{C}_p)$ の部分集合とみなすことができる。例えば $(0, 1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ に対応する $\mathscr{W}^*(\mathbb{C}_p)$ の元は指標 τ に他ならない。今後は $\mathscr{W}^*$ を $\mathscr{W}$ に代わる新たなパラメータのウェイト空間とみなし、族 $(M_k^\dagger(N))_{k \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}}$ を $\mathscr{W}^*(\mathbb{C}_p)$ まで補間する。

まず各 $k = (s, i) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ に対し、$M_k^\dagger(N)$ は Banach K 線形空間 $M_{Np,k}(0)$ の K 線形部分空間であったので、相対位相を与えることで位相 K 線形空間をなす。十分小さい各 $v \in \mathbb{Q} \cap [0, p(p+1)^{-1})$ に対し写像 $M_s(v) \to M_0(v),\ F \mapsto E^{-s}F$ が同相同型であったことを思い出すと、写像 $\prod_{i \in \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}} M_{(s,i)}^\dagger(N) \to \prod_{i \in \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}} M_{(0,i)}^\dagger(N),\ F \mapsto E^{-s}F$ もまた全単射で、$M_s(0)$ と $M_0(0)$ の部分位相について同相同型になる。E が $M_{(1,0)}^\dagger(N)$ に属することに気を付けると、この同相同型の制限は各 $i \in \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ に対して同相同型 $M_{(s,i)}^\dagger(N) \to M_{(0,i)}^\dagger(N)$ を与える。この性質を族の補間に逆用する。即ち各 $k = (s, i) \in \mathscr{W}^*(\mathbb{C}_p)$ に対して $M_k^\dagger(N) := \{F \in K[[q]] \mid E^{-s}F \in M_{(0,i)}^\dagger(N)\}$ と置き、トートロジーな全単射 $M_k^\dagger(N) \to M_{(0,i)}^\dagger(N),\ F \mapsto E^{-s}F$ を以てして $M_k^\dagger(N)$ に $M_{(0,i)}^\dagger(N)$ の位相を引き戻すことを考える。ここで各 $s \in \mathscr{B}^*(\mathbb{C}_p)$ に対し、$X(0)$ の十分小さな近傍上のリジッド解析的関数 e^s を定義した時と同様の方法で $E^s \in K[[q]]$ を定義することにする。ただし e^s を定義する時には $e-1$ の値の絶対値の一様有界性を用いたが、E^s を定義する時には $E - 1 \in q\mathbb{Z}_p[[q]] \subset K[[q]]$ であることを用いる。つまり e^s は（$X(0)$ の十分小さな近傍での）一様収束の位相における極限（非常に強い収束）を用いて定義されたものであることに対し、E^s は $K[[q]]$ の各係数の直積位相における極限（弱い収束）を用いて定義されたものである。§1.1 と§1.2 で述べたように、族や補間の連続性は最初から自然に備わっているものではないので、収束性について混乱した場合はそもそも族にどのような連続性を考えていたかを思い出すと良い。以上により、$\mathscr{W}^*(\mathbb{C}_p)$ で添字付けられた位相 K 線形空間の族 $(M_k^\dagger(N))_{k \in \mathscr{W}^*(\mathbb{C}_p)}$ を得た。ここで族 $(M_k^\dagger(N))_{k \in \mathscr{W}^*(\mathbb{C}_p)}$ はあくまで空間の族であり、最終的な目的としている p 進モジュラー形式の族ではないことに気を付ける。また、収束半径 $v \in \mathbb{Q} \cap (0, p(p+1)^{-1})$ を十分小さく固定しても同様に空間の補間が可能であり、$\mathscr{W}^*(\mathbb{C}_p)$ で添字付けられた Banach $A(X(v))$ 加群の族 $(M_k(v))_{k \in \mathscr{W}^*(\mathbb{C}_p)}$ を得る。各 $k = (s, i) \in \mathscr{W}^*(\mathbb{C}_p)$ に対し $M_k^\dagger(N)$

の元 F を（Serre 流に）「K 上のウェイト k レベル $\Gamma_1(N)$ 過収束モジュラー形式の q 展開」と呼び、特に $E^{-s}F \in M^{\dagger}_{(0,i)}(N) \subset A(X(0))$ が $X(0)$ の全てのカスプを零点に持つ時、F を「K 上のウェイト k レベル $\Gamma_1(N)$ 過収束カスプ形式の q 展開」と呼ぶ。

環 A 上の形式冪級数 $F \in A[[q]]$ に対し、$(a_n(F))_{n=0}^{\infty}$ で $F = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(F)q^n$ なる $A^{\mathbb{N}}$ の唯一の元を表すとする。各 $s \in \mathscr{B}^*(\mathbb{C}_p)$ に対し、$a_0(E^s) = 1$、$a_1(E^s) = a_1(E)s$、$a_2(s) = (a_2(E) - a_1(E)^2/2)s + (a_1(E)^2/2)s^2$ のように、E^s の各係数を s の $\mathbb{Q}_p$ 係数多項式で表すことができる。即ちある $E(q)^S \in \mathbb{Q}_p[S][[q]]^{\times}$ が存在し、各 $(n,s) \in \mathbb{N} \times \mathscr{B}^*(\mathbb{C}_p)$ に対し $a_n(E(q)^S)|_{S=s} = a_n(E^s) \in \mathbb{C}_p$ が成立する。特に S を自然な包含写像 $\mathscr{B}^* \hookrightarrow \mathbb{A}^1_K$ に対応する $\mathscr{B}^*$ 上のリジッド解析的関数に対応させることで、$E(q)^S$ を $A(\mathscr{B}^*)[[q]]^{\times}$ の元とみなすことができる。さて、$\mathscr{U} \subset \mathscr{B}^*$ を部分空間とした時、$F(S,q) \in A(\mathscr{U})[[q]]$ が「$\mathscr{U}$ 上のレベル $\Gamma_1(N)$ 過収束モジュラー形式の族の q 展開」であるとは、$F(S,q)/E(q)^S \in A(\mathscr{U})[[q]]$ が $\mathscr{U} \times X(0)$ の $\mathscr{U}$ 上の過収束関数（cf. [Col97]A 節 p. 440）の q 展開であるということである。特に $E(q)^S$ は定義より自明に $\mathscr{B}^*$ 上の過収束モジュラー形式の族の q 展開をなす。以下にこの定式化の正当性を確かめる。

K 上のリジッド解析空間 $\mathscr{X}$ に対し、$\mathscr{X}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ で $\bigcup_{L \subset \overline{\mathbb{Q}}_p} \mathscr{X}(L) \subset \mathscr{X}(\mathbb{C}_p)$ を表すことにする。ここで $L \subset \overline{\mathbb{Q}}_p$ は K の有限次拡大全体を亙る。$F(S,q) \in A(\mathscr{U})[[q]]$ を $\mathscr{U}$ 上のレベル $\Gamma_1(N)$ 過収束モジュラー形式の族の q 展開とする。任意の $s \in \mathscr{U}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ に対し $L_s \subset \overline{\mathbb{Q}}_p$ で $\mathscr{B}^*$ の s での剰余体を表すことにし、$F(s,q) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} a_n(F(S,q))|_{S=s}\, q^n \in L_s[[q]]$ と置くと、$F(s,q)/E^s \in L_s[[q]]$ は $F(S,q)/E(q)^S$ を q 展開に持つ $\mathscr{U} \times X(0)$ の $\mathscr{U}$ 上の過収束関数を $S = s$ に制限したものの q 展開であり、即ち $X(0)_{L_s}$ 上の過収束関数の q 展開となる。従って $F(s,q)$ は E^s と $\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}} L_s \otimes_K M^{\dagger}_{(0,i)}(N)$ の元の積となるので、結果的に $\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}} L_s \otimes_K M^{\dagger}_{(s,i)}(N)$ の元となり、自然な埋め込み $L_s \otimes_K K[[q]] \hookrightarrow L_s[[q]]$ により L_s 上の過収束モジュラー形式の q 展開と同一視される。以上より、$F(S,q)$ は $\mathscr{U}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ で添字付けられた K の有限次拡大体上の過収束モジュラー形式の q 展開の（ある意味でリジッド解析的な）族とみなすことができる。

更に記法と用語を準備する。もしある $i \in \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ が存在して各 $s \in \mathscr{U}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ に対し $F(s,q) \in L_s \otimes_K M^{\dagger}_{(s,i)}(N)$ が成り立つならば、$F(S,q)$ は「i 型」であるという。もしある（十分小さい）$v \in \mathbb{Q} \cap (0, p(p+1)^{-1})$ が存在して $F(S,q)/E(q)^S$ が $A(\mathscr{U} \times_K X(v))$ の像に属するならば、$F(S,q)$ は「収束半径 v」であるという。もし $F(S,q)/E(q)^S \in A(\mathscr{U} \times_K X(0))$ が $X(0)$ の全てのカスプの逆像を零点に持つならば、$F(S,q)$ は「$\mathscr{U}$ 上のレベル $\Gamma_1(N)$ 過収束カスプ形式の族の q 展開」であるという。$S(v,i)_{\mathscr{U}} \subset A(\mathscr{U})[[q]]$ で $\mathscr{U}$ 上のレベル $\Gamma_1(N)$ i 型収束半径 v 過収束カスプ形式の族の q 展開全体のなす $A(\mathscr{U})$ 部分加群を表す。$M^{\dagger}(N) \subset A(\mathscr{B}^*)[[q]]$ で $\mathscr{B}^*$ 上のレベル $\Gamma_1(N)$ 過収束モジュラー形式の族の q 展開全体のなす $A(\mathscr{B}^*)$ 加群を表す。$A^{\dagger}(N) \subset A(\mathscr{B}^* \times_K X(0))$ で $\mathscr{B}^* \times_K X(0)$ の $\mathscr{B}^*$ 上の過収束関数のなす $A(\mathscr{B}^*)$ 代数を表すことにすると、q 展開の冪級数としての積により $M^{\dagger}(N)$ の $A(\mathscr{B}^*)$ 加群構造は自然に $A^{\dagger}(N)$ 加群構造へと延長される。$M^{\dagger}(N)$ は $\mathbb{F}_p^{\times}$ の自然な $A^{\dagger}(N)$ 線形作用を持ち、各 $i \in \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ について指標 t^i に属する固有空間を $M^{\dagger}(N,i) \subset M^{\dagger}(N)$ と置くと、$M^{\dagger}(N,i)$ は $\mathscr{B}^*$ 上のレベル $\Gamma_1(N)$ i 型過収束モジュラー形式の族の q 展開全体に他ならない。$t(\mathbb{F}_p^{\times}) \subset \mathbb{Q}_p^{\times} \subset K^{\times}$ より、$A^{\dagger}(N)$ 加群としての直和分解 $M^{\dagger}(N) = \bigoplus_{i \in Z/(p-1)\mathbb{Z}} M^{\dagger}(N,i)$ を得る。各 $k = (s,i) \in \mathscr{W}^*(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ に対し、

$S = s$ での値を考えることで K 線形写像 $M^\dagger(N,i) \to L_s \otimes_K M_k^\dagger(N)$ を得る。更に $\mathbb{F}_p^\times$ 作用に関する固有空間分解に付随する射影 $M^\dagger(N) \twoheadrightarrow M^\dagger(N,i)$ を合成することで、k における $\mathbb{F}_p^\times$ 同変な特殊化写像 $M^\dagger(N) \to L_s \otimes_K M_k^\dagger(N)$ を得る。また各 $s \in \mathscr{B}^*(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ に対し、(s,i) における特殊化写像 $M^\dagger(N) \to L_s \otimes_K M_{(s,i)}^\dagger(N)$ の $i \in \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ を亙る和 $M^\dagger(N) \to \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}} L_s \otimes_K M_{(s,i)}^\dagger(N)$ は、前段落で扱った対応を与える写像である。

さて $A^\dagger(N)$ には $A(\mathscr{B}^*)$ 線形作用素として、各 $(c,\ell) \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \times \mathbb{Z}_p^\times$ に対する Diamond 作用素 $\langle(c,\ell)\rangle$ と p における Hecke 作用素 U^* が自然に定義され、それらをトートロジーな $A^\dagger$ 加群同型 $M^\dagger(N) \to A^\dagger(N),\ F(S,q) \mapsto F(S,q)/E(q)^S$ により引き戻すことで $M^\dagger(N)$ 上の $A(\mathscr{B}^*)$ 線形作用素として Diamond 作用素 $\langle(c,\ell)\rangle^*$ と p における Hecke 作用素 $T(p)$ を定義することができる。p 以外の素数 ℓ における Hecke 作用素 $T(\ell)$ を $M^\dagger(N)$ 上の $A(\mathscr{B}^*)$ 線形作用素として以下のように定める。ℓ が N と互いに素な場合は $F(S,q) \mid T(\ell) \coloneqq \sum_{n=0}^\infty a_{n\ell}(F(S,q))q^n + \ell^{-1}(\ell\tau(\ell)^{-1})^S \sum_{n=0}^\infty a_n(F(S,q) \mid \langle(\ell,\ell)\rangle^*)q^{n\ell}$ とし、ℓ が N を割る時は $F(S,q) \mid T(\ell) \coloneqq \sum_{n=0}^\infty a_{n\ell}(F(S,q))q^n$ とする。ただし $(\ell\tau(\ell)^{-1})^S$ は $\ell\tau(\ell)^{-1} \in 1 + p\mathbb{Z}_p$ に二項展開を用いて指数関数をリジッド解析的に補間した $\mathscr{B}^*$ 上のリジッド解析的関数である。（Diamond 作用素 $\langle(c,\ell)\rangle^*$ は [Col97] p. 462 で定式化しているように $(\ell\tau(\ell)^{-1})^S \in A(\mathscr{B}^*)$ で捻っておく方が $T(\ell)$ を記述しやすくなるが、いずれにしても $A(\mathscr{B}^*)$ の可逆元倍の差しかないので Hecke 環を定義する上ではあまり気にする必要がない。）$\mathbb{T}$ で Diamond 作用素と Hecke 作用素が生成する $\mathrm{End}_{A(\mathscr{B}^*)}(M^\dagger(N))$ の $A(\mathscr{B}^*)$ 部分代数を表すとすると、Hecke 環 $\mathbb{T}$ は可換 $A(\mathscr{B}^*)$ 代数をなす。Hecke 作用素の通常の関係式を用い、素数でない正整数 n に対しても $\mathbb{T}$ の元 $T(n)$ を定義することが出来る。同様に各 $k = (s,i) \in \mathscr{W}^*(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ に対し $L_s \otimes_K M_k^\dagger(N)$ 上の L_s 線形な Diamond 作用素と Hecke 作用素を特殊化写像 $M^\dagger(N) \to L_s \otimes_K M_k^\dagger(N)$ が同変になるように定義することができ、$\mathbb{T}_k$ で Diamond 作用素と Hecke 作用素が生成する $\mathrm{End}_{L_s}(L_s \otimes_K M_k^\dagger(N))$ の L_s 部分代数を表すとすると、Hecke 環 $\mathbb{T}_k$ は可換 L_s 代数をなし、Diamond 作用素と Hecke 作用素を保つ全射 K 代数準同型 $\mathbb{T} \twoheadrightarrow \mathbb{T}_k$ が s における特殊化写像 $A(\mathscr{B}^*) \to L_s$ と整合的になるように一意に定義される。これが Hecke 環の特殊化写像である。$M_k^\dagger(N)$ への $\mathbb{T}_k$ 作用について、L_s 値固有値の系に属する同時固有ベクトルを「ウェイト k レベル $\Gamma_1(N)$ 過収束固有形式の q 展開」と呼ぶ。

いよいよ R 族を構成する。$\alpha \in \mathbb{Q} \cap (0,\infty)$ とし、$k_0 \in \mathscr{W}^*(K)$ を固定する。[Col97] Corollary A5.5.1 により、十分小さな $r \in |K| \cap (0,|p|^{-p(p-1)^{-1}})$ が存在し、中心 k_0 半径 r の閉円盤を $\mathscr{B}_0 \subset \mathscr{B}^*$ と置くと、§2.2 で導入した $P_i^0(S,Z) \in A(\mathscr{B}^* \times_K \mathbb{A}_K^1)$ を用いて「$P_i^0(s,z) = 0$ かつ $|z| = |p|^\alpha$」を満たすような点 $(S,Z) = (s,z)$ 全体のなす $\mathscr{B}_0 \times_K \mathbb{A}_K^1 \subset \mathscr{B}^* \times_K \mathbb{A}_K^1$ の部分空間 $\mathscr{Z}^0$ が $\mathscr{B}_0$ 上有限になる。その次数を d と置くと、射影 $\mathscr{Z}^0 \twoheadrightarrow \mathscr{B}_0$ が誘導する有界 K 代数準同型 $A(\mathscr{B}_0) \to A(\mathscr{Z}^0)$ の代数的な有限性より、ある $Q(S,Z) = \sum_{n=0}^d Q_n(S)Z^n \in A(\mathscr{B}_0)[Z]$ が存在して $P_i^0(S,Z)$ は $Q(S,Z)$ と $A(\mathscr{B}_0 \times_K \mathbb{A}_K^1)$ の元の積に分解し、$Q_0(S) = 1$ かつ $Q_d(S) \in A(\mathscr{B}_0)^\times$ となる。（係数について制約を課せる理由は、スロープ α が有限の値に固定されているためである。スロープの条件は大雑把には、$Q(S,Z)$ の Z に関する根が S を動かした時に一定の絶対値 $|p|^\alpha$ を取るという条件に対応し、特に根が全て可逆であることを保証する。）$Q^*(S,Z) \coloneqq Z^dQ(S,Z^{-1}) \in A(\mathscr{B}_0)[Z]$、各 $v \in \mathbb{Q} \cap [0,p(p+1)^{-1})$ に対し U^* の作用の $S(v,i)_{\mathscr{B}_0}$ への制限を $U_{\mathscr{B}_0}$ と置く。$N_{U_{\mathscr{B}_0}}(Q,v) \coloneqq \ker(Q^*(U_{\mathscr{B}_0}))$、$F_{U_{\mathscr{B}_0}}(Q,v) \coloneqq$

$\bigcap_{n=1}^{\infty} Q^*(U_{\mathscr{B}_0})^n(S(v,i)_{\mathscr{B}_0})$ と置くと、§2.2 末尾の議論と p 進 Riesz 理論（cf. [Col97] Theorem 4.3）により、十分小さい v に対し Banach $A(\mathscr{B}_0)$ 加群としての直和分解 $S(v,i)_{\mathscr{B}_0} = N_{U_{\mathscr{B}_0}}(Q,v) \oplus F_{U_{\mathscr{B}_0}}(Q,v)$ を得る。各 $v' \in \mathbb{Q} \cap (0,v)$ に対し、制限写像 $S(v,i)_{\mathscr{B}_0} \hookrightarrow S(v',i)_{\mathscr{B}_0}$ は $U_{\mathscr{B}_0}$ 同変であるため、$A(\mathscr{B}_0)[[q]]$ の $A(\mathscr{B}_0)$ 部分加群の包含 $N_{U_{\mathscr{B}_0}}(Q,v) \subset N_{U_{\mathscr{B}_0}}(Q,v')$ を誘導する。$A(\mathscr{B}_0)$ が 1 次元 Tate 代数であり特に PID であることに気を付けると、[Col97] Proposition A5.3 によりこの包含は階数 d 自由 $A(\mathscr{B}_0)$ 加群の間の単射準同型となり、かつ $A(\mathscr{B}_0)$ のスカラー倍は収束半径を変えないため、結局等号となる。従って $N_{U_{\mathscr{B}_0}}(Q,v)$ は v に依存しない $A(\mathscr{B}_0)[[q]]$ の階数 d 自由 $A(\mathscr{B}_0)$ 部分加群となるので、今後は v を動かし $N_{U_{\mathscr{B}_0}}(Q,v)$ を $N_{U_{\mathscr{B}_0}}(Q)$ と表すことにする。

R で $\mathbb{T}$ の像が生成する $\mathrm{End}_{A(\mathscr{B}_0)}(N_{U_{\mathscr{B}_0}}(Q))$ の $A(\mathscr{B}_0)$ 部分代数を表すことにすると、R は可換 $A(\mathscr{B}_0)$ 代数であり、かつ $N_{U_{\mathscr{B}_0}}(Q)$ が階数 d 自由 $A(\mathscr{B}_0)$ 加群であることと $A(\mathscr{B}_0)$ が PID であることから、R は有限生成自由 $A(\mathscr{B}_0)$ 加群をなす。従って、アフィノイド空間における「連接層と有限生成加群の等価性」を保証する Kiehl の定理（cf. [BGR84] 9.4.3 Theorem 3）とアフィノイド代数における「有限生成加群と有限生成 Banach 加群の等価性」（cf. [BGR84] 3.7.3 Proposition 3）により、R は（同型を除いて一意な）Banach $A(\mathscr{B}_0)$ 代数構造を持ち、その構造について R はアフィノイド K 代数をなす。$X(R)$ で R に付随する 1 次元アフィノイド空間を表す。R の有限性から即座に Hecke 環の双対性を得る。即ち、非退化 $A(\mathscr{B}_0)$ 双線型形式 $R \times N_{U_{\mathscr{B}_0}}(Q) \to A(\mathscr{B}_0)$, $(T,F) \mapsto a_1(F \mid T)$ が $A(\mathscr{B}_0)$ 加群の同型 $R \to \mathrm{Hom}_{A(\mathscr{B}_0)}(N_{U_{\mathscr{B}_0}}(Q), A(\mathscr{B}_0))$ と $N_{U_{\mathscr{B}_0}}(Q) \to \mathrm{Hom}_{A(\mathscr{B}_0)}(R, A(\mathscr{B}_0))$ を誘導し、$A(\mathscr{B}_0)$ 代数準同型 $R \to A(\mathscr{B}_0)$ が「$\mathbb{T}$ の $A(\mathscr{B}_0)$ 値固有値の系に属する $N_{U_{\mathscr{B}_0}}(Q)$ の同時固有ベクトル」に対応する。$\mathbb{T}_k$ についても同様である。$F_R \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} T(n)q^n \in R[[q]]$ と置き、これを「R 族」と呼ぶ。以下 $L \subset \overline{\mathbb{Q}}_p$ を K の任意の有限次拡大として固定する。各 $x \in X(R)(L)$ に対し、x に対応する有界 K 代数準同型を $\eta_x \colon R \to L$ と表す。各 $k \in \mathscr{B}_0(K)$ に対し、$X(R)_k(L) \subset X(R)(L)$ で構造射 $X(R) \to \mathscr{B}_0$ による k の逆像を表す。F_R は次の定理の意味で、（Katz 流に）「$X(R)$ 上のレベル $\Gamma_1(Np)$ 指標 t^i（古典的）カスプ固有形式の族の q 展開」である。

定理 2.1 ([Col97] Theorem B5.7)**.** $k \in \mathbb{N} \cap (\alpha+1,\infty)$ とする。任意の $x \in X(R)_k(L)$ に対し $F_R(x) \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} \eta_x(T(n))q^n \in L[[q]]$ は L 上のウェイト k レベル $\Gamma_1(Np)$ 指標 t^i カスプ固有形式の q 展開であり、写像 $X(R)_k(L) \to L[[q]]$, $x \mapsto F_R(x)$ は L 上のウェイト k レベル $\Gamma_1(Np)$ 指標 t^i カスプ固有形式の q 展開全体のなす部分集合への全単射をなす。

Proof. 各 $x \in X(R)_k(L)$ に対して $F_R(x)$ が L 上のウェイト k レベル $\Gamma_1(Np)$ 指標 t^i 過収束カスプ固有形式に対応することは $\mathbb{T}$ に対する Hecke 環の双対性から即座に分かる。古典的であることはコントロール定理（cf. [Col96] Theorem 8.1）より従う。単射性は q 展開原理より従う。全射性は $\mathbb{T}_k$ に対する Hecke 環の双対性から従う。 □

謝辞

山上敦士先生からは整数論サマースクールで発表する機会を戴き、また様々な助言と激励を戴き、心より感謝を申し上げます。p 進保型形式について少し勉強してみたいと思っておりましたので、とても良い機会になりました。山下剛先生と三枝

洋一先生からも色々な示唆を戴き、誠にありがとうございました。松本雄也さんは推敲の手伝いをして戴き、誠にありがとうございました。これまでの整数論サマースクールの全ての関係者を始めとする多くの方々の恩恵の下に、こうして整数論サマースクールに臨むことができました。この場を借りて皆様にお礼を申し上げます。

参考文献

[Ber90] V. G. Berkovich, *Spectral Theory and Analytic Geometry over non-Archimedean Fields*, Mathematical Surveys and Monographs, Number 33, the American Mathematical Society, 1990.

[BGR84] S. Bosch, U. Güntzer, and R. Remmert, *Non-Archimedean Analysis A Systematic Approach to Rigid Analytic Geometry*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 261, A Series of Comprehensive Studies in Mathematics, Springer, 1984.

[Col96] R. F. Coleman, *Classical and Overconvergent Modular Forms*, Inventiones Mathematicae, Volume 124, pp. 215–241, 1996.

[Col97] R. F. Coleman, *P-adic Banach Spaces and Families of Modular Forms*, Inventiones Mathematicae, Volume 127, pp. 417–479, 1997.

[Kat73] N. M. Katz, *P-adic Properties of Modular Schemes and Modular Forms*, Modular Functions of One Variable III, Proceedings International Summer School, Lecture Notes in Mathematics, Volume 350, pp. 69–190, 1973.

索引